Stephen C. Kleene

# Introducción a la metamatemática

ESTRUCTURA Y FUNCION
EDITORIAL TECNOS - MADRID

## ESTRUCTURA Y FUNCION

*El porvenir actual de la Ciencia*

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. QUENTIN GIBSON: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. ASHLEY MONTAGU: *La dirección del desarrollo humano* (2ª ed.).
3. GUSTAV BERGMANN: *Filosofía de la ciencia.*
4. CHRISTIAN BAY: *La estructura de la libertad.*
5. ERNEST NAGEL: *La lógica sin metafísica.*
6. DAVID HILBERT y WILHELM ACKERMANN: *Elementos de lógica teórica* (2ª ed.).
7. VERNON VAN DYKE: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. KARL R. POPPER: *La lógica de la investigación científica* (2ª ed.).
9. R. M. MARTIN: *Verdad y denotación.*
10. ERNEST GELLNER: *Palabras y cosas.*
11. C. O. BROAD: *El pensamiento científico.*
12. JOHN HOSPERS: *La conducta humana.*
13. ARTHUR PAP: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. SCHELLING: *La estrategia del conflicto.*
15. RICHARD B. BRAITHWAITE: *La explicación científica.*
16. MILIC CAPEK: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. ROS ASHBY: *Proyecto para un cerebro.*
18. HANS REICHENBACH: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. GEORGE POLYA: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. GEORGE L. S. SHACKLE: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. ARMSTRONG: *La percepción y el mundo físico.*
22. ERNEST NAGEL: *Razón soberana.*
23. MAX BLACK: *Modelos y metáforas.*
24. HASKELL B. CURRY y ROBERT FEYS: *Lógica combinatoria.*
25. LUDWIG WITTGENSTEIN: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. ABRAHAM EDEL: *El método en la teoría ética.*
27. ALFRED LANDE: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. JEAN LADRIERE: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. WIENER y J. P. SCHADE: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. von WRIGHT: *Norma y acción.* Una investigación lógica.
31. E. NAGEL y J. P. NEWMAN: *El teorema de Gödel.*
32. HENRY MARGENAU: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. CHAPPELL: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. ALF ROSS: *Lógica de las normas.*
35. W. SELLARS: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. CHRISTIAN THIEL: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. CLAUDE FLAMENT: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. KNEALE: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. HUGHES y M. J. CRESSWELL: *Introducción a la lógica modal.*
40. KARL R. POPPER: *Conocimiento objetivo.*
41. GOTTLOB FREGE: *Escritos lógico-semánticos.*

# INTRODUCCION A LA METAMATEMATICA

ESTRUCTURA Y FUNCION
*EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA*

*Stephen Cole Kleene*
Profesor de Matemáticas en la Universidad de Wisconsin (Madison, Wis., U.S.A.)

# INTRODUCCION
## A LA
# METAMATEMATICA

*EDITORIAL TECNOS*

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
*Introduction to Metamathematics*
publicada por North-Holland Publishing Company, de Amsterdam
son propiedad de Editorial Tecnos, S. A.

Traducción por
MANUEL GARRIDO

Con la colaboración de
RAFAEL BENEYTO
JOSE SANMARTIN
ENRIQUE CASABAN

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1974
O'Donnell, 27. Madrid-9
ISBN 84-309-0529-4
Depósito Legal M: 32.252- 1974

**Printed in Spain - Impreso en España por Gráficas LORMO. Isabel Méndez, 15. Madrid, 1974**

# PREFACIO

*Dos eras sucesivas de investigaciones sobre los fundamentos de la matemática en el siglo diecinueve, cuya culminación tuvo lugar con la teoría de conjuntos y la aritmetización del análisis, condujeron en torno a 1900 a una nueva crisis, y a una nueva era dominada por los programas de Russell y Whitehead, de Hilbert y de Brouwer.*

*La aparición en 1931 de los dos teoremas de incompletud de Gödel, en* 1933 *de la obra de Tarski sobre el concepto de verdad en lenguajes formalizados, en 1934 de la noción de 'función recursiva general' de Herbrand-Gödel, y en 1936 de la tesis de Church concerniente a dicho concepto, inauguran una aún más nueva era en la cual los instrumentos matemáticos son aplicados no sólo en la evaluación de los anteriores programas, sino también en imprevistas direcciones.*

*El objetivo de este libro es suministrar una introducción sistemática a las cuestiones de la lógica matemática y funciones recursivas en particular, y a las más recientes investigaciones fundacionales en general.*

*Una cierta selección era ineludible. La opción principal ha consistido en concentrarse, después de la Parte I, en la investigación metamatemática de la teoría elemental de números, con el requisito de la lógica matemática, dejando aparte los cálculos superiores de predicados, el análisis, la teoría de tipos y la teoría de conjuntos. Esta opción fue adoptada porque en la teoría de números se encuentra la primera y más simple ejemplificación de los más recientes métodos y conceptos, pero la extensión a otras ramas de la matemática está en marcha y promete ser de creciente importancia en el inmediato futuro.*

*El libro está escrito para que se lo pueda utilizar como texto por estudiantes de primer año de graduación en matemáticas (y más avanzados) y por cualesquiera otros que se encuentren a un nivel semejante de educación matemática, siendo al respecto irrelevante su conocimiento de cualquier materia matemática particular.*

*Al utilizar el libro como texto, se ha pretendido que la Parte I (Capítulos I-III), que suministra la necesaria base, fuese cubierta rápidamente (en dos o tres semanas por una clase de tres horas semanales). El estudio intensivo debería comenzar con la Parte II (Capítulo IV), donde es esencial que se concentre el estudiante en orden a adquirir una firme captación del método metamatemático.*

*Las secciones con asterisco pueden ser omitidas en una primera lectura o examinadas como por encima. A veces será necesario luego volver hacia atrás y estudiar una sección anteriormente marcada con asterisco (por ej., § 37 tendrá que ser estudiada para la comprensión de § 72).*

*Los dos famosos teoremas de incompletud de Gödel se obtienen en el Capítulo VIII, dejando un lema para ser demostrado en el Capítulo X. El autor ha comprobado que es factible completar estos diez capítulos (y a veces algo más) en el curso semestral que ha dado conforme a estas líneas en la Universidad de Wisconsin.*

*Los cinco capítulos restantes pueden ser utilizados para extender a un año la duración del curso, o como lectura colateral para acompañar un seminario.*

*Un curso semestral sobre funciones recursivas para estudiantes previamente familiarizados con la lógica matemática, podría comenzar por la Parte III (Capítulo*

*IX). Hay otras posibilidades de seleccionar material: por ej., mucho de la Parte IV puede seguir directamente a la Parte III o incluso al Capítulo VII para estudiantes primariamente interesados en lógica matemática.*

*El autor está en deuda con Saunders McLane por haberle animado a escribir este libro y por la valiosa crítica de un primer bosquejo de varios capítulos. John Addison leyó por entero y con gran cuidado las primeras pruebas de imprenta, independientemente del autor. Entre muchos otros que le han sido de ayuda figuran Evert Beth, Robert Breusch, Arend Heyting, Nancy Kleene, Leonard Linski, David Nelson, James Renno y Gene Rose. La deuda científica se consigna por referencias a la Bibliografía; se ha hecho un uso especialmente extenso de Hilbert y Bernays "Grundlagen der Mathematik", en dos volúmenes,* 1934 *y* 1939.

*Julio 1952* S. C. KLEENE

INDICE

PREFACIO ..... *Pág.* 7

PARTE I
EL PROBLEMA DE LOS FUNDAMENTOS

Cap. I. LA TEORIA DE CONJUNTOS ..... 15

§ 1. Conjuntos enumerables ..... 15
§ 2. El método de la diagonal de Cantor ..... 17
§ 3. Número cardinal ..... 20
*§ 4. El teorema de equivalencia, conjuntos finitos e infinitos ..... 21
*§ 5. Cardinales transfinitos superiores ..... 24

Cap. II. ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES ..... 29

§ 6. Los números naturales ..... 29
§ 7. Inducción matemática ..... 31
§ 8. Sistemas de objetos ..... 33
*§ 9. La teoría de números frente al análisis ..... 37
§ 10. Funciones ..... 40

Cap. III. UNA CRITICA DEL RAZONAMIENTO MATEMATICO ..... 43

§ 11. Las paradojas ..... 43
§ 12. Primeras inferencias a partir de las paradojas ..... 46
§ 13. Intuicionismo ..... 51
§ 14. Formalismo ..... 57
§ 15. Formalización de una teoría ..... 62

PARTE II
LOGICA MATEMATICA

Cap. IV. UN SISTEMA FORMAL ..... 71

§ 16. Símbolos formales ..... 71
§ 17. Reglas de formación ..... 73
§ 18. Variables libres y ligadas ..... 76
§ 19. Reglas de transformación ..... 80

Cap. V. DEDUCCION FORMAL ..... 86

§ 20. Deducción formal ..... 86
§ 21. El teorema de deducción ..... 89
§ 22. El teorema de deducción (conclusión) ..... 93
§ 23. Introducción y eliminación de símbolos lógicos ..... 97
*§ 24. Dependencia y variación ..... 101

Cap. VI. EL CALCULO PROPOSICIONAL ..... 106

§ 25. Fórmulas de letras proposicionales ..... 106
§ 26. Equivalencia, reemplazo ..... 110
§ 27. Equivalencias, dualidad ..... 115

§ 28. Evaluación, consistencia ..... 120
§ 29. Completud, forma normal ..... 126
§ 30. Procedimiento de decisión, interpretación ..... 131

Cap. VII. EL CALCULO DE PREDICADOS ..... 136

§ 31. Fórmulas de letras predicativas ..... 136
§ 32. Reglas derivadas, variables libres ..... 139
§ 33. Reemplazo ..... 144
*§ 34. Sustitución ..... 147
§ 35. Equivalencias, dualidad, forma prenexa ..... 153
§ 36. Evaluación, consistencia ..... 159
*§ 37. Lógica de predicados de teoría de conjuntos, $k$-transformaciones ..... 164

Cap. VIII. TEORIA FORMAL DE NUMEROS ..... 170

§ 38. Inducción, igualdad, reemplazo ..... 170
§ 39. Adición, multiplicación, orden ..... 174
*§ 40. El desarrollo ulterior de la teoría de números ..... 177
§ 41. Calculación Formal ..... 182
§ 42. Teorema de Gödel ..... 190

PARTE III
FUNCIONES RECURSIVAS

Cap. IX. FUNCIONES RECURSIVAS PRIMITIVAS ..... 201

§ 43. Funciones recursivas primitivas ..... 201
§ 44. Definición explícita ..... 203
§ 45. Predicados, representación por factores primos ..... 207
§ 46. Recursión de curso-de-valores ..... 213
*§ 47. Uniformidad ..... 216
§ 48. La función $\beta$ de Gödel ..... 220
§ 49. Funciones recursivas primitivas y el formalismo de teoría de números ..... 223

Cap. X. LA ARITMETIZACION DE LA METAMATEMATICA ..... 227

§ 50. La metamatemática como una aritmética generalizada ..... 227
§ 51. Definiciones metamatemáticas recursivas ..... 231
§ 52. La numeración de Gödel ..... 234
*§ 53. Definiciones inductivas y recursivas ..... 237

Cap. XI. FUNCIONES RECURSIVAS GENERALES ..... 240

§ 54. Calculación formal de funciones recursivas primitivas ..... 240
§ 55. Funciones recursivas generales ..... 247
§ 56. Aritmetización del formalismo de funciones recursivas ..... 252
§ 57. El $\mu$-operador, enumeración, procedimiento de la diagonal ..... 255
§ 58. Forma normal, teorema de Post ..... 263
*§ 59. Funciones recursivas generales y formalismo de teoría de números ..... 269
§ 60. Teorema de Church, el teorema de Gödel generalizado ..... 272
§ 61. Una forma simétrica del teorema de Gödel ..... 280

Cap. XII. FUNCIONES RECURSIVAS PARCIALES ..... 288

§ 62. Tesis de Church ..... 288
§ 63. Funciones recursivas parciales ..... 293
§ 64. La lógica trivalente ..... 301
§ 65. Números de Gödel ..... 308
§ 66. El teorema de recursión ..... 315

Cap. XIII. FUNCIONES COMPUTABLES ..... 322

§ 67. Máquinas de Turing ..... 322

§ 68. Computabilidad de funciones recursivas ..... 328
§ 69. Recursividad de funciones computables ..... 337
§ 70. Tesis de Turing ..... 340
*§ 71. El problema de las palabras para semigrupos ..... 344

PARTE IV
LOGICA MATEMATICA (TOPICOS ADICIONALES)

Cap. XIV. EL CALCULO DE PREDICADOS Y SISTEMAS AXIOMATICOS ..... 351

§ 72. El teorema de completud de Gödel ..... 351
§ 73. El cálculo de predicados con igualdad ..... 359
*§ 74. Eliminabilidad de definiciones descriptivas ..... 364
§ 75. Sistemas axiomáticos, paradoja de Skolem, la secuencia de números naturales ..... 378
§ 76. El problema de la decisión ..... 388

Cap. XV. CONSISTENCIA, SISTEMAS CLASICOS E INTUICIONISTAS ..... 395

§ 77. El sistema formal de Gentzen ..... 395
§ 78. El teorema de forma normal de Gentzen ..... 403
*§ 79. Demostraciones de consistencia ..... 413
§ 80. Procedimiento de decisión, indemostrabilidad intuicionista ..... 431
§ 81. Reducciones de los sistemas clásicos a intuicionistas ..... 442
§ 82. Realizabilidad recursiva ..... 450

BIBLIOGRAFIA ..... 465

SIMBOLOS Y NOTACIONES ..... 482

INDICE ANALITICO ..... 483

PARTE I

# EL PROBLEMA DE LOS FUNDAMENTOS

# CAPITULO I

# LA TEORIA DE CONJUNTOS

§ 1. **Conjuntos enumerables.** Antes de tratar nuestra principal materia, será oportuno dar breve noticia de la teoría de conjuntos de Cantor.

Una manada de cuatro ovejas y un soto de cuatro árboles guardan entre sí una relación que ni una ni otro guardan con una pila de tres piedras o con un soto de siete árboles. Pese a que, para establecer este truismo en página impresa, se ha hecho uso de palabras denominativas de números, la relación a que nos referimos subyace al concepto de número cardinal. Sin necesidad de contar las ovejas o los árboles, cabe emparejar las unas con los otros, atando, por ejemplo, las ovejas a los árboles, de suerte que cada oveja y cada árbol pertenezcan a exactamente uno de los pares. Un tal emparejamiento entre los miembros de dos colecciones o 'conjuntos' de objetos es llamado una *correspondencia* de *uno-a-uno* (1-1).

En 1638, Galileo observó que los *cuadrados de los enteros positivos* pueden ser puestos en correspondencia de 1-1 con los *enteros positivos* mismos, así

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \ldots, n^2, \ldots$$
$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots, n, \ldots,$$

a pesar del antiguo axioma de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. Cantor, entre 1874 y 1897, fue el primero que intentó sistemáticamente comparar conjuntos infinitos en términos de la posibilidad de establecer correspondencias de 1-1.

Los dos conjuntos en la "paradoja" de Galileo y el conjunto de los *números naturales*

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, n-1, \ldots,$$

son ejemplos de conjuntos infinitos que son 'enumerables'. Eligiendo como standard al último mentado, definimos a un conjunto como *enumerable* (o *numerable* o *contable*), si puede ser puesto en correspondencia de 1-1 con los números naturales.

Para mostrar que un conjunto infinito es enumerable, necesitamos meramente indicar cómo sus miembros pueden ser dados (sin repeticiones) en una 'lista infinita'; entonces el primero en la lista corresponde a 0, el segundo a 1, y así sucesivamente. Aun cuando la lista sea infinita, cada miembro ocupa en ella una posición finita.

Una lista infinita particular (sin repeticiones) de los miembros del conjunto, o una correspondencia de 1-1 entre el conjunto y los números naturales, es llamada una *enumeración* del conjunto; el número correspondiente a un miembro dado es el *índice* del miembro en la enumeración.

Los miembros de un conjunto finito pueden asimismo ser dados en una lista, es decir, una lista finita. De ahí que el término *enumerable* sea aplicado a veces a conjuntos que son o bien infinitos y enumerables, esto es, *enumerablemente infinitos*, o bien, por el contrario, finitos.

El conjunto de los *enteros* puede ser enumerado alistando a éstos en el siguiente orden,

$$0, \quad 1, \quad -1, \quad 2, \quad -2, \quad 3, \quad -3, \ldots$$

El conjunto de los *números racionales* es también enumerable, un hecho que es sorprendente si se los compara primero con los enteros en el orden algebraico usual. Los puntos en el eje de las $x$ con abscisas enteras son aislados, mientras que aquellos con abscisas racionales son 'densos por doquier', esto es, entre cada dos de ellos por cercanos que estén, hay otros. La enumeración puede ser llevada a cabo mediante un procedimiento que será presentado para los *números racionales positivos*, dejando al lector el caso de todos los racionales. Sean ordenadas las fracciones de los enteros positivos en una matriz infinita, así,

$$\begin{array}{ccccccc}
1/1 & & 1/2 & \rightarrow & 1/3 & & 1/4 \rightarrow \ \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
2/1 & & 2/2 & & 2/3 & & 2/4 \quad \ldots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & \\
3/1 & & 3/2 & & 3/3 & & 3/4 \quad \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & \\
4/1 & & 4/2 & & 4/3 & & 4/4 \quad \ldots \\
& & & & \ldots & &
\end{array}$$

Sean entonces estas fracciones enumeradas siguiendo las flechas. Un número racional es un número que puede ser expresado como una fracción de enteros. Recórrase la enumeración de fracciones tachando cada número que sea igual en valor a alguno que lo haya precedido. Ello da por resultado la siguiente enumeración de números racionales positivos,

$$1, \quad 2, \quad 1/2, \quad 1/3, \quad 3, \quad 4, \quad 3/2, \quad 2/3, \quad 1/4, \ldots$$

El procedimiento de la matriz constituye un método general para enumerar los *pares ordenados de miembros de un conjunto enumerable*, v. g., los pares ordenados de números naturales, o los pares ordenados de enteros. Las filas de la matriz son las enumeraciones de los pares con el primer miembro del par fijo. Los *triplos ordenados de miembros de un conjunto enumerable* pueden ser entonces enumerados mediante otra aplicación de la matriz, tomando como filas las enumeraciones ya logradas de los triplos con el primer miembro del triplo fijo. Sucesivamente, podemos lograr enumeraciones de los *n-tuplos ordenados de miembros de un conjunto enumerable* para cada entero positivo fijo $n$. Todas estas enumeraciones, incluyendo la enumeración del conjunto original, pueden ser tomadas como filas de una nueva matriz al objeto de obtener una enumeración de los $n$-tuplos ordenados para $n$ variable, esto es, la *secuencia finita de miembros de un conjunto enumerable.*

Puede aplicarse este resultado para obtener una enumeración de las *ecuaciones algebraicas*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

*con coeficientes enteros*, puesto que cada ecuación puede ser descrita dando la secuencia

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

de sus coeficientes. Un 'número algebraico (real)' es una raíz real de una ecuación de esta suerte. Puesto que una ecuación dada tiene a lo sumo $n$ raíces diferentes, los *números algebraicos* son enumerables.

Otro procedimiento ilustrará las posibilidades de enumeración de conjuntos. Cuando se trata de un conjunto enumerable (finito o infinito), los números que corresponden a los miembros en alguna enumeración especificada pueden ser utilizados para designar o nombrar a los miembros individualmente. Pero recíprocamente, si un nombre o expresión explícita puede ser asignado a cada uno de los miembros de un conjunto individualmente, conforme a un sistema de notación preasignado y no ambiguo, el conjunto es enumerable (finito o infinito). Estipulamos que un nombre o expresión será una secuencia finita de símbolos extraídos de un alfabeto finito dado de símbolos disponibles. Por ejemplo, las ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros pueden ser escritas utilizando notación decimal para los coeficientes y exponentes. Los exponentes que surjan son un aspecto inesencial de la notación, que puede ser removido mediante una convención adecuada. Pues, mientras nos ocupemos tan sólo de estas ecuaciones, podemos simplemente escribirlos en hilera. Los símbolos requeridos son así, precisamente,

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad x, \quad +, \quad -, \quad =.$$

El primer símbolo en una ecuación no es un 0. Reinterprétense estos símbolos como los dígitos (!) de un sistema numérico cuatuordecimal, esto es, de un sistema numérico basado en 14 del mismo modo que el sistema decimal está basado en 10. Toda ecuación resulta ser un número natural (siendo ecuaciones distintas números distintos). Enumérense las ecuaciones en el orden de magnitud de estos números.

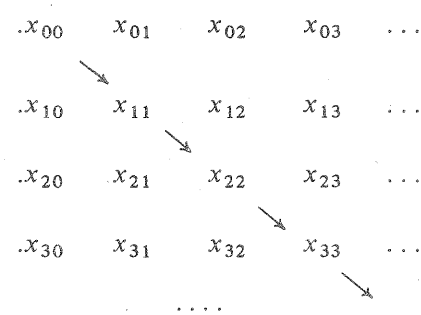
§ 2. **El método de la diagonal de Cantor.** Que hay infinitos conjuntos, considerados en la matemática, que no pueden ser enumerados fue mostrado por el famoso 'método de la diagonal' de Cantor. El conjunto de los *números reales* es no-enumerable.

Consideremos en primer lugar los *números reales x en el intervalo* $0 < x \leqslant 1$. Cada número real en este intervalo está representado de modo único por una fracción decimal no-terminativa propia, es decir, una fracción decimal, que tiene su primer dígito significativo a la derecha del punto decimal, y que tiene un número infinito de dígitos que no son 0. Un número puede tener una fracción decimal terminativa, esto es, una fracción con repetidos 0, pero tal fracción es reemplazable por una fracción no-terminativa con repetidos 9. Por ejemplo .483 ó .483000... puede ser reemplazado por .482999... . Recíprocamente, toda fracción decimal no-terminativa propia representa un número real único en el intervalo.

Supóngase ahora que

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

es una lista infinita o enumeración de algunos pero no necesariamente todos los números reales que pertenecen al intervalo. Escríbanse una debajo de otra sus respectivas fracciones decimales no-terminativas,



Selecciónese la fracción diagonal mostrada por las flechas. Cámbiese en ella cada uno de los sucesivos dígitos $x_{nn}$ por un dígito diferente $x'_{nn}$, evitando producir una fracción terminativa. Sea, digamos, $x'_{nn} = 5$ si $x_{nn} \neq 5$, y $x'_{nn} = 6$ si $x_{nn} = 5$. La fracción resultante

$$.x'_{00}\ x'_{11}\ x'_{22}\ x'_{33}\ \ldots$$

representa un número real $x$ que pertenece al intervalo pero no a la enumeración. Porque dicha fracción difiere de la primera de las fracciones dadas en el lugar de las décimas, de la segunda en el lugar de las centésimas, de la tercera en el lugar de las milésimas, y así sucesivamente.

Por tanto, la enumeración dada no es una enumeración de todos los números reales en el intervalo. Una enumeración de todos los números reales en el intervalo no existe.

Para aplicar el método de la diagonal a los números reales sin restringirse al intervalo $0 < x \leqslant 1$, sólo es necesario representar a los números reales en la forma característica-más-mantisa, p. ej. $37.142... = 37 + .142$, $-2.813... = -3 + .186...$, y aplicar el método a las mantisas.

Es claro que ha sido revelada una esencial diferencia entre el conjunto de los números racionales o el conjunto de los números algebraicos por una parte, y el conjunto de los números reales por otra.

Tiene interés histórico señalar cómo los descubrimientos de Cantor en 1874 (véase la bibliografía) iluminaron un descubrimiento anterior de Liouville en 1844. Liouville había logrado construir, por un método especial, ciertos números reales trascendentales (esto es, no algebraicos). El método de la diagonal de Cantor pone de manifiesto la existencia de números trascendentales partiendo tan sólo de las muy generales consideraciones más arriba aducidas. De hecho, para cualquier enumeración dada $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ de los números algebraicos, pueden ser obtenidos números trascendentales particulares por el método de la diagonal.

Los *números trascendentales* (reales) no son enumerables. Porque si lo fueran, al igual que los números algebraicos, cabría combinar enumeraciones de los dos conjuntos para producir una enumeración de todos los números reales. Así, en un sentido, la mayoría de los números reales son trascendentales.

Otro ejemplo de conjunto no-enumerable es el conjunto de las funciones (univalentes) para las cuales tanto la variable independiente como la dependiente tienen cada una por rango un conjunto enumerable. A efectos de precisión, considérese el conjunto de las *funciones de un número natural que toman como valor a un número natural* (o *secuencias infinitas de números naturales*). Supóngase dada una enumeración de algunas de ellas, aunque no necesariamente de todas,

$$f_0(n),\quad f_1(n),\quad f_2(n),\quad f_3(n),\ldots.$$

Escríbanse las secuencias de los valores de las sucesivas funciones una debajo de otra, como filas de una matriz infinita,

$$\begin{array}{llllll} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \ldots \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \ldots \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \ldots \\ f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & \ldots \\ \ldots & & & & \end{array}$$

Tómese la secuencia de valores dada por la diagonal. Cámbiese cada uno de esos valores por un valor diferente, digamos, añadiendo 1. La función $f(n)$, con la secuencia de valores resultante, que podemos escribir

$$f(n)=f_n(n)+1,$$

no puede pertenecer a la enumeración, puesto que difiere de la primera de las funciones enumeradas en el valor tomado para 0, de la segunda, en el valor tomado para 1, y así sucesivamente.

Por dar al argumento una forma diferente, supóngase que la función $f(n)$ estuviese en la enumeración; es decir, supóngase que para algún número natural $q$,

$$f(n)=f_q(n)$$

para todo número natural $n$. Sustituyendo la variable $n$ por el número $q$ en esta ecuación y en la precedente,

$$f(q)=f_q(q)=f_q(q)+1.$$

Lo cual es imposible, puesto que el número natural $f_q(q)$ no puede ser igual a sí mismo incrementado en 1.

Aún otro ejemplo de conjunto no-enumerable es el conjunto de los *conjuntos de números naturales.* (Pero el conjunto de los conjuntos finitos de números naturales es enumerable. ¿Por qué? ). Podemos representar a un conjunto de números naturales por medio de una *función representante* que tome el valor 0 para un número natural que pertenezca al conjunto, y el valor 1 para un número natural que no pertenezca al conjunto. La secuencia de los valores de la función representante de un conjunto de números naturales es una secuencia infinita de 0 y 1. Por ejemplo, la secuencia para un conjunto que contenga 0, 2 y 3, pero no 1 y 4, comienza 01001.... Estas secuencias se toman como filas de una matriz infinita. La alteración llevada a cabo en la digonal consiste en el intercambio de 0 y 1.

¿Pueden estos diferentes conjuntos no-enumerables ser puestos entre sí en correspondencia de 1-1? ¿Hay aún otros tipos de conjuntos infinitos? El lector puede sacar provecho intentando responder a estas cuestiones por sí mismo (a ellas se responde en § 5). Ahora nos ocuparemos de la formulación general de la teoría de Cantor.

§ 3. **Número cardinal.** La teoría de Cantor de los 'conjuntos abstractos' trata de los conjuntos en general. (El mismo autor desarrolló también una teoría de 'conjuntos de puntos'). Cantor describe sus términos *conjunto* y *elemento* como sigue. "Por un 'conjunto' entendemos cualquier colección $M$ de objetos determinados y bien distintos $m$ de nuestra percepción o nuestro pensamiento (que se denominan los 'elementos' de $M$), reunidos en un todo" (1895 p. 481).

Los conjuntos incluyen el conjunto *vacío* o *nulo* o *vacuo* que no tiene elementos, y los conjuntos *unidad*, cada uno de los cuales tiene un único elemento. Al conjunto vacío lo representamos por O; al conjunto unidad, cuyo solo elemento es $a$, por $\{a\}$; y al conjunto cuyos elementos sean $a, b, c, \ldots$, por $\{a, b, c, \ldots\}$.

Un conjunto puede ser denominado también un *agregado* o *colección* o *clase* o *dominio* o *totalidad*. Que $a$ es un elemento de $M$ puede expresarse también diciendo que $a$ es un miembro de $M$ o *pertenece* a $M$ o está en $M$, o en símbolos $a \in M$. Si $a$ no es un elemento de $M$, se escribe simbólicamente $a \notin M$.

Entendemos que dos conjuntos $M$ y $N$ son lo mismo (en símbolos, $M = N$), si tienen los mismos elementos; esto es, cuando para todo objeto $a$, $a \in M$ si y sólo si $a \in N$.

Se dice que dos conjuntos $M$ y $N$ son *equivalentes* (en símbolos, $M \sim N$), si existe entre ellos una correspondencia de 1-1 (§ 1). (A veces hablamos de "la correspondencia $M \sim N$" para referirnos a una particular correspondencia de 1-1 entre $M$ y $N$, que ha de existir si $M \sim N$).

La relación $M \sim N$ posee, evidentemente, las propiedades 'reflexiva', 'simétrica' y 'transitiva', esto es, para cualesquiera conjuntos $M$, $N$ y $P$: $M \sim M$. Si $M \sim N$, entonces $N \sim M$. Si $M \sim N$ y $N \sim P$, entonces $M \sim P$.

El *número cardinal* de un conjunto $M$ es introducido como un objeto $\overline{\overline{M}}$ que se asocia en común con todos y sólo aquellos conjuntos (incluyendo al mismo $M$) que son equivalentes a $M$. Por esta definición: $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, si y sólo si $M \sim N$.

Qué sean más allá de ello, los números cardinales, es acaso irrelevante. No obstante, podemos aducir varias interpretaciones. Cantor los describe así: "Al concepto general que, con ayuda de la actividad de nuestra inteligencia, resulta de un conjunto $M$ cuando abstraemos de la naturaleza de sus varios elementos y del orden en que éstos se dan, lo denominamos la 'potencia' o 'número cardinal' de $M$". Esta doble abstracción sugiere su notación "$\overline{\overline{M}}$" para el cardinal de $M$. Frege 1884 y Russell 1902 identifican al número cardinal $\overline{\overline{M}}$ con el conjunto de los conjuntos equivalentes a $M$; mientras von Neumann 1928 selecciona de cada uno de estos conjuntos de conjuntos ('clases de equivalencia') un conjunto particular que sirva como cardinal de cualquier conjunto de la clase.

La noción de una 'parte' de una colección se introduce por la siguiente definición. Un conjunto $M_1$ es un *subconjunto* de un conjunto $M$ (en símbolos, $M_1 \subset M$), si cada elemento de $M_1$ es un elemento de $M$.

EJEMPLO 1. El conjunto $\{a, b, c\}$ de tres elementos $a, b, c$, tiene ocho $(= 2^3)$ subconjuntos: O, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Obsérvese que los subconjuntos de un conjunto $M$ incluyen al conjunto vacuo O y al mismo conjunto $M$. Este último es el subconjunto *impropio*, mientras los restantes subconjuntos son *propios*. Evidentemente, si $M_2 \subset M_1$ y $M_1 \subset M$ (abreviando $M_2 \subset M_1 \subset M$), entonces $M_2 \subset M$.

La *unión* o *suma* $M + N$ de dos conjuntos $M$ y $N$ es el conjunto de los objetos que pertenecen al menos a uno de ambos (es decir, que pertenecen a $M$ o a $N$); y su *intersección* o *producto* $M \cdot N$ es el conjunto de los objetos que pertenecen a ambos conjuntos $M$ y $N$ (esto es, que pertenecen a $M$ y a $N$). Similarmente para más de dos conjuntos. La *diferencia* $M - N$ de $M$ y $N$ (cuando $N \subset M$, asimismo llamada el *complemento* de $N$ con respecto a $M$) es el conjunto de los objetos que pertenecen a $M$ pero no a $N$.

EJEMPLO 2. $\{a, b, c\} + \{b, d\} = \{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c\} \cdot \{b, d\} = \{b\}$, $\{a, b, c\} - \{b, d\} = \{a, b, c\} - \{b\} = \{a, c\}$.

Evidentemente $M - M_1 \subset M$; y si $M_1 \subset M$, entonces (y sólo entonces) $M_1 + (M - M_1) = M$. Dos conjuntos $M$ y $N$ son *disjuntos* si no tienen elementos comunes, esto es, si $M \cdot N = 0$. Así por ejemplo, $M_1$ y $M - M_1$ son conjuntos disjuntos. Si $M$ y $N$ son disjuntos, o $M \neq N$ o $M = N = 0$.

Consideramos ahora la importante cuestión de comparar números cardinales. Dados dos conjuntos $M$ y $N$, puede ser o no posible el poner en correspondencia de 1-1 al conjunto $M$ con algún subconjunto $N_1$ de $N$. Y viceversa, puede existir o no un subconjunto $M_1$ de $M$ que sea equivalente a $N$. Combinando estos dos pares de alternativas resultan cuatro casos, exactamente uno de los cuales ha de aplicarse a cualquier par dado de conjuntos $M$ y $N$:

(1a) Para algún $N_1$, $M \sim N_1 \subset N$; pero para ningún $M_1$, $N \sim M_1 \subset M$.
(1b) Para ningún $N_1$, $M \sim N_1 \subset N$; pero para algún $M_1$, $N \sim M_1 \subset M$.
(2) Para algún $N_1$, $M \sim N_1 \subset N$; y para algún $M_1$, $N \sim M_1 \subset M$.
(3) Para ningún $N_1$, $M \sim N_1 \subset N$; y para ningún $M_1$, $N \sim M_1 \subset M$.

En el Caso (1a), se dice que el cardinal de $M$ es *menor* que el cardinal de $N$ (en símbolos, $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$). Para justificar la consideración de $<$ como una relación entre los cardinales $M$ y $N$, y no meramente como una relación entre los conjuntos $\overline{\overline{M}}$ y $\overline{\overline{N}}$, hemos de observar que si $M' \sim M$ y $N' \sim N$, entonces el Caso (1a) se aplica al par de conjuntos $M'$, $N'$ si y sólo si se aplica al par $M, N$.

La relación de orden para cardinales es transitiva, esto es, para cualesquiera tres cardinales $\overline{M}, \overline{N}, \overline{P}$: Si $\overline{M} < \overline{N}$ y $\overline{N} < \overline{P}$, entonces $\overline{M} < \overline{P}$.

Definimos a $\overline{M}$ como $> \overline{N}$, si $\overline{N} < \overline{M}$. Luego $\overline{M} > \overline{N}$ exactamente en el Caso (1b). La relación $\overline{M} = \overline{N}$, es decir, $M \sim N$, cae evidentemente bajo el Caso (2) tomando como $N_1$ y $M_1$ a los subconjuntos impropios. Por tanto, para cualesquiera dos cardinales $\overline{M}$ y $\overline{N}$, las tres relaciones $\overline{M} < \overline{N}$, $\overline{M} = \overline{N}$ y $\overline{M} > \overline{N}$ son 'mutuamente exclusivas', esto es, no puede valer más de una de ellas.

Si estas tres relaciones son 'exhaustivas', es decir, si al menos ha de valer una de las tres, es algo que no aparece hasta un estadio más avanzado de la teoría (véanse referencias en § 5). La situación es parcialmente aclarada por el siguiente teorema, tras el cual resta tan sólo la cuestión de si puede surgir el Caso (3).

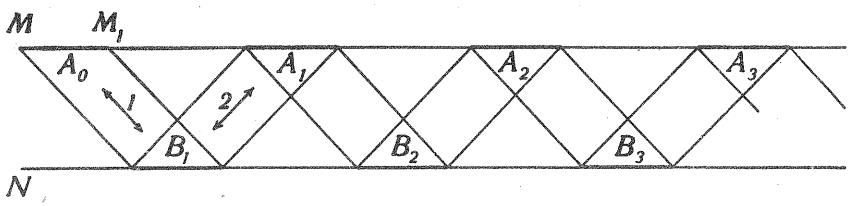
* **§ 4. El teorema de equivalencia, conjuntos finitos e infinitos.** TEOREMA A. *Si* $M \sim N_1 \subset N$ y $N \sim M_1 \subset M$, *entonces* $M \sim N$. En otras palabras: *En el caso* (2) *de* § 3, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ (F. Bernstein 1898).

DEMOSTRACION. Por las hipótesis, podemos suponer dada una particular correspondencia de 1-1 $M \overset{1}{\sim} N_1$ entre $M$ y el subconjunto $N_1$ de $N$; y de modo similar, $N \overset{2}{\sim} M_1$. Nuestro problema consiste en hallar una tercera correspondencia de $1-1$ $M \overset{3}{\sim} N$.

Sea $A_0 = M - M_1$. En la correspondencia dada $M \overset{1}{\sim} N_1$, los elementos del subconjunto $A_0$ de $M$ corresponderán a elementos que forman un subconjunto $B_1$ de $N_1$ (y por tanto de $N$), o en símbolos $A_0 \overset{1}{\sim} B_1$. Entonces, en la otra correspondencia dada $N \overset{2}{\sim} M_1$, los elementos del subconjunto $B_1$ de $N$ corresponderán a elementos que forman un subconjunto $A_1$ de $M_1$ (y por tanto de $M$), o en símbolos $B_1 \overset{2}{\sim} A_1$; y así sucesivamente. De este modo

$$A_0 \overset{1}{\sim} B_1 \overset{2}{\sim} A_1 \overset{1}{\sim} B_2 \overset{2}{\sim} A_2 \overset{1}{\sim} B_3 \overset{2}{\sim} A_3 \overset{1}{\sim} \ldots$$

La situación puede plasmarse imaginando que M y N son espejos en los que la parte $A_0$ de $M$ que excede $M_1$ es reflejada una y otra vez produciendo una sucesión infinita de imágenes $A_1, A_2, A_3, \ldots$ en $M$ y $B_1, B_2, B_3, \ldots$ en $N$, tal como se muestra en la figura. (Los conjuntos $M$, $M_1$ y $N$ están representados por las partes de las




líneas horizontales a la derecha de las etiquetas "$M$", "$M_1$" y "$N$"; los conjuntos $A_0, B_1, A_1, \ldots$ por los segmentos interceptados).

Sea $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$; es decir, $A$ es el subconjunto de $M$ que contiene los elementos que caen en $A_0$ o en cualquiera de sus imágenes $A_1, A_2, A_3 \ldots$ en $M$. Sea asimismo $B = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots$; es decir, $B$ es el subconjunto de $N$ que contiene los elementos que caen en cualquiera de las imágenes $B_1, B_2, B_3, \ldots$ de $A_0$ en $N$.

A fin de obtener la correspondencia de 1-1 $M \overset{3}{\sim} N$, establecemos una regla que determine para cada elemento $m$ de $M$ un correspondiente elemento $n$ de $N$, y demuestre que la correspondencia resultante lo es de 1-1 entre $M$ y $N$.

REGLA. Considérese cualquier elemento $m$ de $M$. O bien $m$ pertenece al subconjunto $A$, o $m$ no pertenece a $A$, es decir, $m$ pertenece a $M - A$. Si $m$ pertenece a $A$, el correspondiente elemento $n$ de $N$ será aquél que corresponda a $m$ en la correspondencia $M \overset{1}{\sim} N_1$. Si $m$ pertenece a $M - A$ (en cuyo caso $m$ pertenece a $M_1$), el correspondiente elemento $n$ de $N$ será aquel al que corresponda $m$ en la correspondencia $N \overset{2}{\sim} M_1$.

La correspondencia resultante es de 1-1 entre $M$ y $N$, porque:

(a) A diferentes elementos $m$ de $M$, digamos $m_1$ y $m_2$, corresponden diferentes elementos $n_1$ y $n_2$ de $N$. Ello es claro cuando $m_1$ y $m_2$ pertenecen ambos a $A$ o ambos a $M - A$. Pero es también así cuando $m_1 \in A$ y $m_2 \in M - A$, puesto que entonces $n_1 \in B$ y $n_2 \in N - B$.

(b) Cada elemento de $N$ corresponde a algún elemento $m$ de $M$. A saber, los

elementos de $B$ corresponden todos a elementos en $A$, y los elementos de $N - B$ corresponden todos a elementos en $M - A$.

El método de obtención de la correspondencia de 1-1 entre $M$ y $N$, puede ser plásticamente visualizado haciendo que, en la figura anterior, cada una de las partes $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ de $M$, se desplace una posición a la derecha, de suerte que $A_0$ tome el lugar de $A_1$, $A_1$ el de $A_2$, $A_2$ el de $A_3, \ldots$. Con ello $N \overset{2}{\sim} M_1$ se cambia en $N \overset{3}{\sim} M$.

COROLARIO A. *Si* $M \subset N$, *entonces* $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{N}}$.

($\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{N}}$ significa: $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ o $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$). Porque si $M \subset N$, entonces se aplica o bien el Caso (1a) o bien el Caso (2), siendo $M$ el $N_1$.

Al número cardinal del conjunto vacío O lo llamamos 0. (ADVERTENCIA: $M' \sim$ O sólo si $M' =$ O). Al número cardinal de cualquier conjunto $N + \{a\}$ donde $a \notin N$ lo llamamos $\overline{\overline{N}} + 1$. (ADVERTENCIA: $M' \sim N + \{a\}$ donde $a \notin N$, si y sólo si $M' = N' + \{a'\}$ donde $a' \notin N'$ y $N' \sim N$).

Si consideramos a los números naturales 0, 1, 2, ..., $n$, $n + 1$, ... como una secuencia de objetos que ya conocemos, las dos definiciones recién establecidas correlacionan con cada número natural $n$ un respectivo número cardinal que escribimos también $n$. A estos cardinales los llamamos *cardinales finitos*, y a los conjuntos que tienen tales cardinales, *conjuntos finitos*. Las dos proposiciones siguientes serán demostradas en el Ejemplo 1 § 7.

(1) *Para cada número natural n, el cardinal finito n es el cardinal del conjunto de los números naturales que precede al número natural n en el orden usual de los números naturales; o en símbolos,* $n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$.

(2) *Si* $\overline{\overline{M}} = n$ (*para un número natural n*) *y* $M \sim M_1 \subset M$, *entonces* $M_1 = M$. Así: *Un conjunto finito no es equivalente a ningún subconjunto propio de sí mismo.*

Partiendo de estas dos proposiciones no es difícil mostrar que la relación de igualdad $m = n$ y la relación de orden $m < n$, tal y como se determinaron para cardinales finitos por las definiciones de § 3, concuerdan con las familiares relaciones de igualdad y de orden para los números naturales (en particular, tenemos $n < n + 1$ para cardinales finitos). De este modo, no resultará confusión alguna por identificar a los números naturales con los cardinales finitos cuando decidamos hacerlo así.

A un conjunto que no es finito lo llamamos *infinito*, y a su cardinal, un *cardinal infinito* o *transfinito*. Al número cardinal del conjunto de los números naturales, y por tanto de todo conjunto enumerablemente infinito (§ 1), lo llamamos $\aleph_0$ (léase "alef cero").

COROLARIO B. *Si* $n$ *es un cardinal finito,* $n < \aleph_0$.

DEMOSTRACION. Dado que $n$ es el cardinal del subconjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ de los números naturales, por el Corolario A, $n \leq \aleph_0$. Supóngase, contrariamente al Corolario, que $n = \aleph_0$. Pero $n + 1$ es asimismo un cardinal finito, y también similarmente $n + 1 \leq \aleph_0$, que con $n = \aleph_0$ da $n + 1 \leq n$, contradiciendo $n < n + 1$. Por tanto, la suposición $n = \aleph_0$ es insostenible y queda establecida la restante alternativa $n < \aleph_0$.

TEOREMA B. *Un conjunto infinito M tiene un subconjunto enumerablemente infinito.*

DEMOSTRACION. $M$ no es vacío, puesto que de otro modo tendría el cardinal finito 0. Así $M$ tiene un elemento $a_0$. Entonces $M - \{a_0\}$ no es vacío, puesto que de otro modo $M$ tendría el cardinal finito 1. Así $M$ tiene otro elemento $a_1$. Continuando de este modo, seleccionamos distintos elementos $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ correspondientes a los números naturales 0, 1, 2, 3, ..., lo cual demuestra el teorema. Si $P$ es el conjunto $M - \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ de elementos de $M$ no seleccionados,

$$M = P + \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\} .$$

COROLARIO A. *Si $\overline{\overline{M}}$ es un cardinal infinito, entonces $\aleph_0 \leq M$.*

Por el teorema junto con el Corolario A del Teorema A.

COROLARIO B. *Un conjunto infinito M es equivalente a un subconjunto propio de sí mismo.*

Porque $M$ (expresado como anteriormente) es equivalente a su subconjunto propio

$$M - \{a_0\} = P + \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\} .$$

Lo anterior, junto con (2) más arriba, fue propuesto por Dedekind 1888 como una definición alternativa de la distinción entre conjuntos finitos e infinitos. (Vemos que la propiedad observada en la "paradoja" de Galileo es característica de conjuntos infinitos).

COROLARIO C. *El número cardinal de un conjunto infinito M no se altera por la introducción de un conjunto de elementos finito o enumerablemente infinito.*

Porque cabe introducir nuevos elementos $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ así,

$$M + \{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\} = P + \{a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots\} .$$

Recíprocamente, el corolario dice que si removemos de un conjunto un conjunto enumerable de elementos su cardinal no cambia, supuesto que el conjunto resultante $M$ sea infinito. Si el conjunto original es no-enumerable. el conjunto resultante ha de ser infinito, pues de otro modo se daría una obvia enumeración del conjunto original. Así:

COROLARIO D. *El número cardinal de un conjunto no-enumerable no se altera por la remoción de un conjunto de elementos finito o enumerablemente infinito.*

* § 5. **Cardinales transfinitos superiores.** El primero de los teoremas de esta sección es una formulación en términos generales de la situación afrontada en el último ejemplo de § 2. El lector puede hallar asimismo instructivo experimentar con el teorema o con su lema para el caso de que $M$ sea un conjunto finito pequeño. El segundo de los teoremas es una generalización de la situación con la que nos encontramos en el Corolario B del Teorema A.

Nos valemos del teorema de equivalencia, mediante su Corolario A, para simplificar la presentación de las demostraciones. Los teoremas, empero, pueden ser demostrados, con sólo ligeras modificaciones argumentales, sin el uso del teorema de equivalencia.

LEMA A. *Si* S *es un conjunto de subconjuntos de M, y* $M \sim$ S, *entonces hay un subconjunto T de M que no pertenece a* S.

DEMOSTRACION, por el método de la diagonal de Cantor. Un subconjunto de $M$ está definido cuando se ha determinado qué elementos de $M$ pertenecen a ese subconjunto. Ello puede disponerse estableciendo un criterio general que, para cualquier elemento $m$ de $M$, determine si ese elemento pertenece o no pertenece al subconjunto. Damos ahora un criterio de esta suerte para definir $T$.

CRITERIO. En la correspondencia de 1-1 dada por la hipótesis $M \sim$ S, cualquier elemento $m$ de $M$ corresponde a un elemento $S$ de S. Pero $S$ es uno de los subconjuntos de $M$. Por tanto o $m$ pertenece a $S$, o $m$ no pertenece a $S$. Si $m$ pertenece a $S$, entonces $m$ no pertenecerá a $T$. Si $m$ no pertenece a $S$, entonces $m$ pertenecerá a $T$.

Supóngase ahora, contrariamente a lo que hay que mostrar, que $T$ pertenece a S. Selecciónese aquel elemento de $M$, llamémosle $m_1$, que corresponda a $T$ en la correspondencia de 1-1 $M \sim$ S.

¿Pertenece $m_1$ a $T$? Aplicamos el criterio, con $m_1$ en el lugar de $m$. Puesto que $m_1$ corresponde a $T$, el $S$ del criterio es ahora $T$. El criterio da lugar a una contradicción, tanto si $m_1$ pertenece a $T$ como si $m_1$ no pertenece a $T$.

La suposición de que $T$ pertenece a S conduce así al absurdo. De ahí, por el método de *reductio ad absurdum* (en el que se demuestra la negación de una proposición deduciendo una contradicción de esa proposición), concluimos que $T$ no pertenece a S.

Si $M$ es un conjunto dado, entonces el conjunto de los subconjuntos de $M$, es decir, el conjunto cuyos elementos son (todos) los subconjuntos de $M$, es designado por $\mathfrak{U}M$ ("$\mathfrak{U}$" del alemán "Untermenge").

TEOREMA C. *Para cualquier conjunto* $M$, $\overline{M} < \overline{\mathfrak{U}M}$. (Teorema de Cantor).

DEMOSTRACION. Si $N_1$ es el conjunto de los subconjuntos unidad de $M$, entonces $M \sim N_1 \subset \mathfrak{U}M$. De donde, por el Corolario A del Teorema A, $\overline{M} = \overline{N}_1 \leq \overline{\mathfrak{U}M}$. Supóngase, contrariamente al teorema, que $\overline{M} = \overline{\mathfrak{U}M}$, esto es, $M \sim \mathfrak{U}M$. Entonces $\mathfrak{U}M$ satisfaría las condiciones de S en el lema. Por el lema, habría un subconjunto $T$ de $M$ que no perteneciese a $\mathfrak{U}M$. Lo cual es absurdo, puesto que $\mathfrak{U}M$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $M$. Por lo tanto ha de valer la restante alternativa $\overline{M} < \overline{\mathfrak{U}M}$.

Si tomamos como el $M$ del teorema un conjunto con el cardinal transfinito $\aleph_0$, descubrimos conjuntos $\mathfrak{U}M$, $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$, ... que tienen cardinales transfinitos cada vez mayores. Estos nuevos cardinales son denotados por $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ... (De hecho, para cualquier conjunto $M$, el cardinal de $\mathfrak{U}M$ es denotado por $2^{\overline{M}}$. Obsérvese que ello está de acuerdo con la aritmética usual cuando $M$ es finito).

LEMA B. *Si* $S$ *es un conjunto, y* M *es un conjunto de subconjuntos de* $S$, *y para cada miembro* $M$ *de* M *hay otro miembro* $M'$ *de* M *tal que* $\overline{M} < \overline{M}'$, *entonces* $\overline{M} < \overline{S}$ *para todo miembro* $M$ *de* M.

DEMOSTRACION. Puesto que $M \subset S$, por el Corolario A del Teorema A, $\overline{\overline{M}} \leq \overline{\overline{S}}$. Supóngase, contrariamente al lema, que $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{S}}$. Pero similarmente, $\overline{\overline{M}}' \leq \overline{\overline{S}}$, que con $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{S}}$ da $\overline{\overline{M}}' \leq \overline{\overline{M}}$, contradice $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M}}'$. Por tanto, la suposición $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{S}}$ es falsa, y la alternativa $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{S}}$ es válida.

Si M es un conjunto cuyos miembros son conjuntos, entonces el conjunto de (todos) los objetos cada uno de los cuales pertenece a algún miembro $M$ de M, es llamado la *suma* de los conjuntos pertenecientes a M y es designado por $\mathfrak{S}$M. El conjunto de los objetos cada uno de los cuales pertenece a todo miembro $M$ de M, es llamado la *intersección* o *producto* de los conjuntos pertenecientes a M y es designado por $\mathfrak{D}$M ("$\mathfrak{D}$" del alemán "Durchschnitt"). Estas nociones son las mismas que las introducidas en § 3, salvo que ahora se expresan como operaciones sobre el el conjunto M de los conjuntos $M$ que son sumados o multiplicados. Por ejemplo, $M + N = \mathfrak{S}\{M, N\}$, $M \cdot N = \mathfrak{D}\{M, N\}$.

TEOREMA D. *Si* M *es un conjunto de conjuntos, y si para cada miembro* $M$ *de* M *hay otro miembro* $M'$ *de* M *tal que* $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M}}'$, *entonces* $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}M}}$ *para todo miembro* $M$ *de* M.

DEMOSTRACION. Según la definición de $\mathfrak{S}$M, todo elemento $M$ de M es un subconjunto de $\mathfrak{S}$M. El teorema se sigue ahora del lema, con $\mathfrak{S}$M en el lugar del $S$ del lema.

Por este teorema, la suma de los conjuntos $M$, $\mathfrak{U}M$, $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$, ... que tienen los crecientes cardinales transfinitos $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ... es un conjunto que tiene un cardinal transfinito todavía mayor que cualquiera de esos cardinales. Este conjunto puede ser utilizado por el Teorema C para comenzar una nueva serie ascendente. Esta jerarquía se extiende indefinidamente.

Más sobre la teoría cantoriana de conjuntos abstractos se encontrará, por ejemplo, en Cantor 1895-7, Hausdorff 1914 ó 1927, o Fraenkel 1928 ó 1952. Hay una rama gemela de la teoría que trata de "números cardinales". El "teorema de comparabilidad de números cardinales", que afirma que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ y $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{N}}$ son exhaustivas (final de § 3), aparece como un corolario del "teorema de buena-ordenación" de Zermelo 1904 (cfr. p. ej., Hausdorff 1914 ó 1927 pág. 61, o Fraenkel 1928 pág. 205). Para una breve exposición del celebrado "problema del continuo", referente a la cuestión de si algún cardinal está situado entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$, véase Gödel 1947.

Hemos comenzado con la teoría de Cantor por dos razones harto diversas. Primero, porque algunas de las ideas y métodos que más tarde se comprobará que son básicos, aparecen en ella en su forma original y más simple. Segundo, porque la teoría revela, si se prosigue suficientemente su desarrollo, dificultades lógicas que son un punto de partida para nuestra principal investigación. Ello se hará manifiesto en el Capítulo III.

EJEMPLOS. CONJUNTOS DE CARDINAL $2^{\aleph_0}$. Este es el cardinal asignado al conjunto de los subconjuntos del conjunto de los números naturales, el cual fue descrito en § 2 como el conjunto de los *conjuntos de números naturales*. Allí representamos a los elementos del conjunto por *secuencias infinitas* de 0 y 1. Los 0 y los 1 pueden ser interpretados como los dígitos de un sistema numérico dual (o diádico), esto es, un sistema numérico basado en 2 tal como el sistema decimal está basado

en 10, de suerte que tengamos el conjunto de las *fracciones duales propias*. Utilizando el Corolario D del Teorema B para suprimir las fracciones terminativas, que son enumerables, obtenemos las *fracciones duales propias no-terminativas.* Estas fracciones representan 1-1 los *números reales x en el intervalo* $0 < x \leq 1$. Partiendo de las fracciones duales propias no-terminativas obtenemos también 1-1 las *secuencias infinitas de números naturales* o *funciones de un número natural que toman como valor un número natural*, coordinando con una fracción aquella función $f(n)$ para la cual $f(0)$ = al número de 0's que preceden al primer 1 en la fracción, $f(1)$ = al número de 0's que aparezcan entre el primer 1 y el segundo 1, y así sucesivamente (por ejemplo, la función $n^2$ corresponde a la fracción .101000010000000001...).

Omítase ahora del intervalo $0 < x \leqslant 1$, el número $x = 1$, y quedarán los *números reales x en el intervalo* $0 < x < 1$. Es fácil hallar una función $y = f(x)$ que, según vaya oscilando $x$ sobre este intervalo, toma cada vez por valor $y$ a exactamente uno de tales *números reales*, p. ej., la función $y = \cot \pi x$. Removiendo los números racionales, quedan los *números irracionales* (reales); mientras que removiendo los números algebraicos, quedan los *números trascendentales.* En la geometría coordenada cartesiana, los números reales se coordinan con los *puntos de la línea euclidiana real.* Este conjunto es el 'conjunto lineal', y, de acuerdo con ello, el cardinal $2^{\aleph_0}$ es la 'potencia del continuo'.

Podemos ahora proceder como sigue para obtener el conjunto de los *pares ordenados de números reales*, o considerando un par $(x, y)$ como coordenadas cartesianas en el plano, los *puntos del plano euclidiano real.* Conforme a la equivalencia ya obtenida entre los números reales y las secuencias infinitas de 0 y 1, cualesquiera dos números reales $x, y$ corresponden respectivamente a secuencias de 0 y 1

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ \ldots,$$
$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ \ldots,$$

que pueden ser combinadas en una única secuencia

$$x_0 \quad y_0 \quad x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \ \ldots,$$

correspondiente a un único número real. Recíprocamente, cualquier secuencia única se descompone en un determinado par de secuencias según este método de combinación. Un procedimiento similar da los *n-tuplos de números reales* o los *puntos de un espacio n-dimensional euclidiano real* para cualquier entero positivo fijo $n$, e incluso las *secuencias infinitas de números reales* o los *puntos de un espacio* $\aleph_0$*-dimensional euclidiano real.* A continuación se expone este último ejemplo utilizando el método de § 1 para combinar $\aleph_0$ secuencias de 0 y 1

$$\begin{array}{llllll}
x_{00} & x_{01} \rightarrow & x_{02} & x_{03} \rightarrow & \ldots \\
\downarrow \nearrow & \swarrow & \nearrow & & \\
x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots \\
\swarrow & \nearrow & & & \\
x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots \\
\downarrow \nearrow & & & & \\
x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

en una única secuencia

$$x_{00} \quad x_{10} \quad x_{01} \quad x_{02} \quad x_{11} \quad x_{20} \quad x_{30} \quad x_{21} \quad x_{12} \quad x_{03} \quad \ldots$$

en la que cada miembro de cada una de las secuencias dadas tiene una posición determinada.

Para cualquiera de las *funciones continuas reales de una variable* real, todos los valores de la función quedan determinados por la propiedad de continuidad tan pronto como se den valores de ámbito racional a la variable independiente. Tales valores pueden ser dados como una secuencia infinita de números reales, siguiendo el orden de los números racionales conforme a alguna enumeración fija de estos últimos. Por tanto, según el Corolario A del Teorema A, el conjunto de estas funciones tiene a lo sumo el cardinal $2^{\aleph_0}$. Pero también ha de tener al menos este cardinal, y por tanto exactamente este cardinal, puesto que las funciones constantes constituyen un subconjunto con dicho cardinal.

CONJUNTOS DE CARDINAL $2^{2^{\aleph_0}}$. Este es el cardinal de los *conjuntos de conjuntos de números naturales.* De la equivalencia entre los conjuntos de números naturales y los números reales o los puntos en el espacio $n$-dimensional o $\aleph_0$-dimensional, se sigue que los *conjuntos de números reales* y los *conjuntos de puntos en el espacio n-dimensional o $\aleph_0$-dimensional euclidiano real* tienen este cardinal. Las *funciones reales de una variable real* pueden ser representadas por sus grafos, que son conjuntos de puntos en el plano, y por tanto el conjunto de ellas tiene a lo sumo el cardinal $2^{2^{\aleph_0}}$. Y tiene exactamente este cardinal, puesto que aquéllas de las funciones que toman como valores solamente a 0 y 1, son las funciones representantes de los conjuntos de números reales, y constituyen así un subconjunto con ese cardinal. Si extendemos la terminología geométrica a este ejemplo, tenemos el conjunto de los *puntos del espacio $2^{\aleph_0}$-dimensional euclidiano real.*

CAPITULO II

# ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES

§ 6. **Los números naturales.** El propósito de este capítulo es reunir, en parte como término de referencia y en parte como objeto de más detenido examen, algunas de las ideas y métodos de la matemática.

Cuando escribimos la secuencia de números naturales

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots,$$

confiamos en los puntos "..." para sugerir la continuación de la secuencia más allá de los varios miembros mostrados.

Kronecker comentaba (1886), "Dios hizo los enteros, todo lo demás es obra del hombre". No podemos esperar que el conocimiento de la secuencia de los números naturales se deje reducir al conocimiento de cosa alguna que sea esencialmente más primitiva que dicha secuencia.

Pero investigando lo que comprende la concepción que de ella tenemos, podemos conseguir una mayor clarificación de las bases de nuestro razonar con los números naturales.

Empezamos por describir a los números naturales como aquellos objetos que pueden ser generados comenzando con un objeto inicial 0 (*cero*) y pasando sucesivamente de un objeto $n$ ya generado a otro objeto $n+1$ ó $n'$ (el *sucesor* de $n$).

Entendemos aquí que, por lejos que hayamos ido ya para alcanzar $n$, es posible dar un paso más para alcanzar $n'$. El uso del acento en la notación "$n'$", en lugar de la más familiar $n + 1$, pone de relieve que $'$ es una operación o función unaria primitiva utilizada en la generación de los números naturales, mientras que $+$ puede ser definida en un estadio ulterior como una operación o función binaria de dos números naturales.

Para obtener los números naturales con las notaciones usuales, resta sólo explicar que 0, 1, 2, 3, ... hacen las veces de

$$0, \quad 0', \quad 0'', \quad 0''', \ldots,$$

respectivamente. Esta es una materia de detalle concerniente a la notación decimal.

En la precedente descripción, hemos evocado el concepto de una sucesión de pasos discretos. Los cuales consisten en comenzar con 0, y proceder repetidamente de un número $n$ al siguiente $n'$. Dicha descripción puede ser descompuesta en varias cláusulas, como sigue.

1. 0 es un *número natural.* 2. Si $n$ es un *número natural*, entonces $n'$ es un *natural.* 3. Los únicos *números naturales* son los dados por 1 y 2.

En este formato, la sucesión de pasos discretos resulta ser una aplicación de la Cláusula 1 y una sucesión de aplicaciones de la Cláusula 2. Las tres cláusulas juntas constituyen un ejemplo de lo que llamamos una *definición inductiva.* El término ('número natural') que se está definiendo va en itálicas. Las cláusulas, excepto la última, que suministran instancias del término a definir, se denominan *cláusulas directas*; la última cláusula, que dice que las únicas instancias son las suministradas por las cláusulas precedentes, es la *cláusula extrema.*

En esta definición inductiva no queda establecida la condición de distintividad, a saber, que los números generados por aplicaciones de las Cláusulas 1 y 2 por distintos modos, habrían de ser objetos distintos. Ello puede ser estipulado, separadamente, en dos nuevas proposiciones.

4. Para cualesquiera números naturales $m$ y $n$, $m' = n'$ sólo si $m = n$. 5. Para cualquier número natural $n$, $n' \neq 0$.

Queda también sobreentendido que $'$ es un operador univalente o función de un solo valor, de suerte que recíprocamente en lo que respecta a 4: Para cualesquiera números naturales $m$ y $n$, $m' = n'$ si $m = n$.

Para ver que las Proposiciones 4 y 5 requieren la distintividad entre cada dos números generados de modo diferente, podemos razonar como sigue. Supóngase que en un estadio dado en la generación de los números, todos los números 0, 1, ... $n$ generados hasta el momento son distintos. Entonces el inmediatamente generado $n'$ ha de ser distinto de los sucesores 1, ..., $n$, entre aquéllos previamente generados por (4), y de 0 (por 5). Así, cada paso sucesivo en la generación produce un nuevo número.

Por ejemplo, $0'''' \neq 0''$, como puede verse también así. Aplicando 4 con $0'''$ en el lugar de $m$ y $0'$ *en el de* $n$, $0'''' = 0''$ sólo si $0''' = 0'$. Aplicando nuevamente 4, $0''' = 0'$ sólo si $0'' = 0$. Pero según 5 con $0'$ en el lugar de $n$, $0'' \neq 0$.

Estas cinco proposiciones 1-5, salvando una diferencia, fueron adoptadas por Peano (1889, 1891*) como axiomas caracterizadores de la secuencia de números naturales. Dicho autor estableció por su parte la Proposición 3 como el principio de inducción matemática (§ 7), y la colocó en el quinto lugar de su lista, correspondiendo entonces a 4 y 5 los lugares tercero y cuarto, respectivamente.

Lo que aquí estamos considerando no es qué sean intrínsecamente los números naturales, sino sólo cómo forman éstos la secuencia de números naturales. Un número natural particular va a ser reconocido como el objeto que ocupa un lugar particular en la secuencia. En otras palabras, un número particular está dado cuando se da su generación conforme a la definición inductiva. Por ejemplo, el número natural 4 es dado como aquel objeto que se obtiene partiendo con el objeto inicial 0 y aplicando la operación sucesor $'$ una vez, otra, otra y otra; o brevemente, 4 es dado como $0''''$. Un número tal como 872656 en notación decimal, podría ser exhibido en principio por aplicaciones de $'$ a 0, aunque en la práctica no lo hagamos.

Naturalmente cuando nos ocupamos de proposiciones tales como la que afirma que una cierta ecuación tiene dos raíces, hacemos uso además de la atribución de números naturales como números cardinales de conjuntos finitos (§ 4).

ORDEN. Los números naturales, según su definición inductiva, están generados en un cierto orden (el familiar). Así definimos $m$ como $< n$ si $m$ es generado antes que $n$ en el curso de la generación de $n$. Sometiendo a disección lo anterior, tenemos la siguiente definición inductiva de la relación $m < n$ (donde $m$, $n$ tienen por rango los números naturales).

O1. $m < m'$. O2. Si $m < n$, entonces $m < n'$. O3. $m < n$ sólo si se cumple lo requerido por O1 y O2.

Cuando esta definición es leída, para un $m$ fijo, como una definición inductiva de la clase de los números $n$ mayores que $m$, tiene la forma de la definición inductiva de los números naturales original, con $m$ reemplazando a 0.

§ 7. **Inducción matemática.** Sea $P$ una propiedad de los números naturales. Supóngase que:

(1) 0 tiene la propiedad $P$.

(2) Si cualquier número natural $n$ tiene la propiedad $P$, entonces su sucesor $n'$ tiene la propiedad $P$.

Entonces: Todo número natural $n$ tiene la propiedad $P$.

Este es el principio de *inducción matemática.* Podemos establecerlo de un modo algo más breve usando "$n$" como una variable de número natural y "$P(n)$" como una notación para la proposición según la cual $n$ tiene la propiedad $P$: Si (1) $P(0)$, y (2) para todo $n$, si $P(n)$ entonces $P(n')$, entonces, para todo $n$, $P(n)$.

La justificación del principio de inducción es casi inmediata cuando se concibe a los números naturales como los objetos generados conforme a la definición inductiva 1-3 de § 6. Supóngase que tenemos una propiedad $P$, respecto de la cual valen (1) y (2). ¿Ha de tener entonces todo número natural la propiedad $P$? Interpretamos una respuesta afirmativa como significando simplemente que, si nos fuese dado cualquier número natural $n$, podríamos estar seguros de que $n$ tiene la propiedad $P$. Pero un número natural $n$ es dado precisamente cuando (de hecho o en principio) se nos da su generación conforme a la definición inductiva, comenzando con 0 y aplicando la operación sucesor $'$ un número ostensible de veces. Bajo tales circunstancias, podemos usar (1) y (2) para concluir que $n$ tiene la propiedad $P$. Por ejemplo, $P(4)$ es válida porque 4 está dado como $0''''$; por (1), $P(0)$; de donde por (2), $P(0')$; de nuevo por (2), $P(0'')$; de nuevo por (2), $P(0''')$; y de nuevo por (2), $P(0'''')$.

Expresado de otro modo, (1) y (2) son instrumentos que nos capacitan, mientras generamos los números naturales por las Cláusulas 1 y 2 de la definición inductiva, para verificar al mismo tiempo, con respecto a cada número, a medida que lo generamos, que tiene la propiedad $P$.

Este razonamiento depende, sin duda, de la cláusula extrema 3 de la definición inductiva. Recíprocamente, el principio de inducción puede ser utilizado para demostrar la Cláusula 3, aplicándolo con la proposición siguiente en el lugar de $P(n)$: $n$ es dado como un número natural por las Cláusulas 1 y 2, esto es, $n$ puede ser generado comenzando con 0 y aplicando la operación sucesor $'$.

Con respecto a una demostración por inducción matemática, utilizamos la siguiente terminología. A la proposición $P(n)$ que depende de un número natural variable $n$, la llamamos la *proposición de inducción*; y a la variable $n$, la *variable de inducción* o *número de inducción* o la variable *sobre* la cual tiene lugar la inducción. A la parte de la demostración que consiste en establecer (1), esto es, a la demostración de que $P(0)$, la llamamos la *base* de la inducción. A la parte que consiste en establecer (2), esto es, a la demostración de que si $P(n)$ entonces $P(n')$, la llamamos el *paso de inducción.* Dentro del paso de inducción, a la suposición $P(n)$ a partir de la cual deducimos $P(n')$, la llamamos la *hipótesis de la inducción.*

A veces resulta necesario, para llevar a cabo el paso de inducción, suponer como hipótesis de la misma no simplemente $P(n)$, sino que $P(m)$ para todo $m \leqslant n$. El lector puede comprobar por sí mismo que el principio de inducción es válido en tal modificación, la cual se denomina *inducción de curso-de-valores.* La inducción puede ser aplicada a la demostración de una proposición que dependa de un entero positivo en lugar de un número natural, en cuyo caso la base consiste en demostrar $P(1)$.

El estudiante se encuentra con la inducción matemática en cursos de álgebra

elemental. A menudo se dan fórmulas de sumas de progresiones como ejemplos de proposiciones a demostrar por inducción, que no son obvias antes de que hayan tenido lugar las demostraciones. Muchas proposiciones, que comúnmente tomamos por garantizadas, dependen de la inducción cuando se las demuestra explícitamente; y en otros casos, el paso de inducción es tan simple que se lo deja de lado con la frase "y así sucesivamente", o alguna similar (p. ej., Teoremas A y B de § 4).

EJEMPLO 1. Demuéstrense las proposiciones (1) y (2) de § 4 por inducción sobre $n$. Lo hacemos aquí para (2), dejando (1) al lector. La proposición de inducción es: *Para cualesquiera conjuntos $M$ y $M_1$, si $\overline{\overline{M}} = n$ y $M \sim M_1 \subset M$, entonces $M_1 = M$.* BASE: $n = 0$. Sean $M$ y $M_1$ conjuntos tales que $\overline{\overline{M}} = 0$, esto es, $M = 0$, y $0 \sim M_1 \subset 0$. Entonces $M_1 = 0$. PASO DE INDUCCION. Supóngase que la proposición de inducción ha sido establecida (como hipótesis de la inducción). Sean ahora $M$ y $M_1$ conjuntos tales que $\overline{\overline{M}} = n + 1$, es decir, $M = N + \{a\}$, donde $\overline{\overline{N}} = n$ y $a \notin N$, y $N + \{a\} \sim M_1 \subset N + \{a\}$. Hemos de demostrar entonces que $M_1 = N + \{a\}$. En la correspondencia de 1-1 dada $N + \{a\} \sim M_1$, el elemento $a$ de $N + \{a\}$ corresponde a algún elemento $b$ de $M_1$. Entonces $N \sim M_1 - \{b\} \subset (N + \{a\}) - \{b\}$. Por otra parte, $(N + \{a\}) - \{b\} \sim N$. De donde $\overline{\overline{(N + \{a\}) - \{b\}}} = n$ y $(N + \{a\}) - \{b\} \sim M_1 - \{b\} \subset (N + \{a\}) - \{b\}$. Por la hipótesis de la inducción, aplicada utilizando en el lugar de $M$ a $(N + \{a\}) - \{b\}$, y en el lugar de $M_1$ a $M_1 - \{b\}$, $M_1 - \{b\} = (N + \{a\}) - \{b\}$. Por tanto (puesto que $b \in M_1$ y $b \in N + \{a\}$), $M_1 = N + \{a\}$.

EJEMPLO 2. En las fórmulas matemáticas, los paréntesis se introducen por pares a fin de mostrar de qué modo deban ser asociadas las partes de la fórmula. En casos complicados cabe emplear diferentes especies de paréntesis, tales como ( ), { }, [ ]; y los casos muy complicados pueden evitarse mediante varias abreviaturas. No obstante, existe en principio la cuestión de si, utilizando sólo una especie de paréntesis, la asociación de una fórmula queda fijada sin ambigüedad por los paréntesis de la misma. (La cuestión guarda equivalencia con el problema geométrico de involucración de intervalos).

Para un planteamiento preciso de la cuestión, supóngase que tenemos $2n$ paréntesis, siendo $n$ de ellos paréntesis izquierdos (, y $n$ de ellos paréntesis derechos ), y que ocurren en orden lineal de izquierda a derecha. Tal es el modo en que ocurrirían en una fórmula matemática, encontrándose los otros símbolos, que por el momento no es necesario tener en cuenta, intercalados entre los referidos paréntesis.

Decimos que dos pares de paréntesis *se interseparan*, si ocurren en el orden $(_i \ (_j \ )_i \ )_j$, donde las $i$ identifican un par y las $j$ el otro, pudiendo ocurrir otros paréntesis intercalados entre los cuatro mostrados.

Definimos como *propio* un emparejamiento de 1-1 de los $n$ paréntesis izquierdos con los $n$ paréntesis derechos (más brevemente, un emparejamiento de los $2n$ paréntesis), si un paréntesis izquierdo está siempre emparejado con un paréntesis derecho y situado a su derecha, y si no hay dos de los pares que se interseparen.

Es fácil advertir que si $2n$ paréntesis están propiamente emparejados, al quitar cualquiera de esos pares, los paréntesis restantes continúan estando propiamente emparejados. Asimismo, los paréntesis incluidos entre un par dado, en el emparejamiento propio de los $2n$ paréntesis, están propiamente emparejados.

Los tres lemas siguientes contienen la respuesta a la cuestión planteada y alguna informacion relacionada con ella.

LEMA 1. Un emparejamiento propio de $2n$ *paréntesis* ($n > 0$) *contiene un par máximamente interno, esto es, un par que no incluye dentro de sí a ninguno de los otros paréntesis.*

Demuéstrese mediante una inducción por curso-de-valores sobre $n$. Puede optarse entre considerar a $n$ o bien como un entero positivo, o bien como un número natural. Si se elige esto último, la base es *vacuamente verdadera*, es decir, verdadera porque su hipótesis no se satisface. (INDICACION: Bajo el paso de inducción, el paréntesis más a la izquierda será un paréntesis izquierdo $(_i$, y éste, en unión de su compañero $)_i$, o bien constituyen de por sí un par máximamente interno, o bien incluyen en otro caso, un conjunto de paréntesis situados entre ellos, y a los cuales puede ser aplicada la hipótesis de la inducción).

LEMA 2. *Un conjunto de* $2n$ *paréntesis admite a lo sumo un emparejamiento propio.*

Demuéstrese por una (simple) inducción sobre $n$. (INDICACION: Bajo el paso de inducción, por el Lema 1, los paréntesis dados contienen un par máximamente interno. Eliminando éste, la hipótesis de la inducción se aplica al conjunto de los paréntesis restantes).

LEMA 3. *Si* $2n$ *paréntesis y un subconjunto consecutivo de* $2n$ *de ellos admiten a la vez emparejamientos propios, entonces el emparejamiento propio en el subconjunto forma una parte del emparejamiento propio en el conjunto total, es decir, cada paréntesis del subconjunto tiene el mismo compañero en ambos emparejamientos.*

Demuéstrese por inducción sobre $m$.

A título ilustrativo, considérense los 22 paréntesis

$$(_7^1\ (_6^2\ (_4^3\ (_2^4\ (_1^5\ )_1^6\ )_2^7\ (_3^8\ )_3^9\ (_4^{10}\ (_5^{11}\ (_5^{12}\ (_6^{13}\ (_7^{14}\ (_{11}^{15}\ (_{10}^{16}\ (_8^{17}\ (_8^{18}\ (_9^{19}\ (_9^{20}\ (_{10}^{21}\ (_{11}^{22}$$

El siguiente 'algoritmo' (sugerido por la demostración del Lema 2) permite descubrir un emparejamiento propio, indicado por los suscritos: procediendo de izquierda a derecha, búsquese, en cada estadio, el primer par máximamente interno entre aquéllos que no hayan sido ya utilizados, y considérese que el tal par pertenece al emparejamiento. Según el Lema 2, sería fútil buscar otro emparejamiento propio que no fuese éste. Los paréntesis tercero al duodécimo constituyen un subconjunto consecutivo, en el que se ha establecido ya un emparejamiento propio en el proceso de emparejar el conjunto total. Según el Lema 3, sería fútil buscar cualquier otro subconjunto consecutivo que admitiese un emparejamiento propio que fuese distinto de los ya emparejados propiamente al emparejar el total.

§ 8. **Sistemas de objetos.** Por un sistema $S$ de objetos entendemos un conjunto (no-vacío) o clase o dominio $D$ (o posiblemente varios conjuntos tales) de objetos entre los cuales se establecen ciertas relaciones.

Por ejemplo, la secuencia de números naturales (§ 6) constituye un sistema del tipo $(D, 0, ')$, donde $D$ es un conjunto, 0 es un miembro del conjunto $D$, y $'$ una operación unaria sobre un miembro del conjunto $D$. Otro tipo simple de sistema es $(D, <)$, donde $D$ es un conjunto y $<$ una relación binaria entre miembros del conjunto.

Cuando los objetos del sistema son conocidos sólo mediante las relaciones del sistema, el sistema es *abstracto.* Lo que se establece en este caso es la estructura del sistema, dejando sin especificar qué sean esos objetos en cualquiera de sus respectos, con la excepción del que se refiere a saber cómo encajan en dicha estructura.

Cualquier especificación ulterior de lo que sean los objetos, suministra, entonces, una *representación* (o *modelo*) del sistema abstracto, esto es, un sistema de objetos que satisface las relaciones del sistema abstracto y tiene además un cierto estatuto que le sea propio. Estos objetos no son necesariamente más concretos, puesto que pueden ser elegidos de algún otro sistema abstracto (o incluso del mismo sistema de que se trate bajo una reinterpretación de sus relaciones).

Representaciones distintas de la secuencia abstracta de números naturales son: (a) los números naturales en tanto que cardinales de conjuntos finitos, (b) los enteros positivos (representando 1 al abstracto 0), (c) los números naturales pares (representando $+2$ al abstracto $'$). Ciertos productos comerciales van envueltos a veces en recipientes a los que se adhiere un anuncio que incluye un dibujo del propio recipiente. Por razones físicas, el detalle del dibujo ha de ser limitado. Pero si suponemos a éste perfecto, cabría representar a 0 por el recipiente, a 1 por el dibujo del recipiente sobre el recipiente, a 2 por el dibujo del recipiente en el dibujo del recipiente sobre el recipiente, y así sucesivamente.

Dos representaciones del mismo sistema abstracto son (*simplemente*) *isomorfas*, es decir, pueden ser puestas en correspondencia de 1-1 que preserve las relaciones. Con más precisión, dos sistemas $(D_1, 0_1, '_1)$ y $(D_2, 0_2, '_2)$ del tipo $(D, 0, ')$ son simplemente isomorfos si existe una correspondencia de 1-1 entre $D_1$ y $D_2$ tal que $0_1$ corresponda a $0_2$ (en símbolos, $0_1 \longleftrightarrow 0_2$), y siempre que $m_1 \longleftrightarrow m_2$ entonces $m_1'_1 \longleftrightarrow m_2'_2$. Dos sistemas $(D_1, <_1)$ y $(D_2, <_2)$ del tipo $(D, <)$ son simplemente isomorfos si existe una correspondencia de 1-1 entre $D_1$ y $D_2$ tal que, si $m_1 \longleftrightarrow m_2$ y $n_1 \longleftrightarrow n_2$, entonces: $m_1 <_1 n_1$, si y sólo si $m_2 <_2 n_2$.

Recíprocamente, cualesquiera dos sistemas simplemente isomorfos constituyen representaciones del mismo sistema abstracto, el cual se obtiene por abstracción de cualquiera de ellos, esto es, dejando de considerar a la totalidad de sus relaciones y propiedades excepto aquéllas que interesan para el sistema abstracto.

Como segundo ejemplo de un sistema abstracto del tipo $(D, 0, ')$, sea que $D$ tenga justamente dos objetos (distintos) 0 y 1, y sea $0' = 1$ y $1' = 0$. Llamamos a este sistema de *residuos módulo* 2. La secuencia de números naturales se convierte en tal sistema cuando cada número es reemplazado por su resto después de dividirlo por 2 (o sea, es *reducido* mod 2), así,

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots .$$

(Los sistemas de residuos fueron considerados primeramente por Gauss, 1801).

Como un tercer ejemplo, supongamos que $S$ consta de dos secuencias

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\qquad \omega,\quad \omega+1,\quad \omega+2,\quad \omega+3,\ \ldots,$$

teniendo cada una de ellas la misma estructura que la de los números naturales, y no estando ningún miembro de ninguna de ellas en la relación de sucesor con respecto a miembro alguno de la otra.

Es obvio que podemos modificar cada uno de estos tres ejemplos a fin de considerarlo como un sistema del tipo $(D, <)$. En el tercer ejemplo, tomamos entonces los elementos en el orden mostrado; y los llamamos los *ordinales* $<2\ \omega$ (según la teoría cantoriana de números ordinales).

Los residuos mod 2 (o una representación de ellos) no son isomorfos con respecto a los números naturales (o una representación de ellos), puesto que es imposible establecer al efecto una correspondencia de 1-1. Los ordinales $<2\ \omega$ no son isomorfos con respecto a los números naturales, porque no es posible, al establecer una correspondencia de 1-1, preservar la operación sucesor $'$ (o la relación de orden $<$).

En la presente sección, venimos escribiendo "$S$" para designar a un sistema, y "$D$" para su conjunto de objetos, en el caso de sistemas que tengan un conjunto. Con frecuencia cabe simplificar la notación sin dar lugar a confusiones usando una letra para ambos. Ello puede hacerse, p. ej., al hablar de los números naturales $N$ como anteriormente. No puede hacerse, p. ej., al hablar del sistema $(N, <)$ que consta de los números naturales, con los números pares (números impares) ordenados entre sí del modo usual, y todos los números pares precediendo a todos los números impares. (Este sistema es una representación de los ordinales $<2\ \omega$).

Los sistemas de objetos son introducidos en la matemática de acuerdo con dos métodos o puntos de vista que contrastan entre sí (cfr. Hilbert 1900).

El método *genético* o *constructivo* está ilustrado por la definición inductiva de los números naturales (§ 6). Allí concebíamos a los números naturales como siendo generados o construidos de una cierta y ordenada manera. (Lo cual no nos prohibía el tratarlos abstractamente).

En el método *axiomático* o *postulacional*, por otra parte, algunas proposiciones, llamadas *axiomas* o *postulados*, son propuestas al comienzo como suposiciones o condiciones de un sistema $S$ de objetos. Las consecuencias de los axiomas son luego desarrolladas como una teoría acerca de cualquier sistema de objetos $S$ que satisfaga los axiomas.

A título de ilustración, podemos tomar como axiomas los cinco axiomas de Peano. Para una mayor claridad, reescribamos los axiomas de Peano sustituyendo "número natural" por "miembro de $D$".

P1. $0 \in D$. P2. Si $n \in D$, entonces $n' \in D$. P3. Si $m \in D$ y $n \in D$, entonces $m' = n'$ sólo si $m = n$. P4. Si $n \in D$, entonces $n' \neq 0$. P5. Si $P \subset D$ y (1) $0 \in P$ y (2) siempre que $n \in P$ entonces $n' \in P$, entonces $P = D$.

Sabemos ya que estos cinco axiomas son satisfechos por exactamente un sistema abstracto $S$, a saber, el de los números naturales que previamente introdujimos desde el punto de vista genético.

Pero desde el punto de vista axiomático, podemos igualmente bien considerar otras listas de axiomas, por ejemplo P1-P4. Entonces $S$ puede ser, los números naturales, o los ordinales $<2\ \omega$, o cualquiera de los muchos otros sistemas abstractamente diferentes, esto es, no isomorfos.

Si, en lugar de ello, elegimos los axiomas P1-P3, P5, entonces los diferentes sistemas abstractos que los satisfacen son precisamente los números naturales y los sistemas de residuos mod $m$, para cada entero positivo $m$.

Supongamos seguidamente que no solamente removemos P4, sino que lo sustituimos por:

P6. Si $n \in D$, entonces $n' \neq n$ pero $n'' = n$.

De nuevo sucede que satisface a los axiomas exactamente un sistema abstracto, el residuo mod 2.

Los seis axiomas P1–P6 tomados conjuntamente, no son satisfechos en absoluto por sistema alguno $S$, puesto que sólo los números naturales satisfacen P1–P5, y sólo los residuos mod 2 satisfacen P1–P3, P5, P6.

De los axiomas de una teoría axiomática se dice a veces que constituyen una definición implícita del sistema de los objetos de la teoría; pero esto sólo puede significar que los axiomas determinan a qué sistemas, definidos desde fuera de la teoría, se aplica esta última. Entonces se dan tres casos. Los axiomas no pueden ser satisfechos por ningún sistema de objetos (p. ej., P1–P6); o por exactamente un sistema abstracto, siendo isomorfos cualesquiera dos sistemas que los satisfagan (p. ej., P1–P5, o P1–P3, P5, P6); o por más de un sistema abstracto, es decir, existen sistemas no-isomorfos que los satisfacen (p. ej., P1–P4, o P1–P3, P5). En el primer caso podemos llamar al conjunto de axiomas *vacuo*; en los otros dos, *no-vacuo*, denominándolo además *categórico* (Veblen 1904) en el segundo caso, y *ambiguo* en el tercero. (En el método genético, por otra parte, se considera de ordinario que el proceso de generación determina completamente la estructura abstracta del sistema, esto es, que constituye una definición categórica del sistema).

Puede suceder que en modo alguno sea evidente, para una teoría axiomática dada, cuál de las tres posibilidades es el caso. Ello queda ilustrado históricamente por el ejemplo de la geometría euclidiana sin el postulado de las paralelas de Euclides, del que depende el teorema según el cual por un punto dado que no se encuentre en una línea dada, pasa exactamente una línea paralela a esa línea dada. Desde los "Elementos" de Euclides (c. 330–320 a.C.) hasta el descubrimiento de una geometría no-euclidiana por Lobatchevsky (1829) y Bolyai (1833), se supuso generalmente que los sistemas eran categóricos; o, al menos, si la cuestión hubiese sido planteada en tales términos, probablemente se la hubiese respondido así.

La creencia del griego en que se las había con una estructura única del espacio, no estaba formulada en la presente terminología. Euclides pensaba que sus axiomas expresaban ciertas propiedades fundamentales del espacio real. El método axiomático en este más antiguo sentido, según el cual se suponía que los objetos del sistema $S$ eran conocidos con anterioridad a los axiomas, puede ser designado como *axiomática informal* o *material*. En ella, los axiomas expresan meramente aquellas propiedades de los objetos que inicialmente se toman como evidentes por su construcción, o en el caso de teorías que se aplican al mundo empírico, como abstraídas directamente de la experiencia o como postuladas acerca de ese mundo.

El método axiomático, tal y como se ha descrito antes, según el cual los axiomas son anteriores a cualquier especificación del sistema $S$ de objetos de que hayan de tratar (y sirven para introducir o "definir implícitamente" a $S$), fue sistemáticamente desarrollado por vez primera por Hilbert en "Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de Geometría)" (1899), y puede ser designado como *axiomática formal* o *existencial*. Debe advertirse que sólo desde fuera de una teoría axiomática formal (es decir, dentro de alguna otra teoría) es posible investigar si uno, o más de uno, o ningún sistema abstracto $S$ satisface los axiomas. Dentro de la teoría axiomática formal, el dominio $D$ correspondiente a $S$ juega el papel de un conjunto de objetos fijo y completo, de los que se supone que todos ellos existen simultáneamente aparte de cualquier orden de generación, al que se apliquen las operaciones, relaciones, etc., de $S$.

Para un sistema $S$ del tipo $(D, 0, ')$, 0 y $'$, o $D$, 0 y $'$, reciben el nombre de nociones *primitivas* o *técnicas* o *no definidas*, es decir, son no definidas con anterioridad a la introducción de los axiomas. Los otros términos que aparecen en los axiomas son *ordinarios* o *lógicos* o *definidos*, o sea, sus significados han de ser previamente entendidos. Respecto a $D$, 0 y $'$, lo único que ha de ser entendido desde el comienzo es que $D$ es un conjunto, 0 un objeto que pertenece a $D$, y $'$ una

operación sobre un miembro de $D$; es decir, sólo las categorías gramaticales a las que pertenecen "$D$", "0" y "'", son previamente definidas. Similarmente para un sistema de la forma $(D, <)$, las nociones no definidas son $<$, o $D$ y $<$.

En la práctica matemática tiene lugar con frecuencia una interacción entre los métodos genético y axiomático de introducción de sistemas de objetos, como cuando se proporciona genéticamente un ejemplo de un sistema de objetos que satisface los axiomas. Otras veces puede aducirse un ejemplo extraído de otra teoría axiomática formal. (En cualquier caso, tan pronto como el $S$ correspondiente a una teoría axiomática formal dada es identificado con un sistema de objetos suministrado desde fuera de la teoría, tenemos una *aplicación* de la teoría axiomática formal, la cual, por virtud de la aplicación, se torna en una teoría axiomática material).

El método axiomático formal es a menudo usado ventajosamente con sistemas axiomáticos ambiguos, pues permite desarrollar simultáneamente una porción común de la teoría para muchos sistemas diferentes. El ejemplo de los 'grupos' en álgebra es celebrado.

Considérense, a título de nuevo ejemplo, los siguientes axiomas para el *orden lineal*, que se aplican a sistemas del tipo $(D, <)$.

L1. Si $m < n$ y $n < p$, entonces $m < p$. L2. A lo sumo una de las opciones $m < n$, $m = n$, y $m > n$ es válida. L3. Al menos una de las opciones $m < n$, $m = n$, y $m > n$ es válida.

Aquí $m > n$ significa $n < m$. Las variables $m$, $n$, $p$, se refieren a cualesquiera elementos de $D$. Estos axiomas se satisfacen tomando como $D$ a los números naturales, los ordinales $< 2\ \omega$, los enteros, los números racionales, o los números reales, y como $<$ la relación de orden usual entre números; y por muchos otros sistemas. Omitiendo L3, tenemos un conjunto de axiomas para el *orden parcial.*

* § 9. **La teoría de números frente al análisis.** La *aritmética* o *teoría de números* puede ser descrita como la rama de la matemática que trata de los números naturales y otros sistemas enumerables de objetos (categóricamente definidos), tales como los enteros o los números racionales. Un tal sistema particular (o la teoría acerca de él) puede ser denominado una *aritmética.* El tratamiento es usualmente abstracto (§ 8). Los objetos son habitualmente tratados como *individuos* (es decir, no se los analiza en tanto que compuestos de otros objetos), salvo p. ej. cuando al desarrollar las propiedades fundamentales de los números racionales no-negativos se representa a éstos por pares ordenados de números naturales.

En la *aritmética en sentido estricto* se trata principalmente de operaciones particulares llamadas $+$ (adición) y $\cdot$ (multiplicación), como también de algunas otras que les son afines. En la *aritmética en sentido amplio* o *teoría de números* se emplea un más dilatado caudal de conceptos.

Estas definiciones tienen por objeto clarificar nuestra terminología. A veces nos encontramos "aritmética" haciendo referencia a la teoría de $+$ y $\cdot$ para sistemas de números que no son enumerables (p. ej., la 'aritmética de cardinales transfinitos').

Mientras los números cardinales de los sistemas estudiados en aritmética o teoría de números son $\aleph_0$ (o a veces finitos), el *análisis*, por otra parte, trata de los números reales y otros sistemas de objetos que tienen el cardinal $2^{\aleph_0}$ (o a veces, un cardinal superior). Al igual que con la teoría de números, los sistemas de objetos empleados en el análisis se consideran usualmente como categóricamente determinados.

Los resultados del análisis son aplicados a veces en investigaciones de teoría de números, lo que constituye entonces la *teoría analítica de números.* La teoría de números sin la ayuda del análisis es la *teoría pura* o *elemental de números.*

Examinamos ahora brevemente el sistema fundamental de objetos para el análisis, a saber, el continuo de los números reales.

La teoría de números reales, comúnmente utilizada como base del análisis (excepto por los críticos de los fundamentos del mismo), es el producto de un prístino movimiento crítico iniciado por Gauss (1777-1855), Cauchy (1789-1857) y Abel (1802-1829).

Ello condujo más tarde, en el siglo XIX, a la *aritmetización del análisis*, tal como fue llamada, por Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916), Méray (1835-1911) y Cantor (1845-1918). La confianza en intuiciones geométricas un tanto vagas, fue reemplazada por una definición de los números reales como ciertos objetos construidos a base de números naturales, enteros o racionales. Las propiedades de los números reales fueron de este modo reducidas, en última instancia, a propiedades de números naturales. Como dijo Poincaré en 1900. "Hoy quedan solamente en el análisis enteros o sistemas de enteros finitos o infinitos, interconectados por una red de relaciones de igualdad o desigualdad".

La definición de los números reales, a partir de los números naturales, enteros o racionales, puede darse de varios modos. Todos ellos conducen a la misma estructura abstracta del continuo de número real. En otras palabras, lo que cada una de las definiciones lleva a cabo, es suministrar una representación (§ 8) de los números reales por medio de objetos construidos (directa o indirectamente) a base de números naturales.

Hemos utilizado como representaciones las infinitas fracciones decimales o duales (§ 2, 5). En principio podría ser utilizado cualquiera de los conjuntos de los que se demostró que eran equivalentes a dichas fracciones (§ 5), así p. ej., los conjuntos de números naturales, pero en la práctica se deberá optar por una representación que permita definir con más sencillez las propiedades de los números reales.

Una representación que hace especialmente clara la ordenación de los números reales es la que se basa en las cortaduras de Dedekind (1872). Supóngase que los números racionales $R$ han sido separados en dos clases no vacías $X_1$, $X_2$, tales que todo racional en $X_1$ es $<$ todo racional en $X_2$. Una tal separación es llamada una *cortadura de Dedekind* (*en R*). En el caso de que no haya ni un racional máximo en el conjunto inferior $X_1$, ni uno mínimo en el conjunto superior $X_2$, la cortadura se denomina *abierta*. La clarividencia de Dedekind estuvo en advertir que los irracionales son requeridos exactamente allí donde ocurren las cortaduras abiertas. Un racional se asocia con una u otra de las dos cortaduras *cerradas*, una, para la cual el racional es el máximo en $X_1$, y la otra, para la cual es el mínimo en $X_2$. A fin de tener un representante único de cada número real (racional o irracional), podemos utilizar los conjuntos inferiores $X_1$ de las cortaduras para las que $X_1$ no tiene un máximo. Esto nos da la siguiente definición (escribiendo x en lugar de $X_1$, y $R - x$ en lugar de $X_2$).

Un *número real* es un conjunto x de racionales tal que: (a) Ni x ni $R - x$ es vacío. (b) x no contiene un racional máximo. (c) Todo racional en x es $<$ todo racional en $R - x$. El conjunto **C** de reales es el conjunto de todos esos conjuntos x de racionales.

Esta definición hace uso del sistema presupuesto de racionales $R$ para construir

los representantes de los reales, sin tomar a $R$ como un subsistema en el sistema resultante **C**. (Si los miembros de $R$ son individuos, los miembros de **C** son conjuntos de esos individuos).

Definimos ahora a un número real **x** como *racional*, si $R - \mathbf{x}$ tiene un mínimo miembro $x$, en cuyo caso se dice que **x** *corresponde* al racional $x$ (del sistema $R$). En otro caso, **x** es *irracional.*

Los racionales forman, entre los reales, un subsistema $\mathbf{C}_R$ de **C** que es isomorfo (§ 8) con respecto al sistema de racionales original $R$, como puede comprobarse cada vez que se utilice la representación al objeto de definir una noción para los reales que haya sido previamente definida para los racionales.

EJEMPLOS. El real **2** es el conjunto de los racionales $<$ el racional 2, al cual corresponde. El real $\sqrt{2}$ es el conjunto de los racionales que o son negativos o tienen cuadrados $<$ el racional 2 (entre los cuales no hay un máximo). Puesto que el cuadrado de ningún racional $= 2$ (como descubrió Pitágoras en el siglo sexto a.C.), $R - \sqrt{2}$ consta de los racionales positivos que tienen cuadrados $> 2$ (entre los cuales no hay un mínimo), y así $\sqrt{2}$ es irracional.

La relación de orden para los reales se define así: $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, si existe un racional $r$ que está en **y** pero no en **x**. (Demuéstrese ahora que **C** está ordenado linealmente por $<$, y que $(\mathbf{C}_R, <)$ es isomorfo con respecto a $(R, <)$.)

Un número real **v** es una *cota superior* de un conjunto **M** de números reales, si $\mathbf{v} \geq \mathbf{x}$ para todo número real **x** que pertenezca a **M**.

(A) *Si un conjunto no vacuo* **M** *de números reales tiene una cota superior, tiene una mínima cota superior* s (= m.c.s. **M**).

DEMOSTRACION. Hemos de construir s como un conjunto de racionales que tengan las Propiedades (a) – (c). Damos **M** como un conjunto de tales conjuntos de racionales. La definición del conjunto s es ésta: un racional $r \in$ s cuando y sólo cuando, para algún número real **x** que $\in \mathbf{M}$, $r \in \mathbf{x}$. En el simbolismo de § 5, $\mathbf{s} = \mathfrak{S}\mathbf{M}$. Se deja al lector mostrar ahora que s = m.c.s. **M**. (Demuéstrese que s es un número real, s es una cota superior de **M**, y **M** no tiene cota superior $\mathbf{v} <$ s).

Las cotas inferiores se definen similarmente. Si el real **x** es racional, sea $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \{x\}$; en otro caso, sea $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$. Sea $-\mathbf{x}$ el conjunto de los racionales $-r$ para $r \in R - \overline{\mathbf{x}}$. (Si **x** es racional, entonces $-\mathbf{x}$ corresponde a $-x$). Sea $-\mathbf{M}$ el conjunto de los reales $-\mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Si **w** es una cota inferior de **M**, entonces $-\mathbf{w}$ es una cota superior de $-\mathbf{M}$, así $-\mathbf{M}$ tiene una m.c.s., y $-$(m.c.s. $-\mathbf{M}$) = m.c.i. **M**.

Dados dos reales **x** e **y**, sea $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ el conjunto de los racionales $r + s$ para $r \in \mathbf{x}$ y $s \in \mathbf{y}$; sea $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$; y sea $|\mathbf{x}| = \mathbf{x}$ si $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y $|\mathbf{x}| = -\mathbf{x}$ si $\mathbf{x} < \mathbf{0}$. (No se confundan $+$ y $-$ con la adición y sustracción de conjuntos, que se escriben $+$ y $-$).

Dada una secuencia infinita de reales $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ y un real a, decimos que $\lim a_n = a$, si para todo real $\mathbf{e} > \mathbf{0}$, hay un número natural $n_\mathbf{e}$ tal que, para todo $n > n_\mathbf{e}$, $|a_n - a| < \mathbf{e}$. Por ejemplo, $\lim 1/2^n = \mathbf{0}$ (donde $1/2^n$ es el real correspondiente al racional $1/2^n$).

(B) *Si* s = m.c.s. **M** (*como en* (A)), *existe una secuencia* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *de miembros de* **M** *tal que* $\lim a_n = s$.

DEMOSTRACION. Sea $\mathbf{M}_n$ = al conjunto de los reales que $\in \mathbf{M}$ y son $> \mathbf{s} - \mathbf{1}/2^n$.

(Demuéstrese que $\mathbf{M}_n$ no es vacío). Sea $\mathbf{a}_n$ un real cualquiera elegido de $\mathbf{M}_n$. (Demuéstrese que $\lim \mathbf{a}_n = \mathbf{s}$).

A pesar de que en esta teoría el análisis está "aritmetizado", la distinción entre aritmética y análisis sigue siendo neta, puesto que el análisis encuentra necesario emplear como objetos suyos conjuntos infinitos de los objetos de la aritmética.

**§ 10. Funciones.** En el sentido más general, una función (univalente) $f$ o $f(x)$ o $y = f(x)$ *de una variable* $x$ es una correspondencia por la cual a cada elemento $x$ de un conjunto $X$ corresponde un único elemento $y$ de un conjunto $Y$.

El conjunto $X$ es el *rango de la variable independiente*, o el *dominio de la función*. La función puede ser llamada una *función de $X$ a $Y$* (o una *función de* un miembro de $X$ *que toma* un miembro de $Y$ *como valor*, o una *operación sobre* un miembro de $X$ *que produce* un miembro de $Y$, etc.).

El *rango de la variable dependiente* $y$ o $f(x)$ es el subconjunto $Y_1$ de $Y$ que comprende los elementos de $Y$ usados en la correspondencia, es decir, aquéllos que corresponden por la función $f$ a algún elemento de $X$. En tal caso, $X$ e $Y_1$ están en *correspondencia de muchos a uno*, puesto que para cada elemento de $X$ corresponde justamente un elemento de $Y_1$, mientras que un elemento de $Y_1$ corresponderá (en general) a varios elementos de $X$. Un elemento $x$ de $X$ es un *argumento de la función* o un *valor de la variable independiente*. El elemento correspondiente $y$ de $Y$ es el *valor correspondiente de la función* o *de la variable dependiente*, o el *valor de la función para ese argumento*. (A veces se encuentra "argumento" significando "variable independiente").

Una *función univalente* $f$ o $f(x_1,...,x_n)$ o $y = f(x_1,...,x_n)$ *de n variables* $x_1, ..., x_n$ es una correspondencia por la cual a cada $n$-tuplo ordenado de objetos $(x_1, ..., x_n)$, donde $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$, corresponde un único objeto $y$, donde $y \in Y$. Una función de $n$ variables puede ser considerada como una función de una variable, siendo $X$ la clase de todos los $n$-tuplos ordenados $(x_1, ..., x_n)$. Similar terminología puede aplicarse en este respecto. Así $X_1$ es el *rango* de $x_1$, $X_2$ de $x_2$, ..., $X_n$ de $x_n$. Aquí $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ pueden todos ser el mismo conjunto, o pueden ser varios (hasta $n$) rangos diferentes. Una secuencia particular $x_1$, ..., $x_n$ de elementos de $X_1$, ..., $X_n$, respectivamente, es un *conjunto* (o *n-tuplo*) *de argumentos*.

En esta plétora terminológica, cabe advertir una mezcla de criterios denominativos basada en dos ideas: la idea de una función como una correspondencia de muchos a uno, y la idea de una función como una variable $y$ que oscila en relación a otra variable $x$, de suerte que el valor de $y$ está siempre fijado por el de $x$.

La primera idea es la más comprensiva, y es la que el estudiante debiera tener predominantemente en su ánimo. La segunda idea, empero, da lugar, de un modo natural, a la útil convención notacional, en la que si "$f(x)$", por ejemplo, está por una cierta función de la variable independiente $x$, y $a$, $b$, etc., son valores de la variable independiente (esto es, argumentos), entonces "$f(a)$" está por el valor de la función para el argumento $a$, "$f(b)$" para el valor cuando $x = b$, etc.

Convendría, pues, tomar conciencia de que "$f(x)$" puede tener cualquiera de estos dos significados: 1. La función misma (esto es, la correspondencia de muchos a uno entre $X$ e $Y_1$). 2. Cuando $x$ está por un objeto del dominio, el correspondiente valor de la función (esto es, un miembro $y$ de $Y_1$). Cuando $x$ no está especificada, el último es denominado el *valor ambiguo* de la función.

EJEMPLO 1. Cuando decimos "$x + y$ es simétrica", por "$x + y$" entendemos la función. Cuando decimos "la suma $x + y$ de cualesquiera dos números naturales $x$ e $y$ es $\geq$ que $x$", no entendemos por "$x + y$" una función, sino un número (el valor ambiguo de la función).

Esta situación puede evitarse utilizando "$f$" en lugar de "$f(x)$" para la función, mientras estemos hablando sólo acerca de funciones para cada una de las cuales haya sido introducido un símbolo, tal como "$f$", "$g$", "$+$", o "$\varphi$". Pero las notaciones que exhiban las variables independientes son muy convenientes para nombrar nuevas funciones compuestas a partir de las anteriores funciones (y constantes), p. ej., "$f(g(x))$", "$x^2 + 3x$" o "$\varphi(2, x)$".

EJEMPLO 2. Para considerar esto con más detalle, digamos que $f$ y $g$ son *funciones de teoría de números* dadas de una variable cada una, esto es, funciones del conjunto de los números naturales a este mismo conjunto. Sea $x$ cualquier número natural. Entonces $g(x)$ es un número natural, esto es, el valor de $g$ para $x$ como argumento y $f(g(x))$ es un número natural, esto es, el valor de $f$ para el número natural $g(x)$ como argumento. Así, para cualquier número natural $x$ queda determinado otro número $f(g(x))$. De este modo "$f(g(x))$" está por el valor ambiguo de una nueva función (Significado 2); y es también conveniente utilizar esa expresión como nombre de la nueva función misma (Significado 1).

Hay otra notación (debida a Church 1932) en la que aparecen las variables independientes, pero que representa la función $f$ como distinta de su valor ambiguo, a saber: "$\lambda x f(x)$", o para una función de $n$ variables, "$\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n)$"; p. ej. "$\lambda x f(g(x))$, "$\lambda x x^2 + 3x$", "$\lambda x \varphi(2, x)$". Utilizaremos esta $\lambda$-notación para poner énfasis en situaciones que requieran especial cuidado.

EJEMPLO 3. Sea $\varphi$ una función de dos números. Utilizando consistentemente la $\lambda$-notación, esto es, siempre que signifiquemos la función en lugar del valor ambiguo, podemos distinguir, (a) el número $\varphi(x, y)$, (b) la función $\lambda x \varphi(x, y)$ de una variable $x$, con $y$ como parámetro, (c) la función $\lambda xy \varphi(x, y)$ de dos variables, con $x$ como primera e $y$ como segunda variable, (d) la función $\lambda yx \varphi(x, y)$, con $y$ como primera y $x$ como segunda variable, (e) la función $\lambda x \lambda y \varphi(x, y)$ de una variable $x$, cuyos valores son funciones de otra variable $y$, etc. (Schönfinkel 1924 y Church identifican (c) y (e), pero ello no es necesariamente así para nosotros).

Para cualquier $n$-tuplo $t_1, \ldots, t_n$ de argumentos para $f$,

$$\{\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n)\}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Por ejemplo, $\{\lambda x x^2 + 3x\}(2) = 10$, $\{\lambda x \varphi(x, y)\}(0) = \varphi(0, y)$, $\{\lambda yx \varphi(x, y)\}(0, 3) = \varphi(3, 0)$, $\{\lambda xy \varphi(x, y)\}(z, x) = \varphi(z, x)$.

Hemos descrito una función como una correspondencia de muchos a uno. Cabría ir más lejos diciendo de qué correspondencia de muchos a uno ha de tratarse, de acuerdo con el tipo de teoría en que se esté trabajando. En términos de teoría de conjuntos, la correspondencia puede ser identificada con el conjunto de todos los pares ordenados $(x, y)$ de elementos correspondientes de $X$ e $Y_1$. En lugar de ello puede hablarse de la ley o regla que establece la correspondencia, al menos cuando se trate de funciones tales que pueda darse una ley o regla para cada una en algún

sentido acordado. En el caso de que $X$ sea un conjunto finito, puede darse una función a guisa de tabla.

EJEMPLO 4. Sean $X$ e $Y$ los residuos módulo 2, esto es, $X = Y = \{0, 1\}$. Las funciones $x'$ y $x \cdot y$ pueden ser definidas mediante las siguientes tablas:

$x'$

| $x$ | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

$x \cdot y$

| $x$ \ $y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Así por la segunda tabla, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ y $1 \cdot 1 = 1$.

CAPITULO III

# UNA CRITICA DEL RAZONAMIENTO MATEMATICO

§ 11. **Las paradojas.** Este capítulo pretende presentar la problemática situación a partir de la cual surgieron las investigaciones a tratar en el resto del libro, es decir, la situación precedente a tales investigaciones (pero no a los cambios que dicha situación pueda haber experimentado desde entonces).

En la aritmetización del análisis (§ 9), una colección infinita (de racionales que forman la mitad inferior de una cortadura de Dedekind, o de dígitos en una secuencia que forme un decimal no-terminativo, etc.) constituye un objeto, y el conjunto de todos los objetos de esa índole es considerado como una nueva colección. De aquí hay un paso natural a la teoría general de conjuntos de Cantor.

Apenas se habían consolidado estas teorías, cuando fue puesta en duda la validez del edificio de su entera construcción por el descubrimiento de las paradojas o antinomias en los linderos de la teoría de conjuntos.

(A) La *paradoja de Burali-Forti* 1897*, que Cantor conocía ya en 1895, surge en la teoría cantoriana de ordinales transfinitos.

(B) Antinomias un tanto similares ocurren en la teoría de cardinales transfinitos, particularmente la *paradoja de Cantor* (hallada por él en 1899). Considérese el conjunto de todos los conjuntos; llámesele $\mathbf{M}$. Por el teorema de Cantor (Teorema C § 5), $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Pero también, dado que $\mathbf{M}$ es el conjunto de todos los conjuntos, y $\mathfrak{U}\mathbf{M}$ un conjunto de conjuntos (a saber, el conjunto de los subconjuntos de $\mathbf{M}$), $\mathfrak{U}\mathbf{M} \subset \mathbf{M}$. De donde, por el Corolario A del Teorema A, $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} \leq \overline{\overline{\mathbf{M}}}$; y así, por § 3, no es cierto que $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. De esta suerte hemos demostrado que $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$ y también que no es cierto que $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$.

Partiendo del mismo $\mathbf{M}$, podemos alcanzar también una paradoja así. Para cada miembro $M$ de $\mathbf{M}$, esto es, para cualquier conjunto $M$, por el Teorema C hay otro miembro $M'$ de $\mathbf{M}$, a saber, $\mathfrak{U}M$, tal que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M'}}$. De donde, por el Teorema D, $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$ para todo miembro $M$ de $\mathbf{M}$. Pero $\mathbf{M}$ es el conjunto de todos los conjuntos, y así $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ es uno de sus miembros. Suponiendo que el $M$ de la desigualdad que se acaba de demostrar sea dicho miembro, tenemos $\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$. Pero por § 3, para cualquier conjunto $M$, no es cierto que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M}}$; de donde, en particular, no es cierto que $\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$.

La paradoja con $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ resulta análogamente partiendo del conjunto de todos los números cardinales, y eligiendo como $\mathbf{M}$ un conjunto que contenga, para cada número cardinal, un conjunto $M$ que tenga ese cardinal.

Si se piensa que la noción de conjuntos de elementos arbitrarios aquí utilizada es demasiado vaga y por ende no matemática, podemos prescribir como elementos admisibles de conjuntos ($a_1$) los números naturales 0, 1, 2, ... (o ($a_2$) el conjunto vacío O) y (b) conjuntos arbitrarios cuyos miembros sean elementos admisibles. Con tal prescripción, vuelven a surgir igualmente las paradojas arriba expuestas como también la que sigue (con ($a_1$), Gentzen 1936).

(C) La *paradoja de Russell* 1902-3*, descubierta independientemente por Zermelo, versa sobre el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Llamemos $T$ a este conjunto. ¿Es $T$ un miembro de sí mismo?

Supongamos, a efectos de argumentación, que $T$ es un miembro de sí mismo, esto es, en símbolos $T \in T$. La suposición dice que $T$ es un miembro de $T$, es decir, que $T$ es un miembro del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, o sea, $T$ es un conjunto que no es miembro de sí mismo, esto es, en símbolos $T \notin T$. Ello contradice la suposición $T \in T$. Pero hasta el momento no hay paradoja, puesto que la contradicción entre $T \in T$ y $T \notin T$ ha surgido sólo bajo la suposición $T \in T$. Por reductio ad absurdum, concluimos que la suposición es falsa. Así pues queda ahora enteramente demostrado, sin suposición, que $T \notin T$.

A partir del resultado establecido $T \notin T$, podemos proseguir la argumentación. Este resultado dice que $T$ no es un miembro del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, esto es, $T$ no es un conjunto que no es miembro de sí mismo, o sea, $T$ es un conjunto que es miembro de sí mismo, es decir, en símbolos $T \in T$. Ahora quedan establecidos tanto $T \notin T$ como $T \in T$, y tenemos, pues, una paradoja.

Esta paradoja puede ser extraída de la de Cantor del siguiente modo. Si prescribimos que sean $(a_2)$ y (b) los elementos admisibles, de suerte que los conjuntos tengan como miembros solamente conjuntos, entonces cuando $\mathbf{M}$ es el conjunto de todos los conjuntos, $\mathfrak{U}\mathbf{M} = \mathbf{M}$, y el conjunto $T$ de la paradoja se obtiene aplicando la demostración del Lema A § 5 a la idéntica correspondencia de 1-1 $\mathbf{M} \sim \mathfrak{U}\mathbf{M}$, en la cual cada elemento de $\mathbf{M}$ corresponde a sí mismo en $\mathfrak{U}\mathbf{M}$.

Una popularización de la paradoja (Russell 1919) hace referencia al barbero de una cierta aldea, que afeita a todas y sólo aquellas personas de la aldea que no se afeitan a sí mismas. ¿Se afeita el barbero a sí mismo? (Sin duda en este caso podemos escapar a la paradoja concluyendo simplemente que jamás existió semejante barbero).

Todo municipio de Holanda ha de tener un alcalde, y no puede haber dos municipios que tengan el mismo. Sucede a veces que el alcalde no reside en el municipio. Supongamos que se promulga una ley en la cual se delimita un área especial $S$ exclusivamente para aquellos alcaldes que no residen en su municipio y se obliga a todos esos alcaldes a residir allí.

Supóngase, por añadidura, que hay tantos alcaldes no-residentes, que $S$ ha de ser constituido en municipio. ¿Dónde residirá el alcalde de $S$? (Mannoury, cfr. van Dantzig 1948).

Supóngase que el Bibliotecario del Congreso compila, con vistas a su inclusión en la Biblioteca del Congreso, una bibliografía de todas aquellas bibliografías de la Biblioteca del Congreso que no se mencionan a sí mismas (Gonseth 1933).

Russell mostró también cómo reconstruir su paradoja en términos que fuesen lógicos y no propiamente de teoría de conjuntos. Una propiedad es llamada 'predicable' si se aplica a sí misma, 'impredicable' si no se aplica a sí misma. Por ejemplo, la propiedad 'abstracto' es abstracta, y por tanto predicable; pero 'concreto' es también abstracta y no concreta, y por tanto es impredicable. ¿Qué sucede, a este respecto, con la propiedad 'impredicable'?

(D) La *paradoja de Richard* 1905, sustancialmente aducida asimismo por Dixon 1906, versa sobre la noción de definibilidad finita. A efectos de precisión, convengamos en referirnos a un lenguaje dado, por ejemplo el castellano, con un

alfabeto, un diccionario y una gramática previamente asignados. Podemos considerar que el alfabeto consta del espacio blanco (para separar palabras), las 26 letras latinas, y la coma. Por una 'expresión' en el lenguaje podemos entender, simplemente, cualquier secuencia finita de esos 28 símbolos que no comience con un espacio blanco. Las expresiones en lengua castellana pueden entonces ser enumeradas por el procedimiento que aplicamos al final de § 1 para la enumeración de ecuaciones algebraicas.

Una expresión puede definir a una función de teoría de números de una variable (esto es, una función de un número natural que tiene por valor un número natural). A partir de la indicada numeración de todas las expresiones del lenguaje castellano, y eliminando aquéllas que no definen una función de teoría de números, obtenemos una enumeración (digamos $E_0$, $E_1$, $E_2$, ...) de aquellas que sí lo hacen (sean las funciones definidas, respectivamente, $f_0(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$, ...).

Considérese ahora la siguiente expresión, "la función cuyo valor, para cualquier número natural dado como argumento, excede en uno al valor, para el número natural dado como argumento, de la función definida por la expresión que corresponde al número natural dado en la enumeración últimamente descrita".

En la expresión entrecomillada, nos referimos a la enumeración, más arriba descrita, de las expresiones en lengua castellana que definen una función de teoría de números sin definirla. Pero fácilmente podríamos haber escrito la definición de tal enumeración en su totalidad como parte de la expresión entrecomillada. Tendríamos entonces ante nosotros una definición de una función (más brevemente, la función $f_n(n)+1$), mediante una expresión del lenguaje castellano. Esta función, por su definición, ha de diferir de toda función definible mediante una expresión del lenguaje castellano.

Esta paradoja es especialmente interesante por sus implicaciones concernientes a lenguajes como el castellano, y por su estrecho parentesco con la demostración cantoriana de la no-enumerabilidad de las funciones de teoría de números (§ 2). Richard expuso la paradoja en forma relativa a la definición de un número real, paralelamente a la demostración cantoriana de la no-enumerabilidad de los números reales.

Considérese la expresión: "el mínimo número natural no nombrable en menos de veintiséis sílabas". ¡Esta expresión nombra en veinticuatro sílabas un número natural que, por definición, no puede ser nombrado en menos de veintiséis sílabas! (Berry 1906).

(E) Estas paradojas modernas, que caen más o menos dentro del contexto de la teoría de conjuntos, guardan relación con una muy antigua.

La aserción "los cretenses mienten siempre..." es atribuida al filósofo Epiménides de Creta (siglo sexto a. C.). (Esta aserción fue citada por Pablo en la "Epístola a Tito", I, 12, poniéndola en boca de un "profeta" cretense, al que la primitiva tradición cristiana, de acuerdo con fuentes más recientes, identificó con Epiménides. Cfr. Weyl 1949, pág. 228).

Supóngase que distinguimos dos tipos de mentirosos: mentirosos del primer tipo, que dicen la verdad en algunas ocasiones, y mentirosos del segundo tipo, que dicen sólo mentiras. Interpretemos la aserción de Epiménides como significando que todos los cretenses son mentirosos del segundo tipo. Supóngase que su aserción fuese verdadera. Por lo que dice y el hecho de que él es un cretense, se sigue que ha de ser falsa. Ello es una contradicción; de donde, por reductio ad absurdum, la aserción

ha de ser falsa. Pero la falsedad de la aserción requiere que haya existido, o que eventualmente haya de existir, un cretense que en alguna ocasión diga la verdad. Si la citada aserción hubiera sido la única emitida por todo cretense, tendríamos una paradoja. Es lógicamente insatisfactorio que pudiésemos escapar de la paradoja sólo merced al histórico accidente de que existiera algún cretense que alguna vez dijese la verdad.

La *paradoja de Epiménides*, asimismo conocida como el *mentiroso*, aparece en su forma fuerte, si una persona dice simplemente: "La aserción que estoy haciendo ahora es una mentira". La citada aserción no puede ser verdadera ni falsa sin comportar una contradicción. Esta versión de la paradoja es atribuida a Eubúlides (siglo cuarto a. C.), y fue muy conocida en tiempos antiguos. (Cfr. Rüstow 1910. Si la aserción "los cretenses mienten siempre..." no es auténticamente de Epiménides, o no fue originalmente reconocida como paradójica, la versión del Mentiroso de Eubúlides puede ser más antigua que la versión del "cretense mentiroso").

En el antiguo "dilema del cocodrilo", un cocodrilo ha robado un niño. El cocodrilo promete al padre devolverle su hijo, a condición de que adivine por conjetura si el animal le devolverá o no el niño. ¿Qué haría el cocodrilo si el padre conjeturase que el niño no le sería devuelto? (Cfr. Prantl 1855 pág. 493).

El enigma siguiente da lugar también a una paradoja. Un viajero ha caído en manos de caníbales, los cuales le ofrecen la oportunidad de emitir una aserción bajo la condición de que si lo que dice es verdadero, será hervido, y si es falso, será asado. ¿Qué aserción formularía? (Una forma de este enigma ocurre en "Don Quijote" (1605), II, 51, de Cervantes).

§ 12. **Primeras inferencias a partir de las paradojas.** El lector puede ensayar su habilidad intentando resolver las paradojas. En la media centuria transcurrida desde que se planteó el problema, no ha sido hallada solución alguna que sea universalmente aceptada.

El tipo más simple de solución consistiría en localizar una falacia específica, a la manera como se localiza un error en un estudiantil ejercicio de álgebra o demostración geométrica, sin que hubiese necesidad de hacer más cambios.

Ideas para resolver las paradojas en un tal sentido acuden a la mente cuando por primera vez se considera la cuestión. Cabe proponer que en las paradojas (A) – (C), el error consiste en utilizar conjuntos demasiado amplios, tales como el conjunto de todos los conjuntos o el conjunto de todos los números cardinales; o en permitir que los conjuntos sean considerados como miembros de sí mismos, lo que de nuevo arguye contra el conjunto de todos los conjuntos. Estas sugerencias no son necesariamente erróneas, pero no son, al fin y al cabo, simples. Nos dejan el problema de volver a fundamentar la teoría de conjuntos sobre una base drásticamente alterada cuyos detalles no están del todo implícitos en dichas sugerencias. Por ejemplo, si proscribimos el conjunto de todos los números cardinales, nos veremos incapacitados para introducir el conjunto de los números naturales a menos que sepamos de antemano que ellos no son todos los números cardinales; y la misma dificultad habrá de presentarse en superiores estadios. Si proscribimos el conjunto de todos los conjuntos, nos hallaremos en conflicto con la definición cantoriana de conjunto. No podremos disponer de la teoría de conjuntos, a menos que dispongamos de teoremas sobre todos los conjuntos, en cuyo caso todos los conjuntos constituyen un conjunto conforme a la definición de Cantor. De lo contrario,

habremos de decir qué otra definición de conjunto usaremos en su lugar, o habremos de suplementar la definicion de Cantor con algún criterio adicional para determinar cuándo una colección de objetos, como la descrita en la definición cantoriana, constituirá un conjunto (Skolem 1929-30).

TEORIA AXIOMATICA DE CONJUNTOS. Cabe aducir reconstrucciones de la teoría de conjuntos, imponiendo en torno a la noción de conjunto las mínimas restricciones encaminadas a excluir conjuntos demasiado amplios, que parezcan ser requeridas para eludir las conocidas antinomias. Dado que el libre uso de nuestra concepciones en la construcción de conjuntos conforme a la definición de Cantor condujo al desastre, las nociones de teoría de conjuntos son gobernadas por axiomas, similares a los que gobiernan 'punto' y 'línea' en la geometría plana de Euclides. El primer sistema de *teoría axiomática de conjuntos* fue el de Zermelo (1908). Refinamientos en el tratamiento axiomático de los conjuntos son debidos a Fraenkel (1922, 1925), Skolem (1922-3, 1929), von Neumann (1925, 1928), Bernays (1937-48), y otros. El análisis puede ser fundado sobre la base de la teoría de conjuntos, que es, tal vez, la más simple base establecida, desde las paradojas, para la deducción de la matemática existente. En relación con la teoría axiomática de conjuntos han tenido lugar ciertos descubrimientos de sumo interés, notablemente los debidos a Skolem (1922-3; cfr. más abajo § 75) y Gödel (1938, 1939, 1940).

EL PROBLEMA MAS AMPLIO DE LA FUNDAMENTACION. Suponiendo que sean evitadas las paradojas en la axiomatización de la teoría de conjuntos —y la única seguridad que de ello tenemos es la negativa de que hasta ahora ninguna ha sido encontrada— ¿constituye esto una completa solución del problema planteado por las paradojas?

En el caso de la geometría, los matemáticos han reconocido, desde el descubrimiento de una geometría no euclidiana, que es posible más de un tipo de espacio. Los sistemas axiomáticos sirven para destacar, a fin de que el geómetra los estudie, uno u otro tipo de espacio, o ciertos aspectos comunes de varios espacios. El surgimiento de una contradicción en una teoría axiomática formal, puede significar simplemente que ha sido postulada una combinación de aspectos irrealizable.

Pero en el caso de la aritmética y el análisis, que culminan en la teoría de conjuntos, los matemáticos anteriores a la actual época de criticismo suponían generalmente que estaban tratando con sistemas de objetos, construidos genéticamente, por medio de definiciones que pretendían establecer por completo su estructura. Los teoremas eran considerados como expresando verdades acerca de esos sistemas, más bien que como proposiciones que se aplicaran hipotéticamente a cualesquiera sistemas de objetos (si los hubiese) que satisficiesen los axiomas. Pero entonces ¿cómo podrían haber surgido contradicciones en tales materias, a menos que hubiese algún defecto en la lógica o algún error en los métodos de construcción y razonamiento acerca de objetos matemáticos en los que hasta ahora habíamos confiado?

Decir que esas materias deberían en cambio ser establecidas ahora sobre una base axiomática no releva sin más del problema. Después de la axiomatización ha de haber todavía algún nivel en el que tengamos verdad y falsedad. Si la axiomática es informal, los axiomas han de ser verdaderos. Si la axiomática es formal, hemos de creer, al menos, que los teoremas se siguen de los axiomas; como también que ha de darse alguna relación entre esos resultados y cierta realidad fuera de la teoría axiomática, si es que la actividad del matemático no ha de reducirse a un sinsentido.

Las proposiciones formalmente axiomatizadas de la matemática no pueden constituir la totalidad de la matemática; ha de haber también una matemática intuitivamente entendida. Si hemos de abandonar nuestra anterior creencia de que ésta comprende la totalidad de la aritmética, el análisis y la teoría de conjuntos, no quedaremos enteramente satisfechos hasta tanto no hayamos descubierto en dónde erró nuestra creencia y dónde hemos de trazar ahora, en cambio, una línea de separación.

El problema inmediato de eliminar las paradojas se diluye así en el problema más amplio de la fundamentación de la matemática y la lógica. ¿Cuál es la naturaleza de la verdad matemática? ¿Qué significado tienen las proposiciones matemáticas, y en qué evidencia reposan? Este vasto problema, o complejo de problemas, existe para la filosofía aparte de la circunstancia de que hayan surgido las paradojas en los linderos de la matemática. Históricamente, esta circunstancia ha conducido, por parte de los matemáticos, a un estudio del problema más intenso de lo que, verosímilmente, hubiera tenido lugar en otro caso; y es obvio que las paradojas imponen condiciones a la solución de tal problema.

DEFINICION IMPREDICATIVA. Cuando un conjunto $M$ y un objeto particular $m$ son definidos de manera que, por un lado $m$ es un miembro de $M$, y por otro, la definición de $m$ depende de $M$, decimos que el procedimiento (o la definición de $m$, o la definición de $M$) es *impredicativo*. Similarmente sucede cuando una propiedad $P$ es poseída por un objeto $m$ cuya definición depende de $P$ (aquí $M$ es el conjunto de los objetos que poseen la propiedad $P$). Una definición impredicativa es circular, a primera vista al menos, en la medida en que lo que es definido participa en su propia definición.

Cada una de las antinomias de § 11 envuelve una definición impredicativa. En (B) el conjunto **M** de todos los conjuntos incluye como miembros a los conjuntos $\mathfrak{U}\mathbf{M}$ y $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ definidos a partir de **M**. El procedimiento impredicativo en la paradoja de Russell (C) se acusa al elaborar la definición de $T$ del siguiente modo. Dividimos al conjunto **M** de todos los conjuntos en dos partes, comprendiendo la primera a aquellos miembros que se contienen a sí mismos, y la segunda (que es $T$) a aquellos que no se contienen. Luego retrotraemos $T$ (definido por esta división de **M** en dos partes) a **M**, para preguntar en qué parte de **M** cae. En la paradoja de Richard (D) la totalidad de expresiones en lenguaje castellano que constituyen definiciones de una función (número real, número natural) es considerada como incluyendo la expresión intercomillada, que hace referencia a esa totalidad. En la paradoja de Epiménides (E), la totalidad de enunciados es dividida en dos partes, los enunciados verdaderos y los falsos. A un enunciado que hace referencia a esta división, se lo considera como perteneciente a la totalidad original cuando preguntamos si es verdadero o falso.

Poincaré (1905-6, 1908) juzgó que la causa de las paradojas residía en tales definiciones impredicativas; y Russell (1906, 1910) formuló idéntica explicación mediante su principio del círculo vicioso: Ninguna totalidad puede contener miembros definibles sólo en términos de esa totalidad, o miembros que envuelvan o presupongan esa totalidad. De esta suerte puede parecer que tenemos una solución suficiente y una visión adecuada de las paradojas, a excepción de una circunstancia: partes de la matemática que deseamos retener, particularmente el análisis, contienen también definiciones impredicativas.

Un ejemplo es la definición de s = m.c.s. **M** (§ 9 (A)). Según la definición de

cortadura de los números reales establecida por Dedekind, el conjunto **C** de números reales es el conjunto de todos los conjuntos x de racionales que tengan las tres propiedades (a), (b), (c). Ahora bien, esta totalidad ha sido dividida en dos partes, **M** y **C** − **M**. Definimos a s como $\mathfrak{S}\mathbf{M}$, y contamos luego a este conjunto $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ como un miembro de **C**. Esta definición $s = \mathfrak{S}\mathbf{M}$ depende de **C** en el caso general, puesto que en el caso general, **M** habrá sido definido a partir de **C** como el conjunto de aquellos miembros de **C** que tienen una cierta propiedad *P*.

Puede intentarse defender esta definición impredicativa interpretándola, no como si definiese o crease el número real s por vez primera (interpretación bajo la cual, la definición de la totalidad **C** de números reales es circular), sino sólo como una descripción que extrae el número particular s de una totalidad **C**, ya existente, de números reales. Pero el mismo argumento puede ser utilizado para mantener las definiciones impredicativas en las paradojas.

EL CONTINUO CONSTRUCTIVO DE WEYL. El carácter impredicativo de algunas definiciones en el análisis ha sido especialmente subrayado por Weyl, quien en su libro "Das Kontinuum (El continuo)" (1918) trató de hallar en qué medida podría ser reconstruido el análisis sin recurrir a definiciones impredicativas. Resulta posible disponer de un caudal de operaciones para construir muchas categorías particulares de irracionales. Weyl logró obtener así una buena parte del análisis, pero no el teorema de que un conjunto arbitrario no vacío **M** de números reales que tenga una cota superior tiene una mínima cota superior. (Cfr. también Weyl 1919).

Tres principales escuelas de pensamiento han surgido sobre la fundamentación de la matemática: (i) la escuela logicista (Russell y Whitehead, ingleses); (ii) la escuela intuicionista (Brouwer, holandés), y (iii) la escuela formalista o axiomática (Hilbert, alemán). (A veces se usa "logística" en lugar de "logicista"; pero "logística" tiene también otro sentido, § 15). Esta amplia clasificación no incluye otros varios puntos de vista, que no han sido tan extensamente cultivados o no comprenden en un grado similar, tanto una reconstrucción de la matemática como una filosofía que la soporte.

LOGICISMO. La tesis logicista es que la matemática es una rama de la lógica. Las nociones matemáticas han de ser definidas en términos de las nociones lógicas. Los teoremas de la matemática han de ser demostrados como teoremas de lógica.

Leibniz (1666) concibió, por vez primera, a la lógica como una ciencia que contiene las ideas y principios que se encuentran a la base de todas las demás ciencias. Dedekind (1888) y Frege (1884, 1893, 1903) se comprometieron en la tarea de definir nociones matemáticas en términos de nociones lógicas, y Peano (1889, 1894-1908), en la de expresar teoremas matemáticos en un simbolismo lógico.

Para ilustrar cómo es posible definir nociones matemáticas a partir de las lógicas, demos por supuestas la definición de número cardinal de Frege-Russell (§ 3), y las definiciones del número cardinal 0 y del número cardinal $n + 1$ para cualquier número cardinal $n$ (§ 4). En tal caso, un *cardinal finito* (o *número natural*) puede ser definido como un número cardinal que posee toda propiedad $P$ tal que (1) 0 tiene la propiedad $P$ y (2) $n + 1$ tiene la propiedad $P$, siempre que $n$ tenga la propiedad $P$. Dicho más brevemente, un número natural es definido como un número cardinal para el que vale la inducción matemática. El punto de vista aquí es muy diferente del adoptado en § § 6 y 7, donde presupusimos una concepción intuitiva

de la secuencia de números naturales, para extraer de ella el principio de que siempre que se dé una propiedad particular *P* de los números naturales tal que (1) y (2), entonces, cualquier número natural dado ha de tener la propiedad *P*. Aquí, en cambio, presuponemos la totalidad integrada por todas las propiedades de los números cardinales como existente en lógica, anteriormente a la definición de la secuencia de números naturales. Obsérvese que esta definición es impredicativa, puesto que la propiedad, por ella definida, de ser un número natural pertenece a la totalidad de las propiedades de números cardinales, que es presupuesta en la definición.

Para adaptar la construcción logicista de la matemática a la situación resultante del descubrimiento de las paradojas, Russell excluyó las definiciones impredicativas mediante su *teoría ramificada de tipos* (1908, 1910). Ello es, esquemáticamente, como sigue. Los objetos primarios o individuales (es decir, las cosas dadas, que no están sujetas a análisis lógico) son asignadas a un tipo (llamémosle *tipo* 0), las propiedades de individuos al *tipo* 1, las propiedades de propiedades de individuos al *tipo* 2, etc.; y no se admiten propiedades que no caigan dentro de uno de estos tipos lógicos (ello sitúa, verbigracia, a las propiedades 'predicable' e 'impredicable' de § 11 fuera del ámbito de la lógica). Una consideración más detallada de la teoría describiría los tipos admitidos para otros objetos, tales como relaciones y clases. Por otra parte, a fin de excluir las definiciones impredicativas dentro de un tipo, los tipos superiores al 0 son ulteriormente separados en órdenes. Así, para el tipo 1, las propiedades definidas sin mencionar totalidad alguna pertenecen al *orden* 0, y las propiedades que son definidas utilizando la totalidad de las propiedades de un orden dado pertenecen al orden inmediato superior. (La definición logicista de número natural se torna ahora predicativa, cuando se especifica que la propiedad *P* que interviene en dicha definición tiene por rango tan sólo propiedades de un orden dado, en cuyo caso la propiedad de ser un número natural es del orden inmediato superior). Pero esta separación en órdenes hace imposible construir el análisis familiar, que, según vimos más arriba, contiene definiciones impredicativas. Para escapar a este resultado, Russell postuló su *axioma de reducibilidad*, que afirma que para cualquier propiedad perteneciente a un orden que sea superior al ínfimo hay una propiedad coextensiva (esto es, poseída por exactamente los mismos objetos) de orden 0. Si se considera que sólo existen propiedades definibles, entonces el axioma significa que para toda definición impredicativa dentro de un tipo dado, hay una predicativa equivalente.

La deducción de la matemática como provincia de la lógica fue llevada a cabo sobre esta base, utilizando un simbolismo lógico, en la monumental obra "Principia mathematica" de Whitehead y Russell (tres volúmenes, 1910-13). Esta obra ha tenido una gran influencia en subsiguientes desarrollos de la lógica simbólica.

Esta deducción de la matemática a partir de la lógica era ofrecida como axiomática intuitiva. Pretendíase que se creyeran los axiomas, o al menos que se los aceptase como hipótesis plausibles sobre el mundo.

La dificultad es ahora la siguiente: ¿en qué fundamento debe apoyarse nuestra creencia en el axioma de reducibilidad? Si las propiedades han de ser construidas, la materia en cuestión debería establecerse sobre la base de construcciones, no mediante un axioma. Como admitieron los autores en la introducción de la segunda edición de su obra (1925): "Este axioma tiene una justificación puramente pragmática: conduce a los resultados deseados, y no a otros (hasta donde alcanza

nuestro conocimiento). Pero, obviamente, no es el tipo de axioma con el que podamos quedar contentos".

Ramsey 1926 descubrió que los resultados apetecidos, y no otros, pueden ser, aparentemente obtenidos sin la jerarquía de órdenes (esto es, con una *teoría simple de tipos*). Clasificó las antinomias conocidas en dos especies, denominadas ahora 'lógicas' (p. ej. las de Burali-Forti, Cantor y Russell) y 'epistemológicas' o 'semánticas' (p. ej. las de Richard y Epiménides); y observó que las antinomias lógicas son (aparentemente) detenidas por la jerarquía simple de tipos, y en cuanto a las semánticas, se previene que surjan dentro del lenguaje simbólico por la ausencia en éste de medios requeridos para referirse a expresiones del mismo lenguaje. Pero los argumentos de Ramsey para justificar las definiciones impredicativas dentro de un tipo, comportan una concepción de la totalidad de los predicados de ese tipo como existentes independientemente de su constructividad o definibilidad. Ello ha sido denominado "teológico". Así pues ni Whitehead y Russell ni Ramsey lograron alcanzar con éxito y de un modo constructivo la meta logicista. (Una interesante propuesta para justificar las definiciones impredicativas dentro de un tipo, llevada a cabo por Langford 1927 y Carnap 1931-2, no está tampoco libre de dificultades).

Weyl 1946 afirma que, en el sistema de "Principia mathematica", "la matemática no se funda ya en la lógica, sino en una suerte de paraíso del lógico..."; y observa que aquel que esté dispuesto a creer en ese "mundo trascendental" podría igualmente aceptar el sistema de la teoría axiomática de conjuntos (Zermelo, Fraenkel, etc.), que tiene la ventaja, para la deducción de la matemática, de ser más simple de estructura.

El logicismo trata la existencia de la serie de los números naturales como una hipótesis sobre el mundo actual ('axioma de infinito'). Un tratamiento harto distinto del problema del infinito es propuesto por los intuicionistas (§ 13) y los formalistas (§ 14).

Desde ambos puntos de vista, el intuicionista y el formalista, la secuencia (abstracta) de números naturales es más elemental que las nociones de número cardinal y de la totalidad de propiedades de los números cardinales, utilizadas en la caracterización logicista de dicha secuencia.

La tesis logicista puede ser, finalmente, cuestionada sobre la base de que la lógica presupone ya ideas matemáticas en su formulación. Desde el punto de vista intuicionista hay ya contenido un esencial núcleo matemático en la idea de iteración, que precisa ser utilizada, p. ej., al describir la jerarquía de tipos, o la noción de una deducción a partir de premisas dadas.

Obra reciente de la escuela logicista es la de Quine 1940*. Una discusión crítica, bien que simpatizante, del orden de ideas logicista, es desarrollada por Gödel 1944, Exposiciones introductorias al logicismo son suministradas por Russell 1919 y Black 1933.

§ 13. **Intuicionismo.** En la década 1880, cuando los métodos de Weierstrass, Dedekind y Cantor alcanzaron su florecimiento, Kronecker arguyó vigorosamente que las definiciones fundamentales de estos autores eran sólo palabras, puesto que no permitían, en general, decidir si un objeto dado las satisface.

Poincaré, al defender la inducción matemática como un instrumento irreductible del razonamiento matemático intuitivo (1902, 1905-6), es también un precursor de la moderna escuela intuicionista.

En 1908 Brouwer, en un trabajo titulado "La no fiabilidad de los principios de la lógica", se enfrentó a la creencia de que las reglas de la lógica clásica, que nos han sido transmitidas esencialmente desde Aristóteles (384-322 a. C.), poseen una validez absoluta, independientemente de la materia a la que sean aplicadas. En cita de Weyl 1946: "De acuerdo con su punto de vista y su interpretación de la historia (de Brouwer), la lógica clásica fue abstraída de la matemática de los conjuntos finitos y sus subconjuntos... Olvidando este limitado origen, se entendió después erróneamente que la lógica es algo que se encuentra por encima de y que es anterior a toda matemática, y finalmente se la aplicó, sin justificación, a la matemática de conjuntos infinitos".

Dos obvios ejemplos harán ver que principios válidos para el pensamiento referido a conjuntos finitos, no extienden necesariamente su validez al ámbito de los conjuntos infinitos. Uno es el principio de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes propias, cuando se lo aplica a correspondencias de 1-1 entre conjuntos (§ § 1, 3, 4). Otro es el principio de que un conjunto de números naturales contiene un máximo.

Un principio de lógica clásica, que vale cuando se razona sobre conjuntos finitos y que Brouwer no acepta para conjuntos infinitos, es la ley de tercero excluido. Esta ley en su forma general, dice *para toda proposición A, o A o no A.* Sea ahora *A* la proposición *existe un miembro del conjunto (o dominio) D* que tiene la propiedad *P.* Entonces *no A* es equivalente a *todo miembro de D no tiene la propiedad P,* o, en otras palabras, *todo miembro de D tiene la propiedad no-P.* Así pues la ley, aplicada a esta determinada *A*, resulta *o existe un miembro de D que tiene la propiedad P, o todo miembro de D tiene la propiedad no-P.*

A efectos de precisión, convengamos en especificar que *P* sea una propiedad tal que para cualquier miembro dado de *D*, podamos determinar si ese miembro tiene o no la propiedad *P.*

Supóngase ahora que *D* es un conjunto finito. En tal caso podríamos examinar uno tras otro todo miembro de *D*, y de este modo o bien hallar un miembro que tenga la propiedad *P*, o verificar que todos los miembros tienen la propiedad *no-P.* Pueden suscitarse dificultades prácticas, p. ej., cuando *D* es un conjunto muy amplio que cuente, digamos, con un millón de miembros, o incluso en el caso de que *D* sea pequeño, cuando pueda resultar tedioso determinar si un miembro dado tiene o no la propiedad *P.* No obstante, la posibilidad de completar la indagación existe en principio. Es esta posibilidad la que constituye a la ley de tercero excluido, a juicio de Brouwer, en principio válido para el razonamiento que se refiera a conjuntos finitos *D* y propiedades *P* del tipo especificado.

Para un conjunto infinito *D*, la situación es fundamentalmente diferente. Ya no es posible, en principio, llevar a cabo la búsqueda a través del entero conjunto *D.*

En semejante situación no queda tampoco salvaguardada la ley para Brouwer si se sustituye la imposible indagación a través de todos los miembros del conjunto infinito *D*, por una solución matemática del problema propuesto. Podemos en algunos casos, esto es, para algunos conjuntos *D* y propiedades *P*, tener éxito al encontrar un miembro de *D* que tenga la propiedad *P*; y en otros casos, tener éxito al mostrar, por razonamiento matemático, que todo miembro de *D* tiene la propiedad *no-P*, p. ej. al deducir una contradicción del supuesto de que un miembro arbitrario (esto es, no especificado) de *D* tenga la propiedad *P.* (Un ejemplo del segundo tipo de solución es el caso en que *D* es el conjunto de todos los pares ordenados $(m, n)$ de enteros positivos, y *P* es la propiedad que tiene un par $(m, n)$ de que

$m^2 = 2n^2$. El resultado es entonces el descubrimiento de Pitágoras de que $\sqrt{2}$ es irracional). Pero no tenemos base para afirmar la posibilidad de obtener en todo caso o el uno o el otro de estos tipos de solución.

Un ejemplo de la historia de la matemática moderna lo suministra el "último teorema" de Fermat, que afirma que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución para enteros positivos $x$, $y$, $z$, $n$, siendo $n > 2$. (Para $n = 2$, existen triplos de enteros positivos, denominados números pitagóricos, que satisfacen esta ecuación, p. ej., $x = 3, y = 4, z = 5$, o $x = 5, y = 12, z = 13$). Aquí $D$ es el conjunto de todos los cuádruplos ordenados $(x, y, z, n)$ de enteros positivos, siendo $n > 2$, y $P$ es la propiedad que tiene un cuádruplo $(x, y, z, n)$ de que $x^n + y^n = z^n$. Hacia 1637 Fermat escribió al margen de su copia del "Diophantus" de Bachet, que había descubierto una demostración realmente maravillosa de este "teorema", aunque el margen era demasiado estrecho para contenerla. A pesar de un inmenso dispendio de esfuerzo, nadie ha logrado desde entonces demostrar o refutar el alegado "teorema"; e incluso nos falta, por añadidura, el conocimiento de un método sistemático cuya prosecución haya de conducir, en principio, y definitivamente, a una determinación de su verdad o falsedad. (Para más detalles, cfr. Vandiver 1946).

La no aceptación, por parte de Brouwer, de la ley de tercero excluido para conjuntos infinitos $D$, no reposa en el hecho de que los matemáticos hayan fracasado hasta el presente en el intento de resolver este problema particular, o cualquier otro problema particular. Para hacer frente a esta objeción habría que suministrar un método adecuado en principio para solucionar no solamente todo problema matemático relevante no resuelto, sino también todo otro que pueda ser propuesto jamás en el futuro. Hasta qué punto es posible que un tal método sea encontrado, es cosa que, por el momento, abandonamos a la especulación del lector. En un estadio ulterior del libro volveremos sobre la cuestión (§ 60).

A la matemática familiar, con sus métodos y lógica tal y como ha sido desarrollada con anterioridad a la crítica de Brouwer o no teniendo en cuenta esta crítica, la denominamos *clásica*; a la matemática, métodos o lógica que emplean Brouwer y su escuela, le damos el nombre de *intuicionista*. La matemática clásica incluye partes que son intuicionistas y partes que son no-intuicionistas.

La matemática no-intuicionista, que culminó en las teorías de Weierstrass, Dedekind y Cantor, y la matemática intuicionista de Brouwer, difieren esencialmente en su consideración del infinito. En el primer caso, el infinito es tratado como *actual* o *completo* o *extendido* o *existencial*. Un conjunto infinito es considerado como algo que existe como totalidad completa, con anterioridad o independencia de cualquier proceso humano de generación o construcción, y como si pudiera desplegarse por completo ante nuestra inspección. En el segundo caso, el infinito es tratado tan sólo como *potencial* o *en devenir* o *constructivo*. El reconocimiento de esta distinción, en el caso de magnitudes infinitas, se remonta a Gauss, quien escribió en 1831: "Protesto... contra el uso de una magnitud infinita como algo ya completo, lo que nunca puede permitirse en matemática" (Werke VIII, pág. 216).

De acuerdo con Weyl 1946, "Brouwer estableció claramente, y a mi entender más allá de toda duda, que no hay evidencia que soporte la creencia en el carácter existencial de la totalidad de los números naturales... La secuencia de números que va creciendo más allá de todo límite ya alcanzado mediante el paso al número siguiente, es una multitud de posibilidades abierta al infinito; permanece siempre en estado de creación, y no es un dominio cerrado de cosas existentes en sí mismas. Que ciegamente convirtamos lo uno en lo otro, es la verdadera fuente de nuestras

dificultades, incluyendo las antinomias –una fuente de naturaleza más fundamental que el indicado principio russelliano del círculo vicioso. Brouwer abrió nuestros ojos y nos hizo ver en qué medida la matemática clásica, nutrida por una creencia en el 'absoluto' que trasciende todas las posibilidades humanas de realización, va más allá de tales enunciados en tanto que pretenden ostentar significado real y verdad fundada en evidencia".

De esta actitud con respecto al infinito, surge la crítica de Brouwer a la lógica clásica cuando ésta se aplica a un conjunto infinito $D$ (digamos, al conjunto de los números naturales). Ello se ve claramente considerando los significados que adjudica el intuicionista a las varias formas de enunciados.

Un enunciado general, *todo número natural n tiene la propiedad P*, o, más brevemente, *para todo n*, $P(n)$, es entendido por el intuicionista como una aserción hipotética al efecto de que, si cualquier número particular $n$ nos fuese dado, podríamos estar seguros de que ese número $n$ tiene la propiedad $P$. Este es un significado que no requiere tomar en consideración la clásica infinitud completa de los números naturales.

La inducción matemática es un ejemplo de método intuicionista para demostrar proposiciones de carácter general acerca de los números naturales. Una demostración por inducción de la proposición *para todo n*, $P(n)$, muestra que cualquier número dado $n$ tendría que tener la propiedad $P$, mediante un razonamiento que utiliza sólo los números de 0 a $n$ (§ 7). Sin duda, para que una demostración particular por inducción sea intuicionista, es preciso que los razonamientos utilizados dentro de su base y del paso de inducción sean también intuicionistas.

Un enunciado de existencia, *existe un número natural n que tiene la propiedad P*, o más brevemente, *existe un n tal que* $P(n)$, tiene para el intuicionista el significado de una comunicación parcial (o abstracta) de un enunciado que suministra un ejemplo particular de un número natural $n$ que tiene la propiedad $P$, o al menos suministra un método por el cual podría hallarse, en principio, un tal ejemplo.

Por consiguiente, una demostración intuicionista de la proposición existe un $n$ *tal que* $P(n)$ ha de ser *constructiva* en el siguiente (estricto) sentido. La demostración exhibe realmente un ejemplo de un $n$ tal que $P(n)$, o al menos indica un método por el cual podría uno, en principio, hallar un tal ejemplo.

En la matemática clásica ocurren demostraciones *no-constructivas* o *indirectas* de existencia, que los intuicionistas no aceptan. Por ejemplo, para demostrar *existe un n tal que* $P(n)$, el matemático clásico puede deducir una contradicción de la suposición *para todo n, no* $P(n)$. Lo mismo para la lógica clásica que para la intuicionista, ello da, por reductio ad absurdum, *no para todo n, no* $P(n)$. La lógica clásica permite que este resultado sea transformado en *existe un n tal que* $P(n)$, pero no (en general) la intuicionista. Una tal demostración clásica de existencia no nos deja más cerca de tener un ejemplo de un número $n$ tal que $P(n)$ de lo que estábamos antes de haberla comenzado (aunque a veces podemos quedar después en disposición de descubrir un tal número por otro método). El intuicionista se guarda de aceptar semejante demostración de existencia, puesto que la conclusión de la misma, *existe un n tal que* $P(n)$, no puede tener para él otro significado que el de ser una referencia a un ejemplo de un número $n$ tal que $P(n)$, y este ejemplo no ha sido producido. El significado clásico, según el cual en algún lugar de la infinita totalidad completa de los números naturales ocurre un $n$ tal que $P(n)$, no es aceptable para el intuicionista, puesto que no concibe a los números naturales como una totalidad completa.

Para considerar otro ejemplo de demostración no-constructiva de existencia, supóngase que ha sido mostrado para una cierta propiedad $P$, por métodos intuicionistas, que si el "último teorema" de Fermat es verdadero, entonces el número 5013 tiene la propiedad $P$, y también que si el "último teorema" de Fermat es falso, entonces 10 tiene la propiedad $P$. Clásicamente ello es suficiente para demostrar la existencia de un número $n$ tal que $P(n)$. Pero con el problema del "último teorema" irresuelto, Brouwer desaprobaría una tal demostración de existencia, porque no ha sido aducido ningún ejemplo. No sabemos que 5013 sea un ejemplo, ni sabemos que 10 sea un ejemplo, ni conocemos procedimiento alguno que nos condujese en principio (esto es, aparte de las limitaciones prácticas motivadas por la longitud de los procedimientos que podamos emplear) a un número particular del cual estuviésemos seguros que fuese un ejemplo. Brouwer aceptaría meramente lo indicado como demostrativo de la implicación (o enunciado condicional) *si $F$ o no $F$, entonces existe un $n$ tal que $P(n)$*, donde $F$ es el enunciado *para todo* $x, y, z > 0$ *y* $n > 2$, $x^n + y^n \neq z^n$. El matemático clásico, merced a su ley de tercero excluido, acepta la premisa *$F$ o no $F$* de esta implicación, y así puede inferir su conclusión *existe un $n$ tal que $P(n)$*. Pero en el presente estado de conocimiento, Brouwer no da por aceptada la premisa *$F$ o no $F$*.

Como resulta manifiesto en este ejemplo, los métodos intuicionistas deben ser distinguidos de los no-intuicionistas en el caso de las definiciones al igual que en el caso de las demostraciones. En el presente estado de nuestro conocimiento, Brouwer no acepta *el número $n$ que es igual a* 5013 *si $F$, e igual a* 10 *si no $F$* como una definición válida de un número natural $n$.

Una disyunción *$A$ o $B$* constituye, para el intuicionista, una comunicación incompleta de un enunciado en el que se nos dice que $A$ vale o que $B$ vale, o se nos da cuando menos un método por el que podamos elegir, partiendo de $A$ y $B$, un extremo que sea válido. Una conjunción *$A$ y $B$* significa que valen tanto $A$ como $B$. Una implicación *$A$ implica $B$* (o *si $A$, entonces $B$*) expresa que $B$ se sigue de $A$ por razonamiento intuicionista, o, más explícitamente, que se posee un método que, a partir de una demostración cualquiera de $A$, suministraría una demostración de $B$; y una negación *no $A$* (o *$A$ es absurdo*) expresa que una contradicción *$B$ y no $B$* se sigue de $A$ por razonamiento intuicionista, o, más explícitamente, que se posee un método que suministraría, a partir de una demostración cualquiera de $A$, una demostración de una contradicción *$B$ y no $B$* (o de un enunciado del que ya se sabe que es absurdo, tal como $1 = 0$). Comentarios adicionales a estos significados intuicionistas se aducirán en § 82.

En palabras de Heyting 1934, "De acuerdo con Brouwer, la matemática se identifica con la parte exacta de nuestro pensamiento... ninguna ciencia, ni la filosofía o la lógica en particular, puede ser un presupuesto de la matemática. Sería circular aplicar como medios de demostración cualesquiera principios filosóficos o lógicos, ya que los conceptos matemáticos están ya presupuestos en la formulación de tales principios". No queda para la matemática "más fuente que una intuición, que pone sus conceptos e inferencias ante nuestros ojos como inmediatamente claros". Esta intuición "no es otra cosa que la facultad de considerar separadamente conceptos e inferencias particulares que ocurren de modo regular en el pensamiento ordinario". La idea de la serie de números naturales puede ser analizada tomando como base la posibilidad, en primer lugar, de considerar un objeto o experiencia como algo que nos es dado separadamente del resto del universo, en segundo lugar, de distinguir ese objeto o experiencia respecto de cualquier otro, y en tercer lugar,

de imaginar una repetición ilimitada del segundo proceso. "En la matemática intuicionista no se extraen inferencias de acuerdo con normas fijas, que puedan ser coleccionadas en una lógica, sino que cada inferencia singular es inmediatamente comprobada en su evidencia". Pero también "Hay reglas generales, merced a las cuales pueden formarse, de un modo intuitivamente claro, nuevos teoremas a partir de teoremas matemáticos dados; la teoría de estas conexiones puede ser tratada en una 'lógica matemática', que es así una rama de la matemática y no tiene, sensiblemente, aplicación fuera de la matemática".

Volvemos ahora a la cuestión: ¿en qué proporción intervienen los métodos no-intuicionistas en la matemática clásica?

El hecho de que en la teoría elemental de números clásica ocurran métodos no-intuicionistas es significativo, puesto que ello permite que la teoría elemental de números sirva como el primer y más simple campo de comprobaciones para una investigación de fundamentos que se atenga al pensamiento intuicionista y formalista. Nos ocuparemos casi por entero en el presente libro, de la teoría elemental de números.

De hecho, en el cuerpo existente de la teoría elemental de números, los métodos no-intuicionistas no juegan un gran papel. La mayoría de las demostraciones no-constructivas de existencia pueden ser reemplazadas por demostraciones constructivas.

Por otra parte, en el análisis (y en ramas aún más trascendentales de la matemática) los métodos no-intuicionistas de definición y demostración invaden por entero la metodología. Los números reales en la representación de la cortadura de Dedekind, son conjuntos infinitos de racionales (§ 9). Así, al tratarlos como objetos al modo usual, estamos utilizando ya el infinito completo. En particular, aplicamos la ley de tercero excluido a estos conjuntos en relación con las definiciones más simples de esta materia. Por ejemplo, a fin de mostrar que para dos números reales cualesquiera x e y, o bien $x < y$, o $x = y$, o $x > y$, utilizamos dos veces dicha ley, así: O existe un racional $r$ en y que no pertenece a x, o todos los racionales en y pertenecen a x; y similarmente intercambiando x e y. En la definición impredicativa de m.c.s. **M** (§ 9 (A), § 12), utilizamos del mismo modo la totalidad de los números reales. Otra instancia de razonamiento no-constructivo ocurre en la demostración de (B) § 9, donde suponíamos el derecho a elegir un elemento $\mathbf{a}_n$ de entre un conjunto $\mathbf{M}_n$, simultáneamente para los valores infinitamente numerosos de $n$, sin aducir propiedad alguna que determinase el elemento a elegir. (Es éste un caso del 'axioma de elección', por vez primera indicado como supuesto por Zermelo 1904. De él hicimos uso también para el Teorema B § 4).

Aun cuando el infinito completo ha sido proscrito con respecto a magnitudes (como Gauss nos recomendaba hacer), reaparece con pleno vigor en lo que hace a colecciones. Hilbert y Bernays describen la situación en sus "Grundlagen der Mathematik (Fundamentos de la matemática)", vol. 1 (1934), pág. 41, de este modo: "La... aritmetización del análisis no queda exenta de residuos, en la medida en que se introducen ciertas concepciones sistemáticas fundamentales que no pertenecen al dominio del pensamiento aritmético intuitivo. La perspectiva que nos deja la fundamentación rigurosa del análisis consiste en lo siguiente: que esas pocas suposiciones fundamentales bastan para construir la teoría de las magnitudes como una teoría de conjuntos de enteros".

La cuestión inmediata es: ¿qué tipo de matemática puede ser construido ateniéndose a las restricciones intuicionistas? Si la matemática clásica existente pudie-

ra ser reconstruida ateniéndose a las restricciones intuicionistas, sin un excesivo incremento en la labor requerida y sin sacrificios demasiado grandes en los resultados obtenidos, el problema de su fundamentación parecía estar resuelto.

Los intuicionistas han creado una matemática totalmente nueva, incluyendo una teoría del continuo y una teoría de conjuntos (cfr. Heyting 1934). Esta matemática emplea conceptos y hace distinciones que no se encuentran en la matemática clásica; y es, considerada en sí misma, muy atractiva. Como sustituto de la matemática clásica ha resultado ser menos poderosa que ésta, y en muchos aspectos, más complicada en su desarrollo. Por ejemplo, en la teoría del continuo de Brouwer no podemos afirmar que cualesquiera dos números reales $a$ y $b$ son o iguales o desiguales. Nuestro conocimiento acerca de la igualdad o la desigualdad de $a$ y $b$ puede ser más o menos específico. Por $a \neq b$ se significa que $a = b$ conduce a una contradicción, mientras $a \# b$ es un tipo de desigualdad más fuerte que significa que puede aducirse un ejemplo de un número racional que separa $a$ y $b$. Sin duda $a \# b$ implica $a \neq b$. Pero hay pares de números reales $a$ y $b$ respecto de los cuales no se sabe que o $a = b$, o $a \neq b$ (o $a \# b$). Es manifiesto que tales complicaciones reemplazan la teoría clásica del continuo por algo de forma mucho menos clara.

Pese a ello, la posibilidad de una reconstrucción intuicionista de la matemática clásica, de un modo diferente que envuelve reinterpretación (emprendido recientemente) no puede ser excluida (cfr. § 81).

§ 14. **Formalismo.** Brouwer ha revelado lo que la tendencia genética o constructiva envuelve en sus últimos refinamientos; Hilbert hace lo mismo con respecto a la tendencia axiomática o existencial (§ 8). El método axiomático había cobrado ya un mayor rigor desde la axiomática material de Euclides a la axiomática formal de los "Grundlagen der Geometrie" (1899) de Hilbert. El formalismo es el resultado de un nuevo paso, encaminado a afrontar la crisis causada por las paradojas y el desafío de Brouwer y Weyl a la matemática clásica. Este paso fue previamente bosquejado por Hilbert en 1904, y seriamente acometido por él y sus colaboradores Bernays, Ackermann, von Neumann y otros, desde 1920 (cfr. Bernays 1935a, Weyl 1944).

Hilbert concedía que las proposiciones de la matemática clásica que envuelven el infinito completo van más allá de la evidencia intuitiva. Pero rehusó seguir a Brouwer y abandonar por esa razón la matemática clásica.

Para salvar la matemática clásica frente a la crítica intuicionista, propuso un programa que podemos establecer preliminarmente como sigue: la matemática clásica deberá ser formulada como una teoría axiomática formal, y deberá demostrarse que esta teoría es consistente, esto es, libre de contradicción.

Con anterioridad a esta propuesta de Hilbert, el método utilizado en demostraciones de consistencia para teorías axiomáticas, especialmente en el primitivo pensamiento axiomático de Hilbert, era el de suministrar un 'modelo'. Un *modelo* para una teoría axiomática es simplemente un sistema de objetos elegidos de alguna otra teoría y que satisface los axiomas en cuestión (§ 8). Esto es, con cada objeto o noción primitiva de la teoría axiomática, se correlaciona un objeto o noción de la otra teoría, de modo tal que los axiomas se tornan (o corresponden a) teoremas de esa otra teoría. Si esta última es consistente, entonces la teoría axiomática ha de serlo también. Pues supóngase que fuese deducible, en la teoría axiomática, una contradicción a partir de los axiomas. Entonces sería deducible una contradicción,

en la otra teoría, a partir de los correspondientes teoremas al efectuar las correlativas inferencias sobre los objetos que constituyen el modelo.

En un famoso y antiguo ejemplo, Beltrami (1868) mostró que las líneas en la geometría plana no euclidiana de Lobatchevsky y Bolyai (la geometría hiperbólica plana) pueden ser representadas por las geodésicas en una superficie de curvatura negativa constante en el espacio euclidiano. Así la geometría hiperbólica plana es consistente, si la geometría euclidiana es consistente. (Otro modelo de similar intención fue suministrado por Klein (1871) en términos de geometría proyectiva plana con métrica de Cayley (1859); lo cual puede ser interpretado como un modelo en el plano euclidiano. Cfr. Young 1911, Lecciones II y III).

La geometría analítica de Descartes (1619), es decir, el uso de coordenadas para representar objetos geométricos, constituye un método general para establecer la consistencia de teorías geométricas sobre la base del análisis, esto es, la teoría de los números reales.

Las demostraciones de consistencia por el método de modelo son relativas. La teoría para la cual se construye un modelo es consistente si lo es aquélla de donde se extrajo el modelo.

Sólo cuando esta última teoría es inatacable, puede darnos el modelo una demostración absoluta de consistencia. Veblen y Bussey 1906, consiguieron demostraciones absolutas de consistencia para ciertas geometrías proyectivas rudimentarias mediante el establecimiento de modelos que sólo requerían una clase finita (sic!) de objetos para representar los puntos (cfr. Young 1911, Lecciones IV y V).

En lo que hace a la obtención de una demostración absoluta de la consistencia de la teoría de números clásica, del análisis, y de la teoría de conjuntos (convenientemente axiomatizada), el método del modelo no ofrece esperanza. No disponemos de fuente matemática alguna capaz de brindar un modelo que no nos retrotraiga en definitiva a una de las teorías previamentè reducidas a ella por el método del modelo en cuestión.

La imposibilidad de recurrir para un modelo al mundo perceptual o físico, es razonada por Hilbert y Bernays 1934, págs. 15-17. Dichos autores ilustran tal imposibilidad considerando la primera paradoja de Zenón (siglo quinto a. C.), según la cual un corredor no puede realizar su carrera en un tiempo finito. Porque antes de que pueda hacerlo, tendrá que cubrir la primera mitad de su carrera, luego el siguiente cuarto, después el octavo siguiente, y así sucesivamente. Pero esto requeriría de él que completase un número infinito de actos. La solución usual de la paradoja consiste en observar que la serie infinita de intervalos de tiempo requerida para recorrer los sucesivos segmentos, converge. "De hecho hay también una solución mucho más radical de la paradoja. Consiste en considerar que en modo alguno estamos obligados a creer que la representación matemática espacio-temporal del movimiento sea físicamente significativa para intervalos de espacio y tiempo arbitrariamente pequeños; sino que más bien tenemos fundadas bases para suponer que ese modelo matemático extrapola los hechos de un cierto ámbito de experiencia (a saber, los movimientos dentro de los órdenes de magnitud hasta el presente accesibles a nuestra observación) en el sentido de una simple construcción conceptual, de modo similar a aquél según el cual la mecánica del continuo lleva a cabo una extrapolación consistente en suponer que la materia ocupa el espacio de una forma continua... La situación es análoga en todos aquellos casos en que se cree posible exhibir directamente un infinito (actual) en tanto que dado por la experiencia o la percepción... Un examen más detenido mostrará entonces que un infinito no se nos

da realmente en absoluto, sino que es primero interpolado o extrapolado mediante un proceso intelectual."

Por consiguiente, si ha de demostrarse la consistencia de la teoría de números (incluyendo sus porciones no-intuicionistas), del análisis, etc., ello ha de ser por otro método. La contribución de Hilbert está, cabalmente, en haber concebido un nuevo enfoque directo, y haber advertido su conexión con la axiomatización. Este método directo está implícito en el significado de la consistencia (al menos tal como la entendemos ahora), el cual es a saber, que en la teoría deducida a partir de los axiomas no pueda surgir una contradicción lógica (que una proposición *A* y su negación *no A* sean ambas teoremas). Así para demostrar directamente la consistencia de una teoría, habría que demostrar una proposición acerca de la teoría misma, esto es, que verse específicamente sobre todas las posibles demostraciones de teoremas en la teoría. La teoría matemática cuya consistencia se espera demostrar, pasa a ser entonces el objeto de un estudio matemático, al que Hilbert denomina "metamatemática" o "teoría de la demostración". En la siguiente sección examinaremos cómo es esto posible y cuáles pueden ser los métodos de su estudio.

Pasemos entretanto a considerar con más detención la importancia de la propuesta hilbertiana. Hilbert (1926, 1928) traza una distinción entre enunciados 'reales' e 'ideales' en la matemática clásica, que es en esencia como sigue. Los *enunciados reales* son aquéllos cuyo uso entraña que tienen un significado intuitivo; *enunciados ideales* son aquéllos cuyo uso no es tal. Los enunciados que corresponden al tratamiento del infinito en tanto que actual son ideales. La matemática clásica añade los enunciados ideales a los reales, al objeto de retener las sencillas reglas de la lógica aristotélica en el razonamiento acerca de conjuntos infinitos.

La adición de 'elementos ideales' a un sistema para completar su estructura y simplificar la teoría del mismo, es un común y fructífero procedimiento en la matemática moderna. Por ejemplo, en la geometría plana euclidiana, dos líneas distintas se cortan en un punto único, excepto cuando las líneas son paralelas. Para remover esta excepción, Poncelet, en su geometría proyectiva (1822), introdujo un *punto en el infinito* para cada una de las líneas originales, tal que líneas paralelas tienen el mismo punto en el infinito, y líneas no paralelas tienen puntos diferentes en el infinito. La totalidad de esos puntos en el infinito constituye una *línea en el infinito.* Cuando una línea gira sobre un punto del plano proyectivo, su punto en el infinito traza la línea en el infinito. Merced a este recurso, la relación de incidencia entre puntos y líneas es simplificada. Dos puntos distintos determinan una línea única (que está 'sobre' los dos puntos, es decir, la línea pasa por ambos); y dos líneas distintas determinan un punto único (que está sobre ambas líneas). Estas dos proposiciones son *duales* entre sí. Hay un principio general, denominado el *principio de dualidad*, en geometría proyectiva plana, que dice que para cada teorema de la teoría, el enunciado obtenido a partir de él por intercambio de las palabras "punto" y "línea" es también un teorema.

A título de nuevos ejemplos de la adición de elementos a un sistema de elementos previamente constituido con vistas a la consecución de un determinado propósito teorético, podemos considerar las sucesivas ampliaciones del sistema de números partiendo, por ejemplo, de los números naturales, agregando después los enteros negativos, después las fracciones, después los irracionales, y, finalmente, los números imaginarios. La agregación de los enteros negativos simplifica la teoría de la adición haciendo siempre posible la operación inversa (sustracción); etc.

El problema de Hilbert es aproximadamente análogo al que existió cuando empe

zaron a utilizarse números imaginarios. Puesto que entonces no se los entendía con claridad, hubiera cabido proponer la justificación de su uso ante los que abrigaban dudas al respecto, demostrando que si los imaginarios se usan de acuerdo con reglas prescritas para derivar un resultado expresado solamente en términos de reales, entonces ese resultado ha de ser correcto. Es obvio que ahora no se requiere ya semejante tipo de justificación de los imaginarios con relación a los reales, puesto que ha llegado a conocerse su interpretación por puntos en el plano (Wessel 1799) y por pares de reales (Gauss 1831).

Esta analogía sugiere el siguiente interrogante. Si se lograse una demostración de consistencia, en el sentido de Hilbert, para una porción de la matemática clásica que comprendiese tanto enunciados reales como ideales, ¿podríamos inferir entonces que los enunciados reales en ella demostrados por una excursión a través de lo ideal son intuicionistamente verdaderos? Hasta qué medida podríamos realizar tal inferencia, es cosa que se discutirá más tarde (final § 42, final § 82); ello dependera de qué razonamientos sean los cubiertos por la demostración de consistencia, y qué clase de enunciados sea la que se tome por real. En tal medida, el éxito en el programa de Hilbert proporcionaría a la matemática clásica un papel en cuanto método de demostración para los intuicionistas.

En los primeros años subsiguientes a la aparición del programa hilbertiano se suscitó una incisiva controversia entre Brouwer y Hilbert. Brouwer 1923 decía, "Una teoría incorrecta que aún no ha sido detenida por una contradicción no es por ello menos incorrecta, de la misma manera que un astuto criminal que elude el fallo de la justicia no es por ello menos criminal", Hilbert 1928 redargüía: "Despojar al matemático de la ley de tercero excluido sería algo así como negar al astrónomo el telescopio o el uso de sus puños al boxeador".

Según Brouwer (1928) y Heyting (1931-2, 1934), es posible el acuerdo entre intuicionismo y formalismo, supuesto que (como en von Neumann 1931-2) el formalista se abstenga de atribuir a la matemática clásica no-intuicionista un significado material o contenido, en términos del cual la demostración de consistencia justifique a aquélla. Una tal justificación, dice Brouwer, "encierra un círculo vicioso, puesto que esa justificación depende de la corrección (material –inhaltlich–) de la proposición que afirma que a partir de la consistencia de un enunciado se sigue la corrección de ese enunciado, esto es, depende de la corrección (material) de la ley de tercero excluido", que es parte de la matemática formalista que ha de ser justificada.

El punto delicado en la posición formalista está en explicar cómo pueda ser significativa la matemática clásica no-intuicionista, después de haber estado inicialmente de acuerdo con los intuicionistas en que los teoremas de ella carecen de un significado real en términos del cual sean verdaderos.

La matemática clásica construye teorías en un sentido muy diferente al de la matemática intuicionista. Hilbert 1928 dice: "no es en modo alguno razonable establecer en general el requisito de que cada fórmula separada sea interpretable tomada por sí misma...". En física teórica "sólo ciertas combinaciones y consecuencias de las leyes físicas pueden ser comprobadas experimentalmente –de modo semejante, en mi teoría de la demostración, sólo los enunciados reales son inmediatamente susceptibles de una verificación".

Una teoría en matemática clásica puede ser considerada como un esquema de sistematización simple y elegante, por virtud del cual una variedad de enunciados reales (presumiblemente) verdaderos, que anteriormente aparecían como heterogé-

neos y sin relacionar, y a menudo previamente desconocidos, son comprendidos como consecuencias de los teoremas ideales en la teoría. (Cfr. von Neumann 1947, Einstein 1944, pág. 288).

El ejemplo de la teoría analítica de números muestra que teoremas del análisis (carentes de un significado aceptable para los intuicionistas) comportan a menudo teoremas de teoría de números, que son significativos intuicionistamente, y para los cuales no han sido descubiertas demostraciones no analíticas, o bien, si lo han sido, son mucho más complicadas.

Para que una teoría sea evaluable de esta manera, los enunciados reales por ella comprendidos han de ser verdaderos. Primitivamente, los matemáticos suponían que ello estaba garantizado por la verdad de los teoremas que nosotros reconocemos ahora como ideales; al presente, esperamos, en cambio, garantizarlo por una demostración de consistencia.

Por fáciles estadios de transición, el proceso de teorización puede remontarse a niveles superiores, desde los cuales sólo muy indirectamente se ocupa de la sistematización de las proposiciones reales al nivel original, sino más bien de la sistematización de proposiciones ideales a niveles intermedios. En este sentido tiene interés determinar si las construcciones teoréticas cada vez más elevadas se añaden de hecho al cuerpo de proposiciones reales de la especie original que comprenden bajo sí, al igual que averiguar si de hecho permiten simplificaciones sustanciales de las demostraciones de esas proposiciones previamente comprendidas (Cfr. final § 42).

Es discutible hasta qué punto está justificada una estructura teorética para sistematizar una clase dada de verdades reales, p. ej., si el análisis clásico está justificado como una sistematización de verdades de teoría de números. Históricamente, la teoría analítica de números fue un subproducto, y el ímpetu real para el desarrollo del análisis clásico vino de las ciencias, incluyendo a la geometría en su aplicación física.

Hilbert y Bernays 1934 subrayan que en las ciencias "nos ocupamos... predominantemente con teorías que no reproducen por completo el actual estado de cosas, sino que representan una *idealización simplificadora* de dicho estado de cosas, y en ello reside su significado" (págs. 2-3). El análisis sirve como una "formación de ideas (Ideenbildung)", en términos de las cuales pueden ser expresadas esas teorías, o a las cuales pueden éstas ser reducidas por el método de modelos. Una demostración de la consistencia del análisis nos aseguraría de la consistencia de las idealizaciones efectuadas en esas teorías (pág. 19).

Weyl (1926, 1928, 1931) observa que en la física teórica no son los enunciados separados los que son confrontados con la experiencia, sino el sistema teórico en su totalidad. Lo que la física aporta no es una descripción verdadera de lo que es dado, sino una construcción teorética, puramente simbólica del mundo. (Asimismo arguye este autor que nuestro interés teorético no reside exclusiva o siquiera primariamente, en los 'enunciados reales', p. ej. que este indicador coincide con esta división de la escala, sino más bien en las suposiciones ideales, p. ej., la suposición del electrón como un quantum eléctrico universal). La tarea de determinar cuál sea la 'verdad' u objetividad que corresponde a esta construcción teorética del mundo que va más allá de lo dado, es una profunda cuestión filosófica. Ello está íntimamente conectado con la cuestión de saber qué nos motiva a tomar como base el sistema axiomático particular elegido. A este fin, la consistencia es un argumento necesario, pero no suficiente. Cuando la matemática es considerada sólo en sí misma. Weyl se restringe con Brouwer a las verdades intuitivas; no encuentra

motivo suficiente para ir más allá. Pero cuando la matemática se funde completamente con la física en el proceso de construcción teorética del mundo, se inclina por Hilbert.

Un veredicto sobre el pensamiento de los formalistas dependerá en parte de los frutos del programa que proponen. Este programa propugna una disciplina denominada "metamatemática", por la que pretenden, en particular, establecer la consistencia de la matemática clásica.

Por adelantado advertimos que se hallará que la metamatemática proporciona una técnica matemática rigurosa para la investigación de gran variedad de problemas fundacionales en matemática y en lógica, entre los cuales el problema de la consistencia es solamente uno. Por ejemplo, métodos metamatemáticos son aplicados ahora en estudios de sistematización de la matemática que han tenido lugar en las escuelas logicista e intuicionista, lo mismo que en la de Hilbert. (E inversamente, la metamatemática debe mucho en sus comienzos a las investigaciones logicistas e intuicionistas). Nuestro propósito en el resto del presente libro no es alcanzar un veredicto que mantenga o rechace el punto de vista formalista en cualquier versión preasignada; sino ver en qué consiste el método metamatemático y aprender algunas de las cosas que han sido descubiertas mediante el cultivo del mismo.

§ 15. **Formalización de una teoría.** Nos encontramos ahora en disposición de abordar un programa que hace de una teoría matemática el objeto de estudio matemático exacto. En una teoría matemática estudiamos un sistema de objetos matemáticos. ¿Cómo puede una teoría matemática ser a su vez objeto de estudio matemático?

El resultado de la actividad del matemático se concreta en proposiciones, es decir, en las proposiciones afirmadas o teoremas de la teoría matemática de que se trate. No podemos abrigar la esperanza de estudiar en términos exactos lo que sucede en la mente del matemático, pero podemos contemplar el sistema de esas proposiciones.

El sistema de esas proposiciones ha de ser expuesto de manera totalmente explícita. No es que sea posible incluir en una lista todas las proposiciones que le pertenezcan, pero sí indicar al discípulo y al estudioso de la teoría todas las condiciones que determinan qué proposiciones valen en esa teoría.

En un primer paso, las proposiciones de la teoría deberían ser ordenadas deductivamente, especificando como axiomas (o postulados) a algunas de ellas, a partir de las cuales sean lógicamente deducibles las demás.

Este paso no se habrá llevado a cabo hasta tanto no hayan sido expresadas mediante axiomas todas las propiedades de los términos no definidos o técnicos de la teoría que interesan para la deducción de los teoremas. Entonces sería posible realizar las deducciones tratando a los términos técnicos como palabras desprovistas en sí mismas de significado. Porque sostener que poseen significados necesarios para la deducción de los teoremas, que fuesen distintos de los derivados a partir de los axiomas que los gobiernan, conduce a reconocer que no todas las propiedades de esos términos que interesan para las deducciones han sido expresadas por los axiomas. Cuando se dejan de este modo fuera de consideración los significados de los términos técnicos, hemos alcanzado el punto de vista de la axiomática formal (§ 8).

Los términos técnicos continúan poseyendo atributos gramaticales, puesto que son nombres, adjetivos, verbos, etc. Quedan además términos ordinarios o lógicos,

cuyos significados se emplean en las deducciones. Por lo demás el punto en que cesa la axiomatización formal es arbitrario, puesto que no existe base absoluta para la distinción entre los términos técnicos y los ordinarios.

En cualquier caso, distamos aún de haber alcanzado nuestro objetivo de hacer explícitas todas las condiciones que determinan qué proposiciones valen en la teoría. Porque no hemos especificado los principios lógicos a utilizar en las deducciones. Estos principios, como ahora bien sabemos (§ 13), no son los mismos para todas las teorías.

En orden a la explicitación de tales condiciones, se requiere un segundo paso, que completa el previamente realizado, concerniente a los llamados términos técnicos, en lo que respecta a la parte no gramatical de sus significados. Todos los significados de todas las palabras quedan fuera de consideración, y todas las condiciones que gobiernan su uso en la teoría son establecidas explícitamente. Los principios lógicos, que intervenían primero implícitamente mediante los significados de los términos ordinarios, cobrarán ahora presencia, en parte tal vez mediante nuevos axiomas, y en cierta parte al menos mediante reglas que permiten inferir una sentencia de otra o de otras. Comoquiera que hemos abstraído enteramente del contenido o materia, dejando sólo la forma, decimos que la teoría original ha sido *formalizada.* En su estructura, la teoría no es ya un sistema de proposiciones con pleno significado, sino de sentencias consideradas como secuencias de palabras, que son a su vez secuencias de letras. Por la sola referencia a la forma indicamos qué combinaciones de palabras son sentencias, qué sentencias son axiomas, y qué sentencias se siguen como consecuencias inmediatas de otras.

¿Es posible una tal formalización? Hasta qué punto puede ser formalizada una teoría dada, es cosa que aprenderemos sólo después de haber intentado realizarla y de estudiar sus resultados (p. ej., §§ 29, 42, 60, 72).

Que es posible, cuando menos, una muy considerable medida de formalización de las teorías matemáticas, es un descubrimiento que se expande a lo largo de un vasto trecho de la historia intelectual del hombre.

El descubrimiento del método axiomático-deductivo en matemáticas es atribuido por la antigua tradición griega a Pitágoras (siglo VI a. C.), y nos ha llegado a través de Euclides (365? -275? a.C.), de cuyos "Elementos" se dice ser el libro que ha circulado más que otro alguno, a excepción de la Biblia. Euclides no supo hacer explícitos todos los postulados requeridos en la deducción de sus teoremas. Otros postulados han sido sacados a luz en los tiempos modernos, como p. ej. los que gobiernan el orden de los puntos en una línea, formulados por Pasch 1882.

El descubrimiento del tratamiento formal de la lógica, esto es, de la posibilidad de describir el razonamiento deductivo mediante sentencias expuestas en términos de su forma, aparece con Aristóteles (384-322 a. C.). También en esta línea ha habido modernos perfeccionamientos.

De ambos descubrimientos hacemos uso al formalizar una teoría matemática. Para hacerlo con pleno rigor, es prácticamente necesario reconstruir la teoría en un lenguaje simbólico especial, esto es, *simbolizarla.* En lugar de llevar a cabo las etapas más arriba descritas sobre la teoría tal y como la encontramos en un lenguaje natural, así el griego o el castellano, construimos un nuevo lenguaje simbolico con el propósito especial de expresar la teoría. Los lenguajes naturales son demasiado embarazosos, demasiado irregulares en su construcción y demasiado ambiguos para ser adecuados. (Los símbolos en un lenguaje simbólico corresponderán, usualmente,

a palabras completas en lugar de letras; y las secuencias de símbolos que corresponden a sentencias se denominarán "fórmulas").

Este nuevo lenguaje tendrá el carácter general del simbolismo que encontramos en matemática. En álgebra llevamos a cabo las deducciones como manipulaciones formales con ecuaciones, que sería excesivamente tedioso realizar en lenguaje ordinario, lo que sucedía con algunas de ellas antes de la invención por Vieta (1591) y otros de las modernas notaciones algebraicas. El descubrimiento de notaciones simbólicas simples que comportan la manipulación mediante reglas formales, ha sido uno de los caminos por los cuales ha avanzado en poder la matemática moderna. Sin embargo, la práctica ordinaria en matemática exhibe sólo una simbolización y formalización parcial, puesto que parte de los enunciados queda expresada en palabras, y parte de las deducciones se lleva a cabo en términos de los significados de las palabras más bien que mediante reglas formales.

Desde que Leibniz (1666) concibió su idea de una característica universal, la lógica formal ha recibido también un tratamiento simbólico, con ayuda de las técnicas matemáticas, bajo De Morgan (1847, 1864), Boole (1847, 1854), Peirce (1867, 1880), Schroeder (1877, 1890-1905) y otros.

Estos desarrollos concurrentes han conducido, por último, a la formalización, en sentido estricto, de porciones de la matemática por Frege (1893, 1903), Peano (1894-1908) y Whitehead y Russell (1910-13). (El método que hemos descrito de hacer explícita una teoría recibe con frecuencia el nombre de método *logístico*).

A Hilbert se debe ahora, en primer lugar, el subrayar que la formalización estricta de una teoría envuelve la total abstracción del significado, dando por resultado lo que se denomina un *sistema formal* o *formalismo* (o a veces una *teoría formal* o *matemático formal*); y en segundo lugar, su método consistente en hacer del sistema formal, considerado como un todo, el objeto de un estudio matemático denominado *metamatemático* o *teoría de la demostración.*

La metamatemática incluye la descripción o definición de sistemas formales como también la investigación de propiedades de sistemas formales. Al tratar de un sistema formal particular, podemos denominar al sistema la *teoría objeto*, y a la metamatemática que versa sobre él, su *metateoría.*

Desde el punto de vista de la metateoría, la teoría objeto no es, en rigor, una teoría tal y como primeramente entendimos el término, sino un sistema de objetos desprovistos de significado, semejantes a las posiciones de un juego de ajedrez y sujetos a manipulaciones mecánicas que se asemejan, por su parte, a los movimientos en dicho juego. La teoría objeto es descrita y estudiada como un sistema de símbolos y de objetos construidos a base de símbolos. Los símbolos son considerados, simplemente, como tipos varios de objetos susceptibles de ser reconocidos. Para fijar nuestras ideas podemos imaginarlos, concretamente, como marcas sobre el papel; o, por decirlo de un modo más preciso, en cuanto abstraídos de nuestra experiencia con símbolos como marcas sobre el papel. (La teoría de la demostración ha de ser, en cierta medida, abstracta, puesto que supone la construibilidad de secuencias de símbolos arbitrariamente largas, aun cuando la cantidad de papel y tinta en el mundo es finita). Los restantes objetos del sistema son analizados únicamente en lo que se refiere al modo de su composición a base de símbolos. Por definición, esto es todo lo que constituirá a un sistema formal en objeto de estudio de la metamatemática.

La metateoría pertenece a la matemática intuitiva e informal (a menos que la propia metateoría sea formalizada desde una metametateoría, que aquí dejamos fuera

de consideración). La metateoría se expresará en lenguaje ordinario, con símbolos matemáticos, tales como variables metamatemáticas, introducidos de acuerdo con la necesidad. Las aserciones de la metateoría han de ser comprendidas. Las deducciones han de comportar convicción. Han de proceder por inferencias intuitivas, y no, como las deducciones de la teoría formal, por aplicaciones de reglas establecidas. Las reglas han sido establecidas para formalizar la teoría objeto, pero ahora hemos de entender sin reglas cómo operan ésas ya establecidas. Una matemática intuitiva es cabalmente necesaria para definir la matemática formal.

(Deberemos entender lo anterior en el sentido de que la última instancia de apelación para justificar una inferencia metamatemática lo serán el significado y la evidencia, más bien que conjunto alguno de reglas convencionales. Ello no nos privará, en la práctica, de sistematizar nuestros resultados metamatemáticos en teoremas o reglas, que pueden ser así aplicados cuasi formalmente para abreviar el razonamiento intuitivo. Este es un procedimiento familiar en matemática informal. A veces incluso haremos referencia a principios de lógica (intuicionista) formalmente establecidos, cuando la derivación formal de esos principios indique el método por el cual pueda ser informalmente llevado a cabo el razonamiento).

Los métodos utilizados en la metateoría se restringirán a los denominados *finitistas* por los partidarios del formalismo, que emplean sólo objetos intuitivamente concebibles y procesos efectuables. (Traducimos el término germano "finit" por "finitista", puesto que el castellano "finito" se utiliza para traducir el alemán "endlich"). Ninguna clase infinita puede ser considerada como un todo completo. Las demostraciones de existencia suministrarán, al menos implícitamente, un método para construir el objeto cuya existencia se haya de demostrar (cfr. § 13).

Esta restricción es requerida para el propósito que indujo a Hilbert a introducir la metamatemática. Las proposiciones de una teoría matemática dada pueden adolecer de falta de un claro significado, y las inferencias en ella realizadas pueden no comportar indubitable evidencia. Merced a la formalización de la teoría, el desarrollo de la misma queda reducido a forma y regla. Ya no hay ambigüedad alguna para determinar qué constituye un enunciado o qué una demostración dentro de la teoría. En tales circunstancias, la cuestión de saber si los métodos que han sido formalizados en ella llevan a contradicción, y otras cuestiones acerca del efecto de esos métodos, han de ser investigadas en la metateoría, y por métodos que no estén sujetos a las mismas dudas que los de la teoría original.

Los métodos finitistas son del tipo utilizado en la teoría elemental de números intuicionista. Algunos formalistas intentan circunscribirlos todavía más estrechamente (Hilbert y Bernays 1934, pág. 43, y Bernays 1935, 1938).

Dejaremos para más tarde la discusión de este extremo (§ 81). Para el propósito de defender la matemática clásica frente a los intuicionistas, no hay necesidad de utilizar menos recursos que los admitidos por ellos. Sin embargo es natural proceder sobre la base de métodos estrictamente elementales, en la medida en que ello sea suficiente. Todos los ejemplos de razonamiento intuicionista de teoría de números aducidos en § 13, los consideraremos como finitistas. En nuestras investigaciones metamatemáticas advertiremos que, hasta un estadio ulterior, serán suficientes métodos intuicionistas de un tipo enteramente elemental. El último criterio para determinar si un método es admisible en metamatemática ha de ser, sin duda, el de saber si es intuitivamente convincente.

(Algunos autores utilizan "meta–" para identificar un lenguaje o teoría en donde se hace de otro lenguaje o teoría el objeto de estudio no restringido a métodos

finitistas. En este sentido se emplea también "lenguaje sintáctico" frente a "lenguaje objeto". Cfr. Carnap 1934; cfr. también § 37. En este libro utilizaremos "meta–" únicamente cuando los métodos sean finitistas).

Los sistemas formales estudiados en metamatemática son (usualmente) elegidos de modo que sirvan como modelos para partes de lógica y matemática informal con las que ya estamos más o menos familiarizados, y de las cuales surgen por formalización. A los significados que se pretende atribuir a los símbolos, fórmulas, etc. de un sistema formal dado, considerando al sistema como una formalización de una teoría informal, los denominamos *la interpretación (pretendida)* del sistema (o de sus símbolos, fórmulas, etc.). En otras palabras, las interpretaciones de los símbolos, fórmulas, etc., son los objetos, proposiciones, etc., de la teoría informal que están correlacionados conforme al método merced al cual el sistema constituye un modelo para la teoría informal.

En el caso de una fórmula que represente a un enunciado ideal de la matemática clásica (§ 14), la interpretación no puede constituir un significado totalmente intuitivo (o finitista), sino que ha de consistir en aquello en términos de lo cual, sea lo que fuere, piensa el matemático clásico, dentro del desarrollo informal (o no estrictamente formalizado) de la matemática clásica, es decir, en el desarrollo que ha tenido lugar históricamente y tiene lugar ordinariamente cuando el procedimiento no es conscientemente formalizado en el sentido estricto de la teoría de la demostración.

La interpretación condiciona al metamatemático en su elección del sistema formal particular que él introduce con sus definiciones. Lo guía en la elección de los problemas relativos al sistema que investiga. Puede incluso proporcionarle pistas esenciales encaminadas a ultimar la solución de esos problemas. Sólo en el enunciado final y en la demostración de sus resultados le está prohibido (en tanto que metamatemático) hacer uso de la interpretación.

¿Hasta qué punto es esta prohibición restrictiva? La metamatemática ha de estudiar el sistema formal como un sistema de símbolos, etc. que son considerados de modo totalmente objetivo. Esto significa simplemente que esos símbolos, etc. son en sí los objetos últimos, y que no están siendo utilizados para referirse a algo distinto de ellos mismos. La mirada del metamatemático se detiene en ellos, no pasa a través ni va más allá de ellos; son, por tanto, objetos sin interpretación o significado.

Ahora bien, al estudiar esos objetos, el metamatemático ha de elaborar sus propios métodos y utensilios. Estos métodos y utensilios pueden ser cualesquiera que sean finitistas. Por ejemplo, la metamatemática puede emplear los números naturales de un modo finitista. En el caso de fórmulas que admiten (fuera de la metamatemática) una interpretación finitista, puede ser posible definir, dentro de la metamatemática, propiedades de aquellos objetos formales que (desde fuera de la metamatemática) son equivalentes a sus interpretaciones. De este modo, las interpretaciones finitistas pueden introducirse por la puerta falsa. Pero en modo alguno puede la metamatemática operar con las interpretaciones no-finitistas de las proposiciones ideales de la matemática clásica.

Al objeto de que quede claro en todo momento por qué estamos interesados en los sistemas formales que vamos a considerar, y cómo constituyen éstos formalizaciones de porciones de lógica y matemática con las que ya estamos informalmente familiarizados, indicaremos en este libro las posibilidades de interpretación, y utilizaremos terminología sugestiva al respecto, como por ejemplo "demostración" para

derivaciones formales, e "y" para el nombre del símbolo &. Ello es necesario para el cumplimiento de nuestro propósito, aun cuando la interpretación sea extraña a la metamatemática en cuanto tal.

Recapitulemos brevemente. Un panorama completo nos dará tres "teorías" separadas y distintas: (a) la teoría informal, respecto de la cual el sistema formal constituye una formalización; (b) el sistema formal o teoría objeto, y (c) la metateoría, en la que se describe y estudia el sistema formal.

Aquí (b), que es formal, no es una teoría en el común sentido, sino un sistema de símbolos y de objetos construidos a base de símbolos (descritos desde (c)), que constituye empero un tipo de imagen convencional o modelo de (a). Por otra parte, (a) y (c), que son informales, no poseen una estructura exactamente determinada, tal y como la posee (b).

De esta suerte (c) es una teoría que tiene a (b) por materia de estudio y que ha de aplicarse a (b) sin tener en cuenta (a), o, más precisamente, sin tener en cuenta la interpretación de (b) en términos de (a).

Por añadidura (c) está restringida al uso de métodos finitistas, mientras que en general (a) no lo está.

PARTE II

# LOGICA MATEMATICA

CAPITULO IV

# UN SISTEMA FORMAL

§ 16. **Símbolos formales.** Introduciremos ahora un sistema formal particular. El sistema descrito en este capítulo será materia de estudio de los cuatro capítulos subsiguientes y partes de ulteriores capítulos. El sistema constituye una formalización de una porción de la teoría clásica elemental de números incluyendo la lógica requerida para ello.

Al establecer el sistema, hemos hecho uso de Hilbert y Ackermann 1928, Hilbert y Bernays 1934, 1939, Gentzen 1934-35, Bernays 1936, y otras fuentes menos inmediatas.

Nuestra tarea presenta dos aspectos distintos. En primer lugar, ha de ser descrito e investigado el sistema formal mismo con métodos finitistas y sin hacer uso de interpretación alguna del sistema. Esto es la metamatemática. En segundo lugar, ha de ser precisada una interpretación del sistema bajo la cual constituya éste una formalización de la teoría de números.

Cabría abordar el problema acentuando el segundo aspecto. Podríamos analizar la matemática informal existente, seleccionando y estereotipando conceptos fundamentales, presupuestos y conexiones deductivas, y llegar así eventualmente a un sistema formal.

Aquí, en cambio, pondremos el énfasis inicial en el primer aspecto. El sistema formal será inmediatamente introducido en toda su complejidad, y se proseguirán las investigaciones metamatemáticas con sólo incidental atención a la interpretación. Se requiere del lector que se concentre en aprender con precisión qué es el sistema formal y cómo éste es investigado. A medida que avancemos en nuestro estudio se harán patentes la interpretación y las razones de las opciones tomadas al establecer este sistema particular.

El primer paso en el establecimiento del sistema formal es la enumeración de los *símbolos formales*. La lista de símbolos formales es estructuralmente análoga al alfabeto de un lenguaje, aun cuando, al asignárseles interpretación, muchos de los símbolos formales corresponden a palabras y frases enteras más que a letras aisladas. La lista de símbolos formales sigue a continuación.

*Símbolos lógicos*: $\supset$ (implica), & (y), $\vee$ (o), $\neg$ (no), $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe). *Símbolos de predicado*: $=$ (es igual a). *Símbolos de función*: $+$ (más), $\cdot$ (por), $'$ (sucesor). *Símbolos de individuo*: 0 (cero). *Variables*: *a*, *b*, *c*, ... *Paréntesis*: (, ).

Las palabras que aparecen entre paréntesis pueden ser usadas para leer los símbolos, y pretenden sugerir las interpretaciones por vía preliminar, p. ej., las interpretaciones de los símbolos lógicos como 'constantes lógicas'. Las variables son interpretadas como teniendo por rango a los números naturales. Se supone que disponemos (potencialmente, cfr. § 13) de una lista o enumeración infinita de las variables.

Insistimos en que las interpretaciones son ajenas a la descripción del sistema formal en cuanto tal. Debe ser posible proceder considerando a los símbolos formales como meras marcas, y no como símbolos en el sentido de símbolos de alguna

cosa a la que ellos simbolizan o significan. Sólo se supone que estamos capacitados para reconocer cada símbolo formal como siendo el mismo en cada una de sus recurrencias, y como distinto de los otros símbolos formales. En el caso de variables, dicha suposición debe incluir nuestra capacidad para reconocer como tal a un símbolo que sea una variable.

Los símbolos formales constituyen la primera categoría de objetos formales. De ésta, derivamos una segunda categoría mediante la construcción de secuencias finitas (de ocurrencias) de símbolos formales, a las que llamamos *expresiones formales*. La palabra "ocurrencia" se usa aquí para hacer referencia a los miembros de la secuencia en su estatuto de miembros, y para subrayar que diferentes miembros de dicha secuencia pueden ser el mismo símbolo (lo que está de acuerdo con nuestro previo uso del término 'secuencia', p. ej. §§ 1, 2). Las expresiones formales incluyen aquéllas que constan de un solo (una sola ocurrencia de un) símbolo formal. Mientras no se lo indique, la secuencia vacía (carente de miembros) no será incluida. Así, por ejemplo $0,(a)+(b)$, $(a)=(0)$, y $((0\forall 00=$ son expresiones formales. La última consta de siete (ocurrencias de) símbolos, es decir, tiene siete miembros; el tercero, quinto y sexto (la tercera, quinta y sexta ocurrencias de) símbolos en esa expresión son cada uno un (una ocurrencia de) 0; y los (distintos) símbolos que ocurren en ella son (, 0, $\forall$, =. Las expresiones formales son estructuralmente análogas a las palabras de un lenguaje; pero al asignarles interpretación, algunas de ellas corresponden a enunciados enteros, p. ej., $(a)=0$, y otras carecen de significado, p. ej., $((0\forall 00=$. De nuevo nuestra terminología oculta el hecho de que, para el sistema formal como tal, las expresiones no expresan nada, sino que son únicamente ciertos objetos reconocibles y distinguibles.

Utilizaremos también, como una tercera categoría de objetos formales, las secuencias finitas de (ocurrencias de) expresiones formales.

En nuestra discusión acerca de los objetos formales, en lugar de exhibirlos directamente, los representaremos (es decir, los denotaremos) a menudo por letras introducidas a tal fin, o por expresiones que envuelvan letras ya introducidas de este modo. Por ejemplo, la letra "s" puede ser utilizada para representar la expresión formal $(a)+(b)$, y "A" para representar $(a)=(0)$. De inmediato aparecerán otras ilustraciones.

Letras y expresiones usadas de este modo no son símbolos y expresiones formales, sino símbolos y expresiones informales o metamatemáticos que figuran como nombres de objetos formales. Aquí, en comparación con el uso ordinario informal del simbolismo, se da la nueva modalidad de que los objetos nombrados son a su vez símbolos u objetos construidos a partir de símbolos. Hemos, pues, de mantener una distinción entre dos tipos de simbolismo, el simbolismo formal acerca del cual estamos hablando, y el simbolismo intuitivo o metamatemático mediante el cual hablamos del anterior. Con vistas a evitar confusiones, utilizaremos dos clases de grafía para estos dos fines ($a$, $b$, $t$, $x$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ para el primero; a, b, t, x, A, B, para el segundo).

El uso de símbolos y expresiones para nombrar los objetos acerca de los cuales estamos hablando, no debería ser considerado como una novedad; nuestro diario método de construir una sentencia acerca de un objeto requiere tal uso. La novedad, más bien, es el otro procedimiento, del que hacemos un cierto uso en nuestra metamatemática, según el cual incorporamos directamente el objeto mismo, esto es, un espécimen del objeto, en la sentencia. Aun cuando ello viola los cánones usuales de la corrección gramatical, no hay lugar a ambigüedad cuando estamos ocupándonos de la metamatemática. Porque en tal disciplina, los símbolos formales han de

ser considerados como desprovistos de significado, y por tanto los objetos formales no pueden servir como nombres de otros objetos, y una sentencia que contenga un espécimen de un objeto formal sólo puede serlo acerca del objeto formal mismo.

Estas observaciones se aplican a nuestra metamatemática. En un pasaje ocasional, que trata de la interpretación y que el lector encontrará así etiquetado, daremos a los símbolos formales un estatuto informal, tratándolos entonces como significativos.

En nuestro estudio metamatemático de las expresiones formales, haremos uso de la operación de *yuxtaposición* (o *concatenación*), en la que se combina consecutivamente a dos o más secuencias de símbolos formales para producir una nueva secuencia. Así por ejemplo, la yuxtaposición de las dos expresiones formales ((0∀00 = y $(a) + (b)$ en este orden, produce la nueva expresión formal ((0∀00 = $(a) + (b)$; y la yuxtaposición de las siete expresiones formales (, $(a) + (b)$, ), ·, (, $(c)'$, ) en el orden dado, produce la nueva expresión formal $((a) + (b)) \cdot ((c)')$.

Cuando alguna de las expresiones formales a yuxtaponer está siendo representada por letras o expresiones metamatemáticas, estas últimas pueden aparecer, en lugar de las expresiones formales que representan, al escribir el resultado de la yuxtaposición. Así por ejemplo, si la letra "s" representa una expresión formal, el resultado de yuxtaponer las siete expresiones formales (, s, ), ·, (, $(c)'$, ) se escribe "$(s) \cdot ((c)')$". Aquí "(s) · $((c)')$" es una expresión metamatemática que representa una expresión formal, la cual expresión formal representada dependerá de qué expresión formal represente la letra "s". En particular, si s es $(a) + (b)$, entonces (s) · $((c)')$ es $((a) + (b)) \cdot ((c)')$.

§ 17. **Reglas de formación.** Definiremos ahora ciertas subcategorías de las expresiones formales mediante definiciones análogas a las reglas de sintaxis en gramática.

Primero definimos 'término', que es análogo al nombre en gramática. Los términos de este sistema representan todos ellos números naturales, fijos o variables. La definición se formula con la ayuda de variables metamatemáticas "s" y "t" y la operación de yuxtaposición, como se explicó anteriormente. Tiene la forma de una definición inductiva, que nos permite proceder, partiendo de ejemplos conocidos de términos, a otros nuevos.

1. 0 es un *término.* 2. Una variable es un *término.* 3 – 5. Si s y t son *términos*, entonces $(s)+(t)$, $(s)\cdot(t)$ y $(s)'$ son *términos.* 6. No hay más *términos* que los dados por 1–5.

EJEMPLO 1. Por 1 y 2, 0, $a$, $b$ y $c$, son términos. Entonces por 5, $(0)'$ y $(c)'$ son términos. Aplicando nuevamente 5, $((0)')'$ es un término; y aplicando 3, $((c)')+(a)$ es un término.

Damos ahora una definición de 'fórmula', análoga a la de sentencia (declarativa) en gramática.

1. Si s y t son términos, entonces (s) = (t) es una *fórmula.* 2 – 5. Si A y B son *fórmulas*, entonces (A) ⊃ (B), (A) & (B), (A) ∨ (B) y ¬ (A) son *fórmulas.* 6 – 7. Si x es una variable y A es una fórmula, entonces ∀x(A) y ∃x(A) son *fórmulas* 8. No hay más *fórmulas* que las dadas por 1 – 7.

EJEMPLO 2. Usando 1 y los ejemplos de términos ya obtenidos, $(a) = (b)$ y

$(((c)') + (a)) = (b)$ son fórmulas. Usando entonces 5 y 7 $\neg ((a) + (b))$ y $\exists c((((c)') + (a)) = (b))$ son fórmulas. Finalmente, por una aplicación de 2, lo siguiente es una fórmula:

(A) $$(\exists c ((((c)') + (a)) = (b))) \supset (\neg ((a) = (b))).$$

Las definiciones inductivas de término y fórmula tienen por consecuencia que cada término o fórmula puede ser construido partiendo de 0 y variables por una serie de pasos, cada uno de los cuales corresponde a una cláusula directa de una de esas definiciones (§ 6), y puede ser denominado una *aplicación* de tal cláusula.

Cada uno de los pasos, excepto cuando se trata de una aplicación de 1 o de 2 de la definición de término, es del tipo siguiente. Primeramente hemos dado una expresión o par de expresiones previamente obtenidas. Encerramos la expresión dada, o cada una de las expresiones dadas, entre paréntesis, e introducimos una expresión de una de las diez formas

(B) $$\supset,\ \&,\ \vee,\ \neg,\ \forall x,\ \exists x,\ =,\ +,\ \cdot,\ ',$$

donde x es una variable. Denominemos *operador* a una expresión de una de esas diez formas. En particular, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ son *conectivas proposicionales*, y los operadores de las formas $\forall x$ y $\exists x$ son *cuantificadores*, siendo $\forall x$ un *cuantificador universal* y $\exists x$ un *cuantificador existencial*; estos seis son *operadores lógicos*.

A la expresión o al par de expresiones dadas, las denominamos el *alcance* del operador en la expresión resultante. Recorriendo la entera construcción de un término o fórmula, estableciendo de manera obvia una correspondencia entre las partes de la expresión, o par de expresiones, dada y partes de la expresión resultante en cada paso, lograremos la asignación de un *alcance* no sólo para el operador últimamente introducido en el término o fórmula completos, sino para todo operador que figure en ese término o fórmula.

EJEMPLO 3. En la fórmula (A), el alcance de la primera ocurrencia de $=$ consta de la parte $((c)') + (a)$ y la primera ocurrencia de $b$, y el alcance de $\exists c$ es la parte $(((c)') + (a)) = (b)$.

Establecemos ahora el siguiente hecho, cuya rigurosa demostración consideraremos de inmediato. En un término o fórmula dados, los alcances de los operadores pueden ser reconocidos sin ambigüedad a partir de la disposición de los paréntesis. En otras palabras, los paréntesis hacen posible, dados el término o fórmula como una secuencia finita de símbolos formales, revelar todos los detalles esenciales de de su construcción conforme a las definiciones inductivas de término y fórmula.

La demostración rigurosa de este hecho nos la proporciona el Lema 2 de § 7, Ejemplo 2, junto con el siguiente lema que puede ser demostrado por inducción a partir de las definiciones inductivas de término y fórmula.

LEMA 4. *En un término o fórmula dados, existe un emparejamiento propio de los paréntesis (que son 2n en número, con n paréntesis izquierdos y n paréntesis derechos) tal que el alcance de cada operador ocurre como sigue.*

(a) *Para operadores que tengan por alcance una expresión, el alcance es encerrado inmediatamente entre paréntesis emparejados, y el operador aparece inmediatamente fuera de este par de paréntesis, es decir, inmediatamente a la izquierda del paréntesis izquierdo (en el caso de* $\neg$, $\forall x$, $\exists x$*), o inmediatamente a la derecha del paréntesis derecho (en el caso de* $'$*).*

(b) *Para operadores que tengan por alcance dos expresiones (a saber,* $\supset$, &, $\vee$, $=$, $+$, $\cdot$*), cada una de las dos expresiones es encerrada inmediatamente entre paréntesis emparejados, y el operador aparece inmediatamente entre el paréntesis derecho del par que encierra la expresión de la izquierda y el paréntesis izquierdo del par que encierra la expresión de la derecha.*

EJEMPLO 3 (conclusión). El ejemplo de la fórmula exhibida (A), contiene 22 paréntesis. Según el Lema 4, los 22 paréntesis admiten un emparejamiento propio, que se descubre en el proceso de construcción de la fórmula conforme a las definiciones de término y fórmula, y que indica los alcances de los operadores. Sabiendo que existe un emparejamiento propio, por el Lema 2 ese emparejamiento resulta único, y puede por tanto ser descubierto mediante el algoritmo de § 7, sin conocimiento anterior de la construcción de la fórmula conforme a las definiciones de término y fórmula. De hecho, tal fue lo que hicimos al final de § 7, donde examinamos los mismos 22 paréntesis sin reparar en los símbolos que pudieran intervenir. Utilizando el emparejamiento resultante de los 22 paréntesis tal como ocurren dentro de la fórmula completa, podemos ver que el alcance de la primera ocurrencia de $=$ consiste en la expresión encerrada por los paréntesis $(_4^3\ )_4^{10}$ y la expresión encerrada por los paréntesis $(_5^{11}\ )_5^{12}$. Ello concuerda con nuestra previa identificación de ese alcance. Similarmente, el alcance de $\exists c$ está encerrado por los paréntesis $(_6^2\ )_6^{13}$.

Aunque el Lema 3 de §7 no es necesario para demostrar que los alcances pueden ser descubiertos a partir de la disposición de los paréntesis, resulta útil, sin embargo, para el razonar acerca de los alcances en las partes y en la totalidad de un término o fórmula. Por ejemplo, si M, N y A son fórmulas y A ocurre como una parte (consecutiva), no como totalidad, de (M) $\supset$ (N), podemos inferir que esta parte (o cada una de tales partes) es o bien una parte de M, o bien una parte de N.

Al elegir nuestras definiciones de término y fórmula, utilizábamos, sin duda, los paréntesis con el propósito anteriormente descrito de indicar los alcances sin ambigüedad. Pero es evidente que usualmente se introducirán, conforme a las definiciones, más paréntesis de los estrictamente necesarios para tal propósito. Dejando las definiciones tal como están, podemos tomar el acuerdo de omitir paréntesis superfluos, a manera de abreviatura, al escribir términos y fórmulas, o expresiones metamatemáticas que los representen.

Las posibilidades en esta dirección se extienden empleando convenciones de un tipo ya familiar por álgebra, donde se entiende que "$a \cdot b + c$" significa lo mismo que $(a \cdot b) + c$. Decimos aquí que $+$ *prepondera* sobre $\cdot$, y establecemos la preponderancia de nuestros operadores según el orden en que los hemos enumerado en (B) anteriormente. Para reestablecer cualesquiera paréntesis que hayan sido omitidos al abreviar un término o fórmula, se puede proceder paso por paso, seleccionando cada vez aquel operador de los presentes que figure primero en la lista, es decir, un operador de máxima preponderancia, y otorgándole el máximo alcance compatible con el requisito de que la totalidad sea un término o fórmula.

No siempre omitiremos el mayor número posible de paréntesis que nuestra convención nos permitiría, sino que procuraremos asegurar el máximo de legibilidad. (Con este fin, cambiaremos también a veces paréntesis por corchetes o llaves).

EJEMPLO 4. El reestablecimiento de los paréntesis en "A $\supset$ B $\vee$ C & D" da

sucesivamente "A ⊃(B ∨ C & D)", "A ⊃((B ∨ C) & D)", "(A) ⊃(((B) ∨ (C)) & (D))". Abreviamos el ejemplo de fórmula exhibido (A) como sigue:

(A′) $$\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b.$$

Otro tipo de abreviatura lo suministra la introducción de un nuevo símbolo, con un método que permita retraducir una expresión que contenga el nuevo símbolo a una que no lo contenga. Así por ejemplo, abreviamos los términos (0)′, ((0)′)′, (((0)′)′)′, ... como "1", "2", "3", ..., respectivamente; y abreviamos la fórmula $\neg\, a = b$ como $a \neq b$, y la fórmula $\exists c\,(c' + a = b)$ como "$a < b$". Entonces la fórmula exhibida (A) puede ser escrita:

(A″) $$a < b \supset a \neq b.$$

La regla general para la abreviatura de "≠" nos permite escribir "s ≠ t" como abreviatura de ¬ s = t, siempre que s y t sean términos. La regla general para la abreviatura de "<" nos permite escribir "s < t" como abreviatura de $\exists x(x' + s = t)$, siempre que x sea una variable y s y t sean términos que no contengan a x. Al eliminar la abreviatura, si la introducción de ésta ha suprimido una variable, como en el caso de "<", surge una ambigüedad respecto de la variable que ha de ser suministrada. Así, al desabreviar "s < t", podemos elegir como x cualquier variable que s y t no contengan. Esta ambigüedad es de menor consecuencia, puesto que los enunciados que deseemos hacer acerca de la fórmula abreviada serán válidos sin que importe cuál sea la variable admisible que se elija.

Consideraremos todas estas abreviaturas sólo en la exposición de la metamatemática. Ello es adecuado para nuestros propósitos, pues hará que las definiciones fundamentales, que establecen el sistema formal, resulten teóricamente más simples. Por tanto, ha de entenderse que los enunciados metamatemáticos acerca de términos y fórmulas del sistema, se refieren a expresiones no abreviadas en el sentido literal de las definiciones, cualesquiera que sean las abreviaturas que empleemos al escribir los enunciados.

§ 18. **Variables libres y ligadas.** Una ocurrencia de una variable x en una fórmula A se dice que está *ligada* (o que es *una variable ligada*), si la ocurrencia se da en un cuantificador ∀x o ∃x, o en el alcance de un cuantificador ∀x o ∃x (con la misma x); en caso contrario, se dice que está *libre* (o que es *una variable libre*).

EJEMPLO 1. En $\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b$, ambas ocurrencias de $a$ y ambas ocurrencias de $b$ son libres, y ambas ocurrencias de $c$ son ligadas. En $\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c$, las dos primeras ocurrencias de $c$ son ligadas y la tercera es libre. En $\exists c(\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c)$, todas las ocurrencias de $c$ son ligadas.

Decimos también que cualquier ocurrencia de una variable x en un término t es *libre*, como se seguirá de la definición anterior, cuando se la aplique leyendo "término t" en lugar de "fórmula A". La distinción entre ocurrencia libre y ocurrencia ligada de una variable, es siempre relativa al término o fórmula en el que (por el momento) está siendo considerada tal ocurrencia.

EJEMPLO 2. La tercera ocurrencia de $c$ en $\exists c\,(\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c)$ es libre cuando se la considera como una ocurrencia en la parte $c$ tomada aisladamente, o en $c'$ aisladamente, o en $c' + a$ aisladamente, o en $c' + a = b$ aisladamente; y está ligada cuando se la considera como una ocurrencia en $\exists c\,(c' + a = b)$

aisladamente, o en $\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c$ aisladamente, o en la fórmula completa.

Una variable x que ocurra como variable libre (dicho más brevemente, que ocurra libre) en A se denomina *variable libre de* A, y se dice entonces que A *contiene a* x *como variable libre* (dicho brevemente, que *contiene a* x *libre*); y de modo semejante para las variables ligadas.

EJEMPLO 3. Las variables libres de $\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c$ son $a$, $b$ y $c$, y la única variable ligada es $c$.

Una ocurrencia ligada de una variable x en una fórmula A está ligada *mediante* aquel cuantificador particular, de entre los cuantificadores $\forall$x, o $\exists$x (con la misma x) en cuyo alcance se encuentra, que tenga el menor alcance, (más brevemente, mediante el cuantificador más interno en cuyo alcance se encuentra), o, en el caso de que sea una ocurrencia en un cuantificador $\forall$x o $\exists$x, mediante el propio cuantificador (es decir, este último *liga* a la variable).

EJEMPLO 4. En $\exists c\,(\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c)$, la primera y cuarta ocurrencias de $c$ están ligadas mediante el primer cuantificador $\exists c$, y la segunda y tercera ocurrencias de $c$, mediante el segundo cuantificador $\exists c$.

Al construir una fórmula según las definiciones de término y fórmula, una ocurrencia ligada de una variable dada en la fórmula resultante, está ligada por aquél de los cuantificadores cuya introducción la haya transformado por primera vez de ocurrencia libre en ocurrencia ligada (o, si es una variable en un cuantificador, por el cuantificador en el que se introduzca).

EJEMPLO 5. Compárese el Ejemplo 4 con el Ejemplo 2.

Se ofrecen ahora unas cuantas observaciones preliminares acerca de la interpretación de las variables libres y las variables ligadas (llamadas a veces variables 'reales' y 'aparentes'). Estas observaciones no son, por supuesto, parte de la metamatemática, pero ayudarán a explicar la adopción de las discriminaciones metamatemáticas. Una expresión que contenga una variable libre representa una cantidad o proposición que depende del valor de la variable. Una expresión que contenga una variable ligada representa el resultado de una operación realizada sobre todo el rango de la variable. Nuestras variables ligadas están asociadas con las operaciones lógicas de cuantificación, pero se dan ejemplos con otros tipos de operaciones bien conocidas por los matemáticos. En lo que sigue, $n$ e $y$ están libres, $i$ y $x$ están ligadas:

(A) $$\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \lim_{x \to 0} f(x, y), \qquad \int_{-y}^{y} f(x, y)\, dx.$$

En lo que sigue, la ocurrencia de $t$ como límite superior de la integral está libre, y las ocurrencias en el integrando están ligadas:

(B) $$\int_0^t f(t)\, dt.$$

Avanzando algo más en la interpretación, podemos observar ciertas diferencias características que aquélla impone en el modo en que podemos usar las dos clases de variables en matemática informal. Una variable ligada forma parte de una circunlocución para expresar el resultado de una operación llevada a cabo sobre el rango de la variable, y por tanto se puede cambiar la variable por cualquier otra que tenga el mismo rango sin alterar el significado (teniendo ciertas precauciones). Por ejemplo,

$$\text{(C)} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad \lim_{z \to 0} f(z, y), \quad \int_{-y}^{y} f(t, y)\, dt$$

significaría (normalmente) lo mismo que las respectivas expresiones (A) vistas anteriormente, (pero $\lim_{y \to 0} f(y, y)$ no es (usualmente) lo mismo que $\lim_{x \to 0} f(x, y)$). Si en una expresión sustituimos una variable libre por una expresión que represente una constante u objeto tomado de su rango, conseguimos (normalmente) un resultado pleno de significado, mientras que tal sustitución proporcionaría un sinsentido si fuese aplicada a una variable ligada. Por ejemplo (sustituyendo en (A)),

$$\text{(D)} \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i, \quad \lim_{x \to 0} f(x, 2), \quad \int_{-z}^{z} f(x, z)\, dx$$

son (normalmente) expresiones significativas, pero no lo son

$$\text{(E)} \qquad \sum_{5=1}^{n} a_5, \quad \lim_{2 \to 0} f(2, y), \quad \int_{-z}^{z} f(0, z)\, d0.$$

Cuando la misma variable ocurre a la vez libre y ligada en una expresión, la cantidad representada por la expresión depende solamente del valor de la variable en sus ocurrencias libres. Así la integral (B) es una función de $t$, cuyo valor para $t = 3$ es

$$\text{(F)} \qquad \int_0^3 f(t)\, dt, \quad \text{no} \quad \int_0^3 f(3)\, d3.$$

SUSTITUCION. Al establecer las definiciones metamatemáticas de la próxima sección, utilizaremos una operación de sustitución, a la que definimos como sigue. La *sustitución* de una variable x *por* un término t *en* (o, sinónimamente, *a lo largo de*) un término o fórmula A consistirá en reemplazar simultáneamente cada ocurrencia libre de x en A por una ocurrencia de t. Para describir esto en una notación de yuxtaposición, sea $n$ el número de ocurrencias libres de x en A ($n \geq 0$); y escribamos A como "$A_0 x A_1 x \ldots A_{n-1} x A_n$" para mostrar estas ocurrencias (siendo $A_0$, $A_1$, ... , $A_{n-1}$, $A_n$ partes posiblemente vacías que no contengan ninguna ocurrencia de x libre con relación a la totalidad de A, y siendo libres todas las $n$ ocurrencias mostradas de x). Entonces el resultado de la sustitución de x por t en A es $A_0 t A_1 t \ldots A_{n-1} t A_n$.

Una notación metamatemática compacta será útil para representar el resultado de una sustitución. Si se ha de realizar la sustitución de x, introducimos primero una notación compuesta tal como "A (x)" para el sustituendo, mostrando su dependencia de x al modo de la notación para funciones en matemática (§ 10). El resultado de sustituir x por t en A (x) se escribe entonces "A (t)".

EJEMPLO 6. Supongamos que x es $c$, y que
A (x) o A ($c$) es $\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c$.
Entonces A (0) es $\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + 0$,
y A ($a$) es $\exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b + a$.

EJEMPLO 7. Supongamos que x es $a$, y que A (x) es $a + c = a$. Entonces A (0) es $0 + c = 0$, y A ($b$) es $b + c = b$.

La sustitución que proporciona A (t) debe realizarse siempre para la variable original x en la fórmula original A (x), es decir, para la variable y en la fórmula para la que se ha introducido primeramente la notación "A (x)".

EJEMPLO 7 (conclusión). Para la x y la A (x) anteriormente mencionadas, A ($c$) es $c + c = c$. Si sustituimos $c$ por $b$ en A ($c$), obtenemos $b + b = b$. Lo cual no es lo mismo que la A ($b$) obtenida anteriormente de manera correcta al sustituir $a$ por $b$ en A ($a$), es decir, para la x original en la A (x) original. (La misma dificultad puede surgir por el mal uso de la notación para una función en matemática informal).

No hemos requerido que la variable x ocurra de hecho como variable libre en A (x). En el caso de que x no sea una variable libre de A (x), el resultado de la sustitución A (t) es la propia expresión original A (x).

De modo similar, definimos la sustitución realizada simultáneamente para un número de variables distintas; y emplearemos notaciones semejantes, tales como "A ($x_1, \ldots, x_n$)" para el sustituendo, y "A ($t_1, \ldots, t_n$)" para el resultado.

A partir de ahora introduciremos a menudo estas notaciones compuestas, tales como "A (x)" o "A ($x_1, \ldots, x_n$)" en lugar de "A", cuando nos interese señalar la dependencia de A de una variable x o de variables $x_1, \ldots, x_n$, sea o no que vayamos a realizar una sustitución. Por ejemplo, designamos usualmente una fórmula mediante "A (x)" en lugar de "A", cuando deseamos usarla en $\forall x A(x)$ (léase "para todo x, A de x", o más brevemente, "todo x, A de x") o $\exists x A(x)$ (léase "existe un x tal que A de x", o más brevemente "existe x, A de x"). Repetimos que el que usemos "A (x)" (o "A ($x_1, \ldots, x_n$)") no implica que x (o cada una de las $x_1, \ldots, x_n$) ocurra necesariamente libre en la fórmula designada.

Las observaciones preliminares sobre la interpretación, aclararán por qué hemos decidido definir nuestra operación de sustitución metamatemática como aplicable únicamente a las ocurrencias libres de las variables.

Decimos ahora que un término t está *libre en las ocurrencias libres de* una variable x *en* una fórmula A (x) (o que t está *libre en las posiciones de sustitución con respecto a* x *en* A (x), o más brevemente, que t está *libre con respecto a* x *en* A (x)), si ninguna ocurrencia libre de x en A (x) está en el alcance de un cuantificador $\forall y$ o $\exists y$, donde y es una variable de t (es decir, ocurre en t).

EJEMPLO 8. Los términos $d$, $d + 0'$ y $a \cdot d$ están libres con respecto a $a$ en la primera, pero no en la segunda, de las siguientes fórmulas:

(I) $\exists c\,(c' + a = b) \,\&\, \neg\, d = 0$, $\exists d\,(d' + a = b) \,\&\, \neg\, d = 0$.

Según esta definición, cuando t está libre con respecto a x en A (x) y sólo entonces, la sustitución de x por t en A (x) no introducirá t en A (x) en ningún lugar en

el que una variable (libre) y que ocurra en t se convierta en una ocurrencia ligada de y en el resultado A (t).

EJEMPLO 8 (conclusión). Sustituyendo $a$ por $d+0'$ en (I) obtenemos

(II) $\exists c\,(c'+(d+0')=b)\,\&\,\neg\, d=0, \quad \exists d\,(d'+d+0')=b)\,\&\,\neg\, d=0,$

respectivamente. En la primera de ellas, la $d$ de la ocurrencia de $d+0'$ introducida por la sustitución, continúa libre en la fórmula total, pero no en la segunda.

Decimos que la sustitución de x por t en A (x) es *libre*, cuando t está libre con respecto a x en A (x). Con sólo los rudimentos de interpretación indicados más arriba, resultará patente que una sustitución es inapropiada cuando no es libre.

Las dos fórmulas en (I) significan lo mismo; pero no las dos en (II).

Como ejemplo informal, consideremos la segunda expresión de (A) o de (C). Esta expresión representa una función de $y$, llamémosla

(G) $$f(y)=\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{z\to 0} f(z,\ y).$$

El valor de $f(y)$ para $y=z$, es entonces propiamente dado por

(H) $$f(z)=\lim_{x\to 0} f(x,z), \quad \text{no por} \quad f(z)=\lim_{z\to 0} f(z,z).$$

EJEMPLO 9. Para ilustrar el manejo de la terminología y notaciones explicadas en esta sección, digamos que x es (esto es, "x" denota) una variable, A (x) es (esto es, "A (x)" denota) una fórmula, y b es (esto es, "b" denota) una variable tal que (i) b está libre con respecto a x en A (x), y (ii) b no ocurre libre en A (x) (a menos que b sea x). Según nuestra notación de sustitución, puesto que "x" y "A (x)" son introducidas primero, (iii) A (b) es (por definición) el resultado de sustituir (las ocurrencias libres de) x en A (x) por b. De acuerdo con (i) las ocurrencias de b en A (b), que son introducidas mediante esta sustitución, están libres. De acuerdo con (ii), no hay ninguna otra ocurrencia libre de b en A (b). Así, las ocurrencias libres de b en A (b) son exactamente las ocurrencias introducidas por la sustitución. De aquí (inversamente a(i)–(iii)): (iv) x está libre con respecto a b en A (b), (v) x no ocurre libre en A (b) (a menos que x sea b), y (vi) A (x) es (de hecho) el resultado de sustituir (las ocurrencias libres de) b en A (b) por x. Para hacer este ejemplo particular,

$$\text{x}, \quad \text{A (x)}, \quad \text{b}, \quad \text{A (b)}$$

pueden ser, respectivamente,

$$c, \quad \exists c\,(c'+a=b)\supset\neg\, a=b+c, \quad d, \quad \exists c(c'+a=b)\supset\neg\, a=b+d.$$

§ 19. **Reglas de transformación.** En esta sección vamos a introducir definiciones metamatemáticas adicionales (denominadas *reglas deductivas* o *reglas de transformación*) que darán al sistema formal la estructura de una teoría deductiva. Al

objeto de subrayar la analogía con una teoría deductiva informal, comenzaremos con una lista de 'postulados'; hemos de advertir, no obstante, que, con respecto a la metamatemática, no se trata de postulados en el sentido de suposiciones, cosa que en verdad no podrían ser puesto que oficialmente no poseen significado alguno, sino solamente de fórmulas y formas (o esquemas) a los que habremos de referirnos cuando demos las definiciones.

Antes de ofrecer la lista de postulados, ilustraremos los tipos de postulados que aparecerán en dicha lista. El más simple de ellos es un 'axioma', un ejemplo del cual es $\neg\, a' = 0$. Se trata aquí de una fórmula del sistema formal. Podemos tener además una 'forma axiomática' o 'esquema axiomático', un ejemplo de lo cual es "B $\supset$ A $\vee$ B". Esto es una expresión metamatemática, que dará lugar a un axioma particular cada vez que sean especificadas las fórmulas representadas por las letras metamatemáticas "A" y "B". Por ejemplo, cuando A sea $a' = 0$ y B sea $\neg\, a' = 0$, obtendremos el axioma $\neg\, a' = 0 \supset a' = 0 \vee \neg\, a' = 0$. El esquema axiomático es así un instrumento metamatemático para la especificación de una clase infinita de axiomas que tienen una forma común.

Necesitamos también de otro tipo de postulados que formalicen las operaciones de deducir ulteriores teoremas a partir de los axiomas. Tales son las 'reglas de inferencia', de las cuales la siguiente es un ejemplo:

$$\frac{\text{A, A} \supset \text{B}}{\text{B.}}$$

Dicho ejemplo es un esquema que contiene tres expresiones metamatemáticas, "A", "A $\supset$ B" y "B", que representan fórmulas siempre y cuando se especifiquen las fórmulas representadas por las letras metamatemáticas "A" y "B". El sentido de la regla es que la fórmula representada por la expresión escrita bajo la línea, puede ser 'inferida' a partir del par de fórmulas representadas por las dos expresiones escritas encima de la línea. Por ejemplo, tomando como A la fórmula $\neg\, a' = 0$ y como B la fórmula $a' = 0 \vee \neg\, a' = 0$, la regla permite la inferencia a partir de $\neg\, a' = 0$ y $\neg\, a' = 0 \supset a' = 0 \vee \neg\, a' = 0$ a $a' = 0 \vee \neg\, a' = 0$. Puesto que $\neg\, a' = 0$ y $\neg\, a' = 0 \supset a' = 0 \vee \neg\, a' = 0$ son axiomas (como acabamos de ver), $a' = 0 \vee \neg\, a' = 0$ es un 'teorema formal' nuevo. (Nuestra terminología incluirá los axiomas como teoremas).

Ofreceremos ahora la lista completa de postulados, y daremos luego las definiciones que establecen la estructura deductiva del sistema formal por referencia a esa lista. El lector puede comprobar que el efecto acumulativo de la serie de definiciones consistirá en definir una subclase de la clase de fórmulas denominadas 'fórmulas demostrables' o 'teoremas formales'.

## Postulados para el sistema formal

Dramatis personae. Para los postulados 1–8, A, B y C son fórmulas. Para los postulados 9–13, x es una variable, A (x) es una fórmula, C es una fórmula que no contiene libre a x, y t es un término que está libre con respecto a x en A (x).

GRUPO A. Postulados para el cálculo de predicados.

GRUPO A1. Postulados para el cálculo proposicional.

1a. $A \supset (B \supset A)$.

1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$.

2. $\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$.

3. $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$.

4a. $A \,\&\, B \supset A$.

4b. $A \,\&\, B \supset B$.

5a. $A \supset A \vee B$.

5b. $B \supset A \vee B$.

6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.

8°. $\neg \neg A \supset A$.

GRUPO A2. Postulados (adicionales) para el cálculo de predicados.

9. $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x\, A(x)}$

10. $\forall x A(x) \supset A(t)$.

11. $A(t) \supset \exists x A(x)$.

12. $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$.

GRUPO B. Postulados (adicionales) para teoría de números.

13. $A(0) \,\&\, \forall x\,(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$.

14. $a' = b' \supset a = b$.

15. $\neg\, a' = 0$.

16. $a = b \supset (a = c \supset b = c)$.

17. $a = b \supset a' = b'$.

18. $a + 0 = a$.

19. $a + b' = (a + b)'$.

20. $a \cdot 0 = 0$.

21. $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

(La razón de escribir "°" en el Postulado 8 será dada en § 23).

Puede comprobarse que 14–21 son fórmulas; y que 1–13 (o en el caso de 2, 9 y 12, la(s) expresion(es) sobre, y la expresión bajo, la línea) son fórmulas, para cada elección de A, B, C, o de x, A (x), C, t, sujeta a las estipulaciones establecidas en el encabezamiento de la lista de postulados.

La clase de los 'axiomas' se define así. Una fórmula es un *axioma*, si tiene una de las formas 1a, 1b, 3–8, 10, 11, 13 o si es una de las fórmulas 14–21.

La relación de 'consecuencia inmediata' se define así. Una fórmula es una *consecuencia inmediata* de otra o de otras dos fórmulas, si tiene la forma que figura bajo la línea, mientras la(s) otra(s) tiene(n) la(s) forma(s) que figura(n) sobre la línea en 2, 9 ó 12.

Esta es la definición metamatemática básica que corresponde a los Postulados 2, 9 y 12. La aclararemos, empero, con terminología adicional, orientada al proceso de aplicación de la definición. A los Postulados 2, 9 y 12 los llamamos *reglas de inferencia*. Para cualquier elección (fija) de A y B, o de x, A (x) y C, que se sujete a las estipulaciones, la(s) fórmula(s) situada(s) sobre la línea es la *premisa* (son la *primera* y *segunda premisa*, respectivamente), y la fórmula situada bajo la línea es la *conclusión*, siendo ello así en orden a la *aplicación* de la regla (o a la *inferencia*

(*formal*) según la regla). La conclusión es una *consecuencia inmediata* de la(s) premisa(s) (según la regla).

Carnap 1934 encierra los dos tipos de postulados bajo el término común 'reglas de transformación', por considerar los axiomas como resultado de transformación a partir de cero premisas.

La definición de una 'formula (formalmente) demostrable' o 'teorema (formal)' puede ser dada ahora, inductivamente, como sigue.

1. Si D es un axioma, entonces D es *demostrable*. 2. Si E es *demostrable*, y D es una consecuencia inmediata de E, entonces D es *demostrable*. 3. Si E y F son *demostrables*, y D es una consecuencia inmediata de E y F, entonces D es *demostrable*. 4. Una fórmula es *demostrable* sólo según lo requerido por 1–3.

Esta noción puede ser obtenida también utilizando el concepto intermedio de 'demostración (formal)', del modo que sigue. Una *demostración* (*formal*) es una secuencia finita de una o más (ocurrencias de) fórmulas tal que cada fórmula de la secuencia es o un axioma o una consecuencia inmediata de fórmulas precedentes de la secuencia. Una demostración se dice ser una demostración *de* su última fórmula, y esta fórmula se dice que es (*formalmente*) *demostrable* o que es un *teorema* (*formal*).

EJEMPLO 1. La siguiente secuencia de 17 fórmulas es una demostración de la fórmula $a=a$. La fórmula 1 es el Axioma 16. La Fórmula 2 es un axioma, por una aplicación del Esquema Axiomático 1a en la que tanto A como B son $0=0$; y la Fórmula 3 es asimismo un axioma por una aplicación en la que A es $a=b \supset (a=c \supset b=c)$ y B es $0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)$. La Fórmula 4 es una consecuencia inmediata de las Fórmulas 1 y 3, como primera y segunda premisa respectivamente, por una aplicación de la Regla 2 en la cual la A de la regla es $a=b \supset (a=b \supset b=c)$ y la B es $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset [a=b \supset (a=c \supset b=c)]$. La Fórmula 5 es una consecuencia inmediata de la Fórmula 4, por una aplicación de la Regla 9 en la cual x es $c$, A (x) es $a=b \supset (a=c \supset b=c)$, y C es $0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)$ (obsérvese que no contiene libre a x). La Fórmula 9 es un axioma por una aplicación del Esquema Axiomático 10, en la cual x es $a$, A (x) es $\forall b \forall c\,[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$, y t es $a+0$ (obsérvese que t es libre con respecto a x en A (x)). Por nuestra notación de sustitución (§ 18), A (t) es el resultado de sustituir por t (las ocurrencias libres de) la variable x en A (x), es decir, A (t) es aquí $\forall b \forall c\,[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)]$.

1. $a=b \supset (a=c \supset b=c)$ – Axioma 16.
2. $0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)$ – Esquema Axiomático 1a.
3. $\{a=b \supset (a=c \supset b=c)\} \supset \{[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset [a=b \supset (a=c \supset b=c)]\}$ – Esquema Axiomático 1a.
4. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset [a=b \supset (a=c \supset b=c)]$ – Regla 2, 1, 3.
5. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset \forall c\,[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$ – Regla 9, 4.
6. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset \forall b \forall c\,[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$ – Regla 9, 5.
7. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset \forall a \forall b \forall c\,[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$ – Regla 9, 6.
8. $\forall a \forall b \forall c\,[a=b \supset (a=c \supset b=c)]$ – Regla 2, 2, 7.
9. $\forall a \forall b \forall c\,[a=b \supset (a=c \supset b=c)] \supset \forall b \forall c\,[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)]$ – Esquema Axiomático 10.
10. $\forall b \forall c\,[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)]$ – Regla 2, 8, 9.

11. $\forall b \forall c\,[a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)] \supset \forall c\,[a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)]$ – Esquema Axiomático 10.
12. $\forall c\,[a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)]$ – Regla 2, 10, 11.
13. $\forall c\,[a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)] \supset [a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)]$ – Esquema Axiomático 10.
14. $a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)$ – Regla 2, 12, 13.
15. $a+0=a$ – Axioma 18.
16. $a+0=a \supset a=a$ – Regla 2, 15, 14.
17. $a=a$ – Regla 2, 15, 16.

EJEMPLO 2. Sea A cualquier fórmula. La siguiente secuencia de cinco fórmulas es una demostración de la fórmula $A \supset A$. (En otras palabras, lo que se va a exhibir es un 'esquema de demostración' que da lugar a una demostración particular al sustituir por la letra metamatemática "A" cualquier fórmula particular, tal como $0=0$; y, correlativamente, en su última expresión "$A \supset A$" es un 'esquema de teorema'). La Fórmula 1 es un axioma, por una aplicación del Esquema Axiomático 1a en la cual tanto la A como la B del esquema son la A de este ejemplo. La Fórmula 2 es un axioma, por una aplicación del Esquema Axiomático 1b en donde A y C en el esquema son la A del ejemplo, y la B del esquema es en nuestro ejemplo $A \supset A$. La Fórmula 3 es una consecuencia inmediata de las Fórmulas 1 y 2, como primera y segunda premisa respectivamente, por una aplicación de la Regla 2 en donde la A de la regla es $A \supset (A \supset A)$ en nuestro ejemplo, y la B de la regla es $[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]$.

(1)

1. $A \supset (A \supset A)$ – Esquema Axiomático 1a.
2. $\{A \supset (A \supset A)\} \supset \{[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]\}$ – Esquema Axiomático 1b.
3. $[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]$ – Regla 2, 1, 2.
4. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ – Esquema Axiomático 1a.
5. $A \supset A$ – Regla 2, 4, 3.

Los términos demostración, teorema, etc., en tanto que definidos para el sistema formal (esto es, demostración formal, teorema formal, etc.), han de ser netamente distinguidos de esos mismos términos en sus sentidos informales ordinarios, que empleamos al exponer la metamatemática. Un teorema formal es una fórmula (es decir, un cierto tipo de secuencia finita de marcas), y su demostración formal es un cierto tipo de secuencia finita de fórmulas. Un teorema metamatemático es una aserción significativa acerca de los objetos formales, y su demostración es una exhibición intuitiva de la verdad de tal aserto.

Hemos mencionado tres categorías de objetos formales (§ 16), pero nos reservamos la libertad de introducir otras en el estudio de dichos objetos, siempre y cuando nuestro tratamiento sea finitista. Por otra parte, conviene llamar la atención sobre una extensión un tanto diferente de nuestra materia que tiene lugar cuando discutimos la forma de nuestras definiciones y teoremas metamatemáticos de turno.

Si optásemos por ser meticulosos en nuestro modo de llevar a cabo tal discusión, ello constituiría una metametamatemática. La misma práctica, empero, es común en (otras ramas de) la matemática informal; por lo que a nosotros respecta, consideraremos tales discusiones como explicaciones incidentales, que unas veces tienen por objeto hacer más fácil la rápida captación de lo que se está tratando en la metamatemática, y otras veces nos permiten condensar la enunciación de teoremas metamatemáticos que podrían ser formulados sin ellas.

CAPITULO V

# DEDUCCION FORMAL

§ 20. **Deducción formal.** Las demostraciones formales de teoremas, aun los más elementales, tienden a ser largas. El precio de haber analizado la deducción lógica descomponiéndola en pasos simples, es tener que usar un mayor número de estos pasos en el ejercicio de la misma.

El propósito de la formalización de una teoría es obtener una definición explícita de lo que constituye una demostración dentro de la teoría. Una vez conseguida esta definición, no hay necesidad de recurrir siempre directamente a ella. La labor requerida para establecer la demostrabilidad formal de fórmulas, puede ser grandemente aliviada mediante el uso de teoremas metamatemáticos relativos a la existencia de demostraciones formales. Si las pruebas de esos teoremas tienen el carácter finitista que se supone poseer la metamatemática, dichas pruebas indicarán, al menos implícitamente, métodos para obtener las demostraciones formales. El uso de los teoremas metamatemáticos comporta pues una abreviatura, a menudo muy considerable, en la presentación de las demostraciones formales.

Llamaremos *reglas derivadas* a los más simples de tales teoremas metamatemáticos, ya que expresan principios de los que puede decirse que se derivan de las reglas postuladas cuando se hace ver que el uso de ellos como métodos adicionales de inferencia, no incrementa la clase de fórmulas demostrables. Mediante el uso de reglas derivadas, trataremos de que los métodos para establecer los hechos de la demostrabilidad formal se aproximen, en la medida de lo posible, a los métodos informales de la teoría que está siendo formalizada.

Al establecer el sistema formal, se expuso la estructura de la demostración en su forma más simple posible, que consiste en una determinada secuencia de fórmulas. Algunas de nuestras reglas derivadas, denominadas 'reglas directas', servirán para abreviarnos segmentos enteros de una tal secuencia; podemos pues, por así decirlo, utilizar estos segmentos como unidades prefabricadas en la construcción de demostraciones.

Pero, en la práctica matemática, es también común el uso de demostraciones que tienen una estructura más complicada, debido al empleo de la 'deducción subsidiaria', esto es, una deducción bajo suposiciones que se toman con vistas al argumento y son subsiguientemente descargadas. Uso de la deducción subsidiaria se hace, por ejemplo, en una demostración por reductio ad absurdum, y de un modo menos forzado, cuando ponemos la hipótesis de un teorema a la par de proposiciones demostradas para deducir la conclusión. Otras reglas derivadas, denominadas 'reglas de deducción subsidiaria' nos suministrarán este tipo de procedimiento.

Introducimos ahora, mediante una definición metamatemática, la noción de 'deducibilidad formal bajo supuestos'. Dada una lista $D_1, \ldots, D_l$ ($l \geq 0$) de (ocurrencias de) fórmulas, una secuencia finita de una o más (ocurrencias de) fórmulas es denominada una *deducción (formal) a partir de* las *fórmulas supuestas* $D_1, \ldots, D_l$, si cada fórmula de la secuencia es o una de las fórmulas $D_1, D_l$, o un axioma, o una consecuencia inmediata de fórmulas precedentes de la secuencia. Una deduc-

ción se dice ser deducción *de* su última fórmula E; y de esta fórmula se dice que es *deducible a partir de* las fórmulas supuestas (en símbolos, $D_1, ..., D_l \vdash E$), y se la llama la *conclusión* (o *fórmula final*) de la deducción. (El símbolo "$\vdash$" puede leerse "da lugar a").

Las definiciones de deducción y de deducibilidad son generalizaciones de las de demostración y de demostrabilidad (a las que incluyen como caso en que $l=0$). Estas generalizaciones permiten el uso de fórmulas arbitrarias cualesquiera $D_1, ..., D_l$, denominadas fórmulas supuestas de la deducción, coyunturalmente equiparables a los axiomas.

EJEMPLO 1. Sean A, B y C fórmulas cualesquiera. Siendo ello así, la siguiente secuencia de cinco fórmulas es una deducción de C a partir de las tres fórmulas supuestas $A \supset (B \supset C)$, B y A. (Exponemos un 'esquema deductivo').

(2)
1. B — segunda fórmula supuesta.
2. A — tercera fórmula supuesta.
3. $A \supset (B \supset C)$ — primera fórmula supuesta.
4. $B \supset C$ — Regla 2, 2, 3.
5. C — Regla 2, 1, 4.

EJEMPLO 2. Construya el lector: (3) una deducción de A & B a partir de A y B; (4) una deducción de C a partir de $A \& B \supset C$, A, B.

Por un *análisis* de una deducción o demostración $A_1, ..., A_k$, entendemos una especificación en la que se establece para cada $j$ ($j = 1, ..., k$), o bien que $A_j$ es una de las fórmulas supuestas, y cuál de ellas en la lista $D_1, ..., D_l$; o bien que $A_j$ es un axioma, y a qué esquema de axioma se ajusta o qué axioma particular es de la lista de postulados; o bien que $A_j$ es una consecuencia inmediata de fórmulas precedentes, precisando en tal caso en qué regla de inferencia se apoya y cuáles son las fórmulas precedentes que hacen el papel de premisas respectivas de esa regla. En suma, un análisis de una deducción consiste en las explicaciones que se emplean para justificar cada ocurrencia de una fórmula en dicha deducción (es decir, en nuestros ejemplos, las explicaciones dadas a la derecha de las fórmulas).

Puede ocasionalmente suceder que una ocurrencia de una fórmula en una deducción (o demostración) sea susceptible de admitir más de una justificación; p. ej., las fórmulas A, B y C pueden ser tales que una de las cinco fórmulas en (2) resulte ser un axioma. En consecuencia, para alguna de las discusiones que sigan más adelante, el procedimiento a aplicar a una deducción dada sólo estará únicamente determinado cuando, junto con la deducción, se dé también un análisis particular de ella.

Conviene subrayar que la expresión "$D_1, ..., D_l \vdash E$", que utilizamos para establecer brevemente que E es deducible a partir de $D_1, ..., D_l$, no es una fórmula del sistema, sino un modo breve de escribir un enunciado metamatemático acerca de las fórmulas $D_1, ..., D_l$, E, a saber, el enunciado de que existe una secuencia finita de fórmulas sujeta a ciertas características. Cuando $l = 0$, la notación se reduce a "$\vdash E$", significando que E es demostrable. El símbolo "$\vdash$" procede de Frege 1879; el presente uso de dicho signo se debe a Rosser 1935* y a Kleene 1934*.

EJEMPLO 3. Las dos siguientes aserciones (1′) y (2′) han quedado justificadas

por la exhibición de las dos anteriores deducciones (1) y (2), respectivamente; y (3′) y (4′), por el Ejemplo 2.

(1′) $\vdash A \supset A$. (2′) $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$.

(3′) $A, B \vdash A \,\&\, B$. (4′) $A \,\&\, B \supset C, A, B \vdash C$.

Obsérvese que el símbolo "$\vdash$" aparece en el contexto precedido por una secuencia finita de cero o más fórmulas y seguido por una sola fórmula (o, en lugar de fórmulas, letras metamatemáticas o expresiones representativas de fórmulas). Ello establece sin ambigüedad el alcance de una ocurrencia del símbolo "$\vdash$" en un enunciado metamatemático. En particular, los alcances de los operadores formales se encuentran necesariamente restringidos a fórmulas del sistema, mientras que "$\vdash$" es un verbo metamatemático que se sitúa fuera de cualquier fórmula del sistema.

La definición de 'deducible a partir de $D_1, \ldots, D_l$' puede ser también establecida sin utilizar el concepto intermedio de deducción (cfr. la primera definición de 'demostrable' en § 19). Dejamos al lector la tarea de establecer las cinco cláusulas requeridas para ello. Dicho brevemente, "$D_1, \ldots, D_l \vdash E$" significa, pues, que es posible obtener, a partir de (cero o más de cero) fórmulas $D_1, \ldots, D_l$ y (cero o más) axiomas, por medio de las reglas de inferencia, la fórmula E. Que ambas versiones de la definición concuerdan entre sí, se advertirá observando que si se anotan en orden sucesivo de consideración las fórmulas empleadas en el proceso de obtener E, a partir de $D_1, \ldots, D_l$ y los axiomas, tenemos una deducción de E a partir de $D_1, \ldots, D_l$.

Utilizaremos letras mayúsculas griegas, tales como "$\Gamma$", "$\Delta$", "$\Theta$", etc., para representar secuencias finitas de cero o más (ocurrencias de) fórmulas, cuando deseemos indicar conjuntos de fórmulas supuestas sin nombrar individualmente las fórmulas (o a veces "$\Gamma(x)$", "$\Delta(x_1, \ldots, x_n)$", etc., cuando deseemos además poner de relieve ciertas variables que puedan ocurrir en ellas).

De la definición de la relación de deducibilidad $\vdash$, se siguen varias *propiedades generales de* $\vdash$, que pueden considerarse verdaderas sin necesidad de hacer referencia a los postulados particulares, cualesquiera que éstos sean, que integren la lista de postulados del sistema formal. (i) $\Gamma \vdash E$, cuando E forma parte de la lista $\Gamma$. (ii) Si $\Gamma \vdash E$, entonces $\Delta, \Gamma \vdash E$, para cualquier $\Delta$. En particular, podemos considerar que toda fórmula demostrable es deducible de cualesquiera fórmulas que nos plazca suponer. (iii) Si $\Gamma \vdash E$, entonces $\Delta \vdash E$, donde $\Delta$ proviene de $\Gamma$ como resultante de permutar las fórmulas $\Gamma$, o de omitir cualesquiera que fuesen duplicados de otras restantes. (iv) Si $\Gamma \vdash E$, entonces $\Delta \vdash E$, donde $\Delta$ proviene de $\Gamma$ como resultado de omitir cualesquiera de las fórmulas $\Gamma$ que sean demostrables o deducibles a partir de las restantes. Porque, dada una deducción de E a partir de $\Gamma$, podemos obtener asimismo otra a partir de $\Delta$ insertando en la deducción dada, en lugar de cada ocurrencia de una fórmula supuesta que deseemos suprimir, una deducción de esta última a partir de las restantes fórmulas supuestas. Estas cuatro propiedades generales pueden ser descompuestas en las simples del lema que sigue a continuación. No obstante (aun cuando las inferencias que hagamos basándonos en las propiedades generales de $\vdash$ puedan, de hecho, realizarse todas a partir de (i)–(iv) o (I)–(V)), se encarece al lector que procure razonar con flexibilidad colocando a $\vdash$ a la base de su pensamiento.

LEMA 5. (I) $E \vdash E$. (II) *Si* $\Gamma \vdash E$, *entonces* $C, \Gamma \vdash E$. (III) *Si* $C, C, \Gamma \vdash E$, *en-*

*tonces* C, $\Gamma \vdash$ E. (IV) *Si* $\Delta$, D, C, $\Gamma \vdash$ E, *entonces* $\Delta$, C, D, $\Gamma \vdash$ E. (V) *Si* $\Delta \vdash$ C *y* C, $\Gamma \vdash$ E, *entonces* $\Delta, \Gamma \vdash$ E. (Según Gentzen 1934-5).

EJEMPLO 4. Si A $\vdash$ B y A, B, C $\vdash$ D y B, D $\vdash$ E, entonces A, C $\vdash$ E. El lector puede convencerse a sí mismo de esto directamente según el sentido de $\vdash$ (bajo las dos versiones de su definición), y también verificar que se sigue tanto de (i)–(iv) como de (I)–(V).

La definición que hemos dado para $\vdash$ es relativa a un sistema formal particular en tanto que determinado por una lista de postulados. De modo específico, tal definición es relativa tanto a la parte de la lista de postulados que determina los axiomas, como a las reglas de inferencia. Así, aun cuando por ahora nos hayamos ocupado tan sólo de un sistema formal, haremos, sin embargo, uso de $\vdash$, en sentido similar, con relación a otros sistemas formales, p. ej., subsistemas de ese sistema formal que se obtienen considerando únicamente aquella parte de la lista de postulados que baste para determinar la clase de axiomas y la relación de consecuencia inmediata. Entenderemos siempre que $\vdash$ es relativo al sistema formal que estemos estudiando en el momento de que se trate.

Obsérvese que $\Delta, \Gamma \vdash$ E, para un sistema dado, es equivalente a $\Delta \vdash$ E, para el sistema resultante del anterior por la adición de las fórmulas $\Gamma$ al conjunto de axiomas.

**§ 21. El teorema de deducción.** Consideraremos el siguiente teorema, en un primer lugar, para el cálculo proposicional, es decir, ateniéndonos tan sólo a los postulados del Grupo A1.

TEOREMA 1. *Para el cálculo proposicional, si* $\Gamma$, A $\vdash$ B, *entonces* $\Gamma \vdash$ A $\supset$ B. (El teorema de deducción).

DEMOSTRACION. La hipótesis del teorema dice que existe una secuencia finita de fórmulas tal que: cada fórmula de la secuencia es o (a) una de las fórmulas $\Gamma$, (b) la fórmula A, (c) un axioma, o (d) una consecuencia inmediata por la Regla 2 de dos fórmulas precedentes (puesto que la Regla 2 es aquí la única regla de inferencia); y la última fórmula de la secuencia es la fórmula B. Denominaremos a dicha secuencia la 'deducción dada' de B a partir de $\Gamma$, A.

La conclusión del teorema dice que existe una secuencia finita de fórmulas tal que: cada fórmula de la secuencia es o (a) una de las fórmulas $\Gamma$, (c) un axioma, o (d) una consecuencia inmediata por la Regla 2 de dos fórmulas precedentes; y la última fórmula de la secuencia es la fórmula A $\supset$ B. Denominaremos a esta secuencia la 'deducción resultante' de A $\supset$ B a partir de $\Gamma$.

El teorema será demostrado mediante un curso inductivo de valores sobre la longitud $k$ de la deducción dada (§ 7), considerando que B es, para la inducción, la parte variable del teorema, mientras que $\Gamma$, A es la parte que permanece fija.

La proposición de inducción $P(k)$ o $P(\Gamma, A, k)$ es: *Para toda fórmula* B, *si hay una deducción dada de* B *a partir de* $\Gamma$, A, *de longitud* $k$, *entonces puede hallarse una deducción de* A $\supset$ B *a partir de* $\Gamma$.

BASE (para demostrar la proposición siendo $k = 1$, es decir, para demostrar $P(\Gamma, A, 1)$). Supóngase dada una fórmula B y una deducción de B a partir de $\Gamma$, A, de longitud 1. Distinguimos tres casos, según cuál de las posibilidades (a)–(c) se aplique a la última (y puesto que $k = 1$, única) fórmula B de la deducción dada. La posibilidad (d) queda aquí excluida ya que B es la única fórmula.

Para cada caso, mostramos cómo construir la deducción resultante, dejando al lector la tarea de verificar que la secuencia de fórmulas que presentamos como tal deducción posee las condiciones requeridas.

CASO (a): B es una de las fórmula $\Gamma$. Entonces la siguiente secuencia de fór - mulas es la deducción resultante.

1. B – una de las fórmulas $\Gamma$.
2. $B \supset (A \supset B)$ – Esquema Axiomático 1a.
3. $A \supset B$ – Regla 2, 1, 2.

CASO (b): B es A. La deducción resultante es la secuencia de fórmulas (I) que fue dada en § 19 Ejemplo 2 como una demostración de $A \supset A$. Puesto que B es A, la fórmula $A \supset A$ es $A \supset B$.

CASO (c): B es un axioma. La deducción resultante es la misma que en el Caso (a), salvo que ahora el primer paso está justificado por la razón de que B es un axioma.

PASO DE INDUCCION. Supóngase (como hipótesis de la inducción) que, para todo $l \leq k$, $P(\Gamma, A, l)$; es decir, que para todo $l \leq k$ y todo B, si hay una deducción dada de B a partir de $\Gamma$, A, y de longitud $l$, entonces puede hallarse una deducción de $A \supset B$ a partir de $\Gamma$. Ahora bien, supóngase (con vistas a demostrar $P(\Gamma, A, K+1)$) que está dada una fórmula B, así como también una deducción de B a partir de $\Gamma$, A y con una longitud de $k + 1$. Distinguimos cuatro casos, según que se aplique cada una de las posibilidades (a)–(d) a la última fórmula B de la deducción dada. El tratamiento de los Casos (a)–(c) es el mismo que se utilizó en la base.

CASO (d): B es una consecuencia inmediata, por la Regla 2, de dos fórmulas precedentes. Basándonos en la enunciación de la Regla 2, podemos llamar a estas dos fórmulas P y $P \supset B$. (Utilizamos ahora la letra P, en lugar de A, como sucede en la enunciación de la regla, porque A se reserva aquí para designar la última fórmula supuesta de la deducción dada). Si descartamos la parte de la deducción dada que esté por debajo de la fórmula P, la parte restante será una deducción de P a partir de $\Gamma$, A de longitud $l \leq k$. Por la hipótesis de la inducción (considerando a P como la B del caso), podremos hallar, por tanto, una deducción de $A \supset P$ a partir de $\Gamma$. De igual forma, aplicando la hipótesis de la inducción a la parte de la deducción dada que llega hasta $P \supset B$ inclusive, obtenemos una deducción de $A \supset (P \supset B)$, a partir de $\Gamma$. Utilizamos estas dos deducciones (cuyas longitudes podemos decir que son, respectivamente, $p$ y $q$) para construir la deducción resultante del modo que sigue.

| | | |
|---|---|---|
| | ... | deducción de $A \supset P$ a partir de $\Gamma$, dada por la hipótesis de la inducción. |
| $p.$ | $A \supset P$ | |
| | ... | deducción de $A \supset (P \supset B)$ a partir de $\Gamma$, dada por la hipótesis de la inducción. |
| $p+q.$ | $A \supset (P \supset B)$ | |

$p+q+1.$ $(A \supset P) \supset ((A \supset (P \supset B)) \supset (A \supset B))$ – Esquema Axiomático 1b.

$p+q+2.$ $(A \supset (P \supset B)) \supset (A \supset B)$ – Regla 2, $p, p+q+1$.

$p+q+3.$ $A \supset B$ – Regla 2, $p+q, p+q+2$.

Esto completa la demostración del teorema por inducción matemática. El teorema incluye el caso en que $\Gamma$ es vacío: *Para el cálculo proposicional, si* $A \vdash B$, *entonces* $\vdash A \supset B$.

EJEMPLO. Anteriormente tuvimos ocasión de establecer, al considerar (2′), que $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$. Por el teorema 1, podemos inferir de ahí que $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$.

Para examinar más detenidamente este ejemplo, tomemos la deducción (2), que exhibimos a título de justificación de (2′), como la deducción dada de C a partir de $A \supset (B \supset C)$, B, A. Teniendo en cuenta la demostración del Teorema 1, deberá ser posible hallar la deducción resultante de $A \supset C$ a partir de $A \supset (B \supset C)$, B. Puesto que la deducción dada es de longitud $> 1$, y la última fórmula proviene de fórmulas precedentes por una aplicación de la Regla 2, procede aplicar el Caso (d) correspondiente al paso de inducción. Encontraremos en él algunos detalles e instrucciones para hallar el resto por aplicación del Teorema 1 a las deducciones 1 y 1–4 que ocurren como partes de (2). Continuando de este modo, obtenemos eventualmente como deducción resultante la siguiente.

1. B – segunda fórmula supuesta.
2. $B \supset (A \supset B)$ – Esquema Axiomático 1a.
3. $A \supset B$ – Regla 2, 1, 2.
4. $A \supset (A \supset A)$ – Esquema Axiomático 1a.
5. $\{A \supset (A \supset A)\} \supset \{[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]\}$ – Esquema Axiomático 1b.
6. $[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]$ – Regla 2, 4, 5.
7. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ – Esquema Axiomático 1a.
8. $A \supset A$ – Regla 2, 7, 6.

(5) 9. $A \supset (B \supset C)$ – primera fórmula supuesta.

10. $\{A \supset (B \supset C)\} \supset \{A \supset (A \supset (B \supset C))\}$ – Esquema Axiomático 1a.
11. $A \supset (A \supset (B \supset C))$ – Regla 2, 9, 10.
12. $\{A \supset A\} \supset \{[A \supset (A \supset (B \supset C))] \supset [A \supset (B \supset C)]\}$ – Esquema Axiomático 1b.

13. $[A \supset (A \supset (B \supset C))] \supset [A \supset (B \supset C)]$ – Regla 2, 8, 12.
14. $A \supset (B \supset C)$ – Regla 2, 11, 13.
15. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$ – Esquema Axiomático 1b.
16. $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)$ – Regla 2, 3, 15.
17. $A \supset C$ – Regla 2, 14, 16.

La deducción (5) no es la única deducción de $A \supset C$ a partir de $A \supset (B \supset C)$, B. Acontece que hay una deducción más corta, que se obtiene a partir de (5) omitiendo las Fórmulas 4–8 y 10–14, y citando 9 (en lugar de 14) en el Paso 17 como primera premisa de la inferencia por la Regla 2.

Pero (5) es la deducción particular que resulta por virtud del método utilizado al demostrar el Teorema 1 cuando se toma (2) como deducción dada. Hemos llevado a cabo pormenorizadamente el ejercicio de hallar (5) al objeto de subrayar el carácter finitista del razonamiento usado en la demostración del Teorema 1, y, en particular, para poner de manifiesto lo que implica el uso de la inducción matemática. De aquí en adelante nos daremos por satisfechos con saber que las deducciones resultantes existen y que podrían ser halladas.

La demostración del Teorema 1 nos servirá de modelo para demostraciones metamatemáticas de ciertos tipos. En el futuro suministraremos frecuentemente tales demostraciones de un modo más abreviado, cuando el lector pueda disponer el argumento en aplicaciones explícitas de inducción. Serán establecidas, como modelos, unas cuantas demostraciones totalmente explicitadas.

La anterior demostración del Teorema 1 puede presentarse de un modo más abreviado a la manera que sigue. Sea prefijado $A \supset$ a cada fórmula de la deducción dada de B a partir de $\Gamma$, A. (En el ejemplo, a partir de las Fórmulas 1, 2, 3, 4, 5 de (2), obtenemos así las Fórmulas 3, 8, 11, 14, 17 de (5)). La secuencia resultante de fórmulas (con $A \supset B$ como fórmula final) no es (en general) una deducción a partir de $\Gamma$, pero puede convertirse en tal, insertando fórmulas adicionales según el modo indicado en el tratamiento de los casos expuestos anteriormente. (Este simple plan de demostración será ligeramente modificado cuando hayamos de extender el teorema al cálculo de predicados en § 22).

A partir de $A \supset (B \supset C)$, $B \vdash A \supset C$, inferimos, por una segunda aplicación del Teorema 1, que $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$. Una ordenación conveniente de estas inferencias es la siguiente.

1. $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$ – (2).

(5′) 2. $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$ – Teorema 1, 1.

3. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$ – Teorema 1, 2.

En esta presentación, tenemos una secuencia de expresiones análoga a, pero en un nivel diferente de, la secuencia de fórmulas que constituye una demostración formal o deducción. Las expresiones en esta secuencia son enunciados metamatemáticos acerca del sistema formal, mientras que en una demostración o deducción formal dichas expresiones son fórmulas del sistema.

A continuación ofrecemos otro ejemplo de una deducción y de una serie de enunciados metamatemáticos.

(6)
1. A & B – segunda fórmula supuesta.
2. A & B ⊃ A – Esquema Axiomático 4a.
3. A – Regla 2, 1, 2.
4. A ⊃ (B ⊃ C) – primera fórmula supuesta.
5. B ⊃ C – Regla 2, 3, 4.
6. A & B ⊃ B – Esquema Axiomático 4b.
7. B – Regla 2, 1, 6.
8. C – Regla 2, 7, 5.

(6′)
1. A ⊃ (B ⊃ C), A & B ⊢ C – (6).
2. A ⊃ (B ⊃ C) ⊢ A & B ⊃ C – Teorema 1, 1.

Como ulteriores ejemplos, el lector puede establecer:

(7′) A & B ⊃ C ⊢ A ⊃ (B ⊃ C) – cfr. (4′) §20.

(8′)
1. A ⊃ B, B ⊃ C ⊢ A ⊃ C.
2. A ⊃ B ⊢ (B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C) – Teorema 1, 1.

§ 22. **El teorema de deducción (conclusión).** El Teorema 1 es una regla derivada del tipo de *deducción subsidiaria* (cfr. § 20). Para una aplicación de la regla, la deducción dada de B a partir de Γ, A es la *deducción subsidiaria*; y a la deducción de A ⊃ B a partir de Γ, obtenida de la deducción dada por el método indicado en la demostración del teorema, la hemos denominado la *deducción resultante.* Cuando estamos estableciendo la existencia de deducciones sin exhibirlas de hecho, podemos adoptar una fraseología elíptica, y hablar por ejemplo de "la deducción Γ, A ⊢ B", cuando nos referimos a la deducción que el enunciado "Γ, A ⊢ B" afirma existir.

En el Teorema 1, la última fórmula supuesta A de la deducción subsidiaria Γ, A ⊢ B, no es utilizada al construir la lista de fórmulas supuestas para la deducción resultante Γ ⊢ A ⊃ B; de acuerdo con ello, decimos que esta (ocurrencia de A como) fórmula supuesta de la deducción subsidiaria es *descargada.* (Podría haber también ocurrencias de A en la lista Γ, que no serían descargadas).

En general, una *regla de deducción subsidiaria* es un teorema metamatemático que tiene una o más hipótesis de la forma $\Delta_i \vdash E_i$ denominadas las *deducciones subsidiarias*, y una conclusión de la forma Δ ⊢ E denominada la *deducción resultante.* De cada una de las deducciones subsidiarias pueden ser *descargadas* una o varias fórmulas supuestas.

EJEMPLO 1. La regla "*Si* Γ, A ⊢ C *y* Γ, B ⊢ C, *entonces* Γ, A ∨ B ⊢ C", que será establecida en la próxima sección, tiene dos deducciones subsidiarias, Γ, A ⊢ C y Γ, B ⊢ C, de la primera de las cuales es descargada la última fórmula supuesta A, mientras B lo es de la segunda.

Un teorema metamatemático de la simple forma $\Delta \vdash E$, es una regla derivada del tipo *directo*. Y significa que es posible pasar, a partir de las fórmulas $\Delta$ y los axiomas, directamente a E por aplicaciones de las reglas de inferencia.

Existe la siguiente e importante diferencia entre estas dos clases de reglas derivadas. Una regla directa continúa necesariamente siendo verdadera cuando el sistema formal se amplía por la adición de nuevos axiomas y reglas de inferencia, puesto que la regla establece simplemente que ciertas deducciones pueden ser construidas, y los nuevos postulados sólo cambian la situación por proporcionar medios adicionales para construir esas mismas deducciones. Pero una regla de deducción subsidiaria no continúa necesariamente siendo verdadera cuando son añadidos nuevos postulados, puesto que la ampliación del sistema tiende a crear nuevas instancias de las deducciones subsidiarias, con lo que se plantea la cuestión de si existen deducciones resultantes que correspondan a esas nuevas deducciones subsidiarias. La mayoría de las reglas de deducción subsidiaria que vamos a establecer (en particular, todas las del presente capítulo) poseen un conjunto ambiguo de fórmulas supuestas $\Gamma$ invariablemente situadas antes del símbolo "$\vdash$", de suerte que la adición de nuevos axiomas no puede causar perturbación alguna. Pero la adición de nuevas reglas de inferencia creará nuevos casos que habrán de ser considerados en la demostración de la regla.

Trataremos ahora el Teorema 1 bajo la condición de que entren en juego todos los postulados del Grupo A, bien sea que nos atengamos exactamente a ellos, o que intervengan también los del Grupo B (que son solamente un esquema axiomático y axiomas). Se requerirá una cierta restricción con vistas a la consideración de los nuevos casos en la demostración.

Parece más fácil abordar este tratamiento ahora. Cuando todavía está reciente la demostración del Teorema 1 para el cálculo proposicional; pero puede que algunos lectores prefieran posponer el resto de este capítulo, exceptuando las partes de § 23 que se refieren al cálculo proposicional, hasta después del Capítulo VI.

Comenzamos estableciendo algunas definiciones que son útiles para formular la restricción. Dados una deducción $A_1, \ldots, A_k$ a partir de fórmulas supuestas $D_1, \ldots, D_l$, y un análisis particular de la deducción (§ 20), definimos cuándo (una ocurrencia de) una fórmula $A_i$ en la deducción 'depende' de una fórmula dada $D_j$, de las (ocurrencias de) fórmulas supuestas $D_1, \ldots, D_l$, como sigue.

1. Si $A_i$ es $D_j$ en el análisis dado, entonces $A_i$ *depende* de $D_j$. 2. Si $A_{i_1}$ *depende* de $D_j$, y $A_l$, en el análisis dado, es una consecuencia inmediata de $A_{i_1}$ (o de $A_{i_1}$ y algún $A_{i_1}$, en cualquier orden), entonces $A_i$ *depende* de $D_j$. 3. $A_i$ *depende* de $D_j$ solamente según lo requerido por 1 y 2.

Puede verse fácilmente que $A_i$ depende de $D_j$, si y solamente si no existe una subsecuencia de la deducción (no necesariamente consecutiva) que, bajo el análisis dado, constituya una deducción de $A_i$ a partir de las restantes fórmulas supuestas $D_1, \ldots, D_{j-1}, D_{j+1}, \ldots, D_l$.

EJEMPLO 2. En la deducción (6), las Fórmulas 4, 5 y 8 dependen de la primera fórmula supuesta $A \supset (B \supset C)$, y las otras fórmulas no. Las Fórmulas 1, 6, 7 (con el análisis dado) constituyen una deducción de 7 a partir de la otra fórmula supuesta A & B.

Decimos ahora que una variable y es *variada en* una deducción dada (con un análisis dado) para una fórmula supuesta dada $D_j$, si (A) y ocurre libre en $D_j$, y

(B) la deducción contiene una aplicación de la Regla 9 o la Regla 12 con respecto a y (siendo y la x a que hace referencia la aplicación de la regla), a una fórmula que depende de $D_j$ (en tanto que premisa para la aplicación de la regla). De otro modo, decimos que y es *mantenida constante en* la deducción *para* la fórmula supuesta $D_j$.

EJEMPLO 3. Sea x una variable, A (x) una fórmula, y b una variable, tal que (i) b es libre con respecto a x en A (x) y (ii) b no ocurre libre en A (x) (a menos que b sea x); y sea C una fórmula que no contiene libre a b. Entonces la siguiente es una deducción de $C \supset \forall x A(x)$ a partir de $C \supset A(b)$. Para verificar que son satisfechas las estipulaciones relativas a los Postulados 9 y 10, utilizamos los hechos (iv)–(vi) que fueron establecidos en el Ejemplo 9, § 18.

1. $\forall b A(b) \supset A(x)$ – Esquema Axiomático 10 (considerando (iv) y (vi)).
2. $\forall b A(b) \supset \forall x A(x)$ – Regla 9, 1 (considerando que, por (v), x no ocurre libre en $\forall b A(b)$).
3. $C \supset A(b)$ – fórmula supuesta.
4. $C \supset \forall b A(b)$ – Regla 9, 3.
6. $C \supset (\forall b A(b) \supset \forall x A(x))$ – a partir de 2 como en el Caso (a) para el Teorema 1 § 21.
9. $C \supset \forall x A(x)$ – a partir de 4, 6 como en el Caso (d) para el Teorema 1.

Si A (x) contiene libre a x, entonces b es variada en esta deducción, ya que (utilizando (i) y (iii)) la fórmula supuesta $C \supset A(b)$ contiene libre a b, y la Regla 9 es aplicada en el Paso 4 con respecto a b a la premisa 3, que depende de la fórmula supuesta. Pero x no es variada, puesto que la premisa 1 para la aplicación de la Regla 9 con respecto a x en el Paso 2 no depende de la fórmula supuesta.

En una deducción dada (con un análisis dado), una variable dada, y, es siempre mantenida constante para cada fórmula supuesta en la cual no ocurra libre, mientras que puede ser variada para alguna de las fórmulas supuestas en las que ocurra libre y mantenida constante para otras.

La anterior terminología se inspira en el hecho de que las Reglas 9 y 12 (la "$\forall$-regla" y la "$\exists$-regla") son los únicos dos postulados del Grupo A en los que una variable libre participa como tal. El Esquema Axiomático 10, por ejemplo, puede ser aplicado utilizando una variable libre en el lugar de t, pero en ese caso la variable es utilizada de un modo según el cual puede ser usado con idéntico derecho un término que no sea una variable (tal como 0). (El empleo de variables libres al establecer los postulados del Grupo B es inesencial).

La restricción del Teorema 1 para el cálculo de predicados consiste en que en la deducción subsidiaria, las variables libres habrán de ser mantenidas constantes para la fórmula supuesta a descargar. (Ello será explicado en términos de interpretación en § 32).

TEOREMA 1 (conclusión). *Para el cálculo de predicados (o el sistema formal de teoría de números en su totalidad), si* $\Gamma, A \vdash B$ *con las variables libres mantenidas constantes para la última fórmula supuesta* A, *entonces* $\Gamma \vdash A \supset B$.

La demostración se obtiene a partir de la dada en § 21 agregando el tratamiento de los dos casos adicionales que pueden surgir ahora bajo el paso de inducción.

CASO (e): B es una consecuencia inmediata de una fórmula precedente por una aplicación de la Regla 9. De conformidad con la enunciación de la Regla 9, esa fórmula precedente es de la forma $C \supset A(x)$, donde x es una variable, A (x) una fórmula, y C una fórmula que no contiene libre a x. Entonces B es $C \supset \forall x A(x)$. Distinguimos dos subcasos según que, en la deducción dada (para un análisis dado), esa fórmula precedente $C \supset A(x)$ dependa o no de la última fórmula supuesta A.

SUBCASO (e1): $C \supset A(x)$ depende de A. Entonces A no contiene libre a x, puesto que de otro modo se contradiría la hipótesis de que las variables libres son mantenidas constantes para A en la deducción dada. Puesto que ahora ni A ni C contienen libre a x, la fórmula A & C no contiene libre a x. Este hecho es utilizado más abajo para justificar la nueva aplicación de la Regla 9 en el Paso $p+q+1$. Aplicando la hipótesis de la inducción al segmento de la deducción dada que termina con la fórmula $C \supset A(x)$, obtenemos una deducción de $A \supset (C \supset A(x))$ a partir de $\Gamma$. Esta deducción es incorporada en la construcción de la deducción resultante como sigue.

| | | |
|---|---|---|
| | ... | deducción de $A \supset (C \supset A(x))$ a partir de $\Gamma$, dada por la hipótesis de la inducción. |
| $p.$ | $A \supset (C \supset A(x))$ | deducción de $A \,\&\, C \supset A(x)$ a partir de $A \supset (C \supset A(x))$, dada por $(6')$ : 2 (final de § 21). |
| | ... | |
| $p+q.$ | $A \,\&\, C \supset A(x)$ | |
| $p+q+1.$ | $A \,\&\, C \supset \forall x A(x)$ – | Regla 9, $p+q$. |
| | ... | deducción de $A \supset (C \supset \forall x A(x))$ a partir de $A \,\&\, C \supset \forall x A(x)$, dada por $(7')$. |
| $p+q+r+1.$ | $A \supset (C \supset \forall x A(x))$ | |

SUBCASO (e2): $C \supset A(x)$ (y por tanto $C \supset \forall x A(x)$) no depende de A. Entonces alguna subsecuencia de la deducción dada constituye una deducción de $C \supset \forall x A(x)$ a partir de las restantes fórmulas supuestas $\Gamma$. Ello lo utilizamos en la construcción de la deducción resultante, como sigue.

| | | |
|---|---|---|
| | ... | deducción de $C \supset \forall x A(x)$ a partir de $\Gamma$, dada por la hipótesis de independencia. |
| $p.$ | $C \supset \forall x A(x)$ | |
| $p+1.$ | $(C \supset \forall x A(x)) \supset (A \supset (C \supset \forall x A(x)))$ – Esquema Axiomático 1a. | |
| $p+2.$ | $A \supset (C \supset \forall x A(x))$ – Regla 2, $p, p+1$. | |

CASO (f): B es una consecuencia inmediata de una fórmula precedente por una aplicación de la Regla 12. El tratamiento de este caso es similar, usando dos veces $(5')$: 3 en el primer subcaso.

El teorema de deducción fue primeramente demostrado como una regla derivada por Herbrand 1930. (Cfr. también Herbrand 1928, Tarski 1930, Church 1932, Hilbert-Bernays 1934 pág. 155, Jaśkowski 1934).

§ 23. **Introducción y eliminación de símbolos lógicos.** El teorema que sigue a continuación contiene una serie de reglas derivadas. Las adjuntas designaciones de línea y columna suministran a estas reglas nombres que las describen convenientemente. Así por ejemplo, "$\forall x A(x) \vdash A(t)$" es la regla de "eliminación de generalidad", o más brevemente "$\forall$-eliminación".

La variable "x" sobreescrita a la derecha del símbolo "$\vdash$" en dos de las reglas, señala la aplicación de la Regla 9 o de la Regla 12 con respecto a x en la construcción de la deducción resultante.

TEOREMA 2. *Para las siguientes reglas*, A, B *y* C, *o* x, A (x), C *y* t, *se sujetarán a las mismas estipulaciones que se establecieron para los postulados correspondientes* (§ 19), *y* $\Gamma$ *o* $\Gamma(x)$ *es una lista cualquiera de fórmulas.*

*Para el cálculo proposicional, son válidas las reglas desde* "Implicación" *hasta* "Negación" *inclusive.*

*Para el cálculo de predicados* (*o el sistema completo de teoría de números*), *valen todas las reglas, a condición de que, en cada deducción subsidiaria, las variables libres se mantengan constantes para la fórmula supuesta que haya de ser descargada.*

| | (Introducción) | (Eliminación) |
|---|---|---|
| (Implicación) | *Si* $\Gamma, A \vdash B$, *entonces* $\Gamma \vdash A \supset B$. | $A, A \supset B \vdash B$. (Modus Ponens). |
| (Conjunción) | $A, B \vdash A \,\&\, B$. | $A \,\&\, B \vdash A$.<br>$A \,\&\, B \vdash B$. |
| (Disyunción) | $A \vdash A \vee B$.<br>$B \vdash A \vee B$. | *Si* $\Gamma, A \vdash C$ *y* $\Gamma, B \vdash C$, *entonces* $\Gamma, A \vee B \vdash C$. (Prueba por casos). |
| (Negación) | *Si* $\Gamma, A \vdash B$ *y* $\Gamma, A \vdash \neg B$, *entonces* $\Gamma \vdash \neg A$. (Reductio ad absurdum). | $\neg \neg A \vdash A$. (Descarga de doble negación)°. |
| (Generalidad) | $A(x) \vdash^{x} \forall x A(x)$. | $\forall x A(x) \vdash A(t)$. |
| (Existencia) | $A(t) \vdash \exists x A(x)$. | *Si* $\Gamma(x), A(x) \vdash C$, *entonces* $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^{x} C$. |

DEMOSTRACIONES. La regla de $\supset$-introducción es el Teorema 1. De las restantes, diez son reglas directas y las otras tres de deducción subsidiaria. Las reglas directas pueden ser establecidas exhibiendo las deducciones requeridas. Las pruebas de las reglas de deducción subsidiaria son convenientemente presentadas como secuencias de aseveraciones metamatemáticas (algunas de las cuales habrán de ser justificadas exhibiendo una deducción, como en la prueba de una regla directa; y otras se seguirán de aseveraciones precedentes por el Teorema 1 o por propiedades generales de $\vdash$). En ambos casos habrá que recurrir, en algún punto, a uno de los postulados correspondientes. A continuación se ofrecen estas pruebas para varias reglas de cada tipo; las restantes se dejan al lector. No obstante, en ésta y en situaciones similares, el lector debería intentar hallar primero por sí mismo incluso aquellas pruebas que ofrecemos.

REGLAS DIRECTAS. $\supset$-eliminación.

1. A – primera fórmula supuesta.
2. $A \supset B$ – segunda fórmula supuesta.
3. B – Regla 2, 1, 2.

Esta regla es, simplemente, la Regla 2 de la lista de postulados (la "regla de $\supset$" o "modus ponens" de la lógica tradicional) reiterada aquí en forma de regla derivada.

&-introducción. Su prueba se dio ya al considerar el caso (3′) en § 20.

$\neg$-eliminación, o descarga de doble negación.

1. $\neg\ \neg A$ – fórmula supuesta.
2. $\neg\ \neg A \supset A$ – Esquema Axiomático 8.
3. A – Regla 2, 1, 2.

$\forall$-introducción. Sea C un axioma que no contenga a x libre.

1. $A(x)$ – fórmula supuesta.
2. $A(x) \supset (C \supset A(x))$ – Esquema Axiomático 1a.
3. $C \supset A(x)$ – Regla 2, 1, 2.
4. $C \supset \forall x A(x)$ – Regla 9, 3.
5. C – un axioma.
6. $\forall x A(x)$ – Regla 2, 5, 4.

REGLAS DE DEDUCCION SUBSIDIARIA. $\vee$-eliminación.

1. $\Gamma, A \vdash C$ – hipótesis.
2. $\Gamma \vdash A \supset C$ – Teorema 1, 1.
3. $\Gamma, B \vdash C$ – hipótesis.
4. $\Gamma \vdash B \supset C$ – Teorema 1, 3.
5. $A \supset C, B \supset C \vdash A \vee B \supset C$ – usando el Esquema Axiomático 6 y la Regla 2.
6. $A \vee B, A \vee B \supset C \vdash C$ – $\supset$-eliminación (o usando la Regla 2).
7. $\Gamma, A \vee B \vdash C$ – 2, 4, 5, 6.

$\exists$-Eliminación.

1. $\Gamma(x), A(x) \vdash C$ – hipótesis.
2. $\Gamma(x) \vdash A(x) \supset C$ – Teorema 1, 1.
3. $A(x) \supset C \vdash^{x} \exists x A(x) \supset C$ – usando la Regla 12.
4. $\exists x A(x), \exists x A(x) \supset C \vdash C$ – $\supset$-eliminación.
5. $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash^{x} C$ – 2, 3, 4.

DISCUSION. Estas reglas ofrecen una clasificación de operaciones lógicas, tales como introducción y eliminación de los símbolos lógicos, basadas en Gentzen 1934-5.

La regla denominada "**V**-eliminación" sirve para eliminar un símbolo de disyunción cuando se la usa a la manera que sigue.

1. $\vdash A \vee B$ – supóngase dado.
2. $A \vdash C$ – supóngase dado, con las variables libres mantenidas constantes para A.
3. $B \vdash C$ – supóngase dado, con las variables libres mantenidas constantes para B.
4. $A \vee B \vdash C$ – **V**-eliminación (con $\Gamma$ vacío), 2, 3.
5. $\vdash C$ – 1, 4.

Este proceso corresponde al familiar método informal de prueba por casos: O bien A o bien B. Caso 1: A. Entonces C. Caso 2: B. Entonces C. Por tanto C.

De modo similar, la $\exists$-eliminación, usada como sigue, elimina un símbolo existencial.

1. $\vdash \exists x A(x)$ – supóngase dado.
2. $A(x) \vdash C$ – supóngase dado, donde C no contiene a x como una variable libre, y con las variables libres mantenidas constantes para $A(x)$.
3. $\exists x A(x) \vdash C$ – $\exists$-eliminación, 2.
4. $\vdash C$ – 1, 3.

La anterior deducción corresponde al familiar argumento: Existe un x tal que $A(x)$; considérese un x tal. Entonces C, que no depende de x. Por tanto, C.

Similarmente, la $\neg$ -introducción corresponde al método de reductio ad absurdum.

Utilizando la $\Gamma$ suministrada en el teorema, cualquiera de estos procedimientos puede ser llevado a cabo ante cualquier lista de fórmulas supuestas adicionales.

La siguiente prueba muestra que $A, \neg A \vdash B$ (en palabras: a partir de una contradicción A y $\neg$ A, es deducible cualquier fórmula B). Nos referiremos a esta regla denominándola la regla de *$\neg$-eliminación débil.*

1. $A, \neg A, \neg B \vdash A$.
2. $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$.
3. $A, \neg A \vdash \neg\neg B$ – $\neg$-introducción, 1, 2.
4. $\neg\neg B \vdash B$ – $\neg$-eliminación.

(9′) 5. $A, \neg A \vdash B$ – 3,4 como había que demostrar.

El Paso 3 consiste en hacer responsable a la fórmula $\neg$ B de la contradicción A y $\neg$ A de 1 y 2. Continuando tenemos:

6. $\neg A \vdash A \supset B$ – $\supset$-introducción, 5.
7. $\vdash \neg A \supset (A \supset B)$ – $\supset$-introducción, 6.

Nuestro sistema formal pretendía ser una formalización de la teoría de números, con la inclusión de métodos aceptados solamente según el punto de vista clásico (cfr. § 13). No obstante, si el Esquema Axiomático 8 ($\neg\neg A \supset A$) es reemplazado por el siguiente (cfr. (9′): 7), todos los postulados expresarán principios aceptados también por los intuicionistas (cfr. final de § 30):

$$8^{I}. \quad \neg A \supset (A \supset B).$$

En términos de las reglas derivadas del Teorema 2, lo anterior significa reemplazar la $\neg$-eliminación por la $\neg$-eliminación débil. Cuando deseemos considerar también este último sistema, denominaremos *sistema clásico* al sistema original con el Postulado 8; y al sistema con el Postulado $8^{I}$ lo denominaremos en cambio el *sistema intuicionista* (*correspondiente*). Nuestros resultados irán marcados con el el símbolo "$^{o}$" en todos los casos en que las demostraciones ofrecidas no sean válidas para ambos sistemas, sino sólo para el sistema clásico (y no hay demostración que el lector espere descubrir por sí mismo que sirva para el sistema intuicionista).

El uso de la $\forall$-introducción seguida de la $\forall$-eliminación nos da la siguiente regla.

SUSTITUCION DE UNA VARIABLE INDIVIDUAL. *Si* x *es una variable*, A (x) *es una fórmula, y* t *es un término que está libre con respecto a* x *en* A(x): $A(x) \vdash {}^{x}A(t)$.

Abreviaremos la presentación de aplicaciones de nuestras reglas derivadas usando tácitamente propiedades generales de $\vdash$.

EJEMPLO 1. Considérese el siguiente argumento.

1. $A, B \vdash C$ – supóngase dado.
2. $A \,\&\, B \vdash A$ – &-eliminación.
3. $A \,\&\, B \vdash B$ – &-eliminación.
4. $A \,\&\, B \vdash C$ – 1, 2, 3.

Condensamos la anterior como sigue.

1. $A, B \vdash C$ – supóngase dado.
2. $A \,\&\, B \vdash C$ – &-elim., 1.

Dado "$\Gamma \vdash P$, $P \vdash Q$" (que significa: $\Gamma \vdash P$ y $P \vdash Q$), lo condensamos en "$\Gamma \vdash P \vdash Q$"; y de modo similar con cadenas más largas de deducciones, cada una de las cuales, salvo la primera, tiene como única fórmula supuesta la conclusión de la precedente. (Pero "$\Gamma \vdash P, \vdash Q$" significa: $\Gamma \vdash P$ y $\vdash Q$).

EJEMPLO 2.

1. $A \supset B, A \vdash B$ – $\supset$-eliminación.
2. $B \vdash B \vee C$ – $\vee$-introducción.
3. $A \supset B, A \vdash B \vee C$ – 1, 2.

Condensamos lo anterior en:

1. $A \supset B, A \vdash B \vdash B \vee C$ – $\supset$-elim., $\vee$-introd.

* § 24. **Dependencia y variación.** Con vistas a utilizar, en el cálculo de predicados, una deducción obtenida (esto es, de la que se ha probado que existe) por una de las reglas derivadas del Teorema 2, como deducción subsidiaria para una nueva aplicación de una de las reglas, necesitaremos (hasta donde nuestra información alcance) saber no sólo que la deducción existe, sino también que las variables libres se mantienen constantes para la fórmula supuesta que ha de ser descargada.

Al objeto de tener a mano tal información cuando sea requerida, adoptaremos, en la aplicación de las reglas, la práctica de registrar todos los casos en que una variable pueda ser variada en la deducción resultante. Es conveniente al efecto anotar cualesquiera variables que puedan ser variadas como superescritos sobre el símbolo "$\vdash$". Esta notación no es totalmente explícita, porque no muestra para cuál de las fórmulas supuestas una variable superescrita dada puede ser variada. Podemos, entonces, asociar simplemente el superescrito con las fórmulas supuestas en que la variable ocurra libre. (Cuando haya ocasión para ser más explícito, pueden establecerse los hechos verbalmente, como, p. ej., en el Lema 8a que figura más abajo).

Recordamos que, bajo la definición de variación (§22), una variable, y, puede ser variada solamente con respecto a una fórmula supuesta $D_j$ en la que ocurra libre.

Es fácil ver que, dada cualquier deducción $D_1, \ldots, D_l \vdash E$, fórmula supuesta $D_j$, y una variable, y, que ocurra libre en $D_j$, se puede hallar otra deducción de E a partir de $D_1, \ldots, D_l$ en la cual y es variada con respecto a $D_j$. (SUGERENCIA: introdúzcanse en la deducción algunos pasos superfluos). Nuestro interés, por tanto, estará siempre en saber si hay alguna deducción $D_1, \ldots, D_l \vdash E$ en la cual y no sea variada con respecto a $D_j$; y nuestras afirmaciones indicativas de que una variable, y, sea variada sólo para tales y tales fórmulas supuestas, significarán que hay alguna deducción (con las fórmulas supuestas y conclusión dadas) en la que tal es el caso.

De modo similar, dada una deducción cualquiera, $D_1, \ldots, D_l \vdash E$, siempre es posible encontrar otra deducción de E a partir de $D_1, \ldots, D_l$, en donde la conclusión E dependa de $D_j$.

El procedimiento de registrar la variación es bien sencillo (análogamente sucede con la dependencia). Así, nuestras únicas reglas que demandan la introducción de un superescrito son $\forall$-introducción, $\exists$-eliminación, y sustitución. (Incluso en tales casos el superescrito no es siempre necesario, p. ej., cuando, para una $\forall$-introducción o sustitución A (x) no contiene libre a x. Cfr. también más abajo el Lema 7b). Por otra parte, una vez que los superescritos han sido introducidos, podemos continuar manteniéndolos obviamente al pasar de las deducciones dadas a la deducción resultante (a menos que pueda darse una razón en contra), tanto al aplicar las reglas de deducción subsidiaria de esta sección, como al combinar las deducciones por las propiedades generales de $\vdash$ (§ 20).

Las situaciones que se presentan en la práctica son bastante simples, de suerte que no hay la menor dificultad en ver lo que sucede. De ordinario, las variables que son sometidas a variación han sido cabalmente introducidas con anterioridad para tal cometido por algún inmediato propósito, y así no es probable que se las pase por alto. No obstante, para que la teoría de nuestras reglas derivadas sea completa, se establecen con más detalle los hechos en los siguientes lemas.

LEMA 6. *En el teorema* 1, $A \supset B$ *depende de una de las fórmulas dadas* $\Gamma$ *en la deducción resultante* $\Gamma \vdash A \supset B$, *solamente si* B *depende de la misma fórmula en la deducción dada* $\Gamma, A \vdash B$. *De modo similar, en las otras reglas de deducción*

*subsidiaria del Teorema* 2, *la conclusión depende de una de las fórmulas dadas de* $\Gamma$ *en la deducción resultante, solamente si la conclusión depende de la misma fórmula en la deducción dada (o de una, al menos, de las dos deducciones dadas).*

Porque de otro modo, esa fórmula supuesta podría ser omitida de las fórmulas de $\Gamma$ al aplicar la regla, e introducida más tarde por (II) (y (IV)) del Lema 5.

En la $\vee$-eliminación, si C no depende tanto de A, en $\Gamma$, A $\vdash$ C, como de B, en $\Gamma$, B $\vdash$ C, la $\vee$-eliminación puede ser omitida por completo. Similarmente en la $\exists$-eliminación, si C no depende de A(x).

LEMA 7a. *En el teorema* 1, *una variable es variada respecto a una fórmula dada de* $\Gamma$ *en la deducción resultante* $\Gamma \vdash A \supset B$, *solamente si es variada respecto a la misma fórmula en la deducción dada* $\Gamma$, A $\vdash$ B. *Similarmente en las otras reglas de deducción subsidiaria del Teorema* 2, *excepto que para la variable* x *de la* $\exists$*-eliminación, la situación es como la establecida en el Lema* 7b.

LEMA 7b. *En la* $\exists$*-eliminación, la variable* x *es variada en la deducción resultante* $\Gamma(x)$, $\exists x A(x) \vdash^{x} C$, *solamente respecto a aquellas fórmulas de* $\Gamma(x)$ *que contienen libre a* x *y de las cuales depende* C *en la deducción dada* $\Gamma(x)$, A(x) $\vdash$ C. *(En la* $\exists$*-eliminación, ninguna variable es variada respecto a* $\exists x A(x)$; *y del mismo modo en la* $\vee$*-eliminación respecto a* A $\vee$ B).

Estos dos lemas pueden ser verificados examinando las pruebas de los Teoremas 1 y 2. Para la $\exists$-eliminación, si x es variada en la deducción dada respecto a una fórmula cualquiera de $\Gamma(x)$ de la que C no depende, esa fórmula de $\Gamma(x)$ puede ser omitida para la $\exists$-eliminación.

Las discusiones de dependencia y variación bajo pasos construidos según propiedades generales de $\vdash$ (utilizando la lista de tales propiedades suministrada en el Lema 5), se dejan al lector, exceptuando las que se refieren a la variación respecto a las fórmulas de $\Delta$ de (V). Antes de ocuparnos de ello (en el Lema 9), vamos a probar los siguientes lemas básicos.

LEMA 8a. *Si*

(I) $$D_1, D_2, \ldots, D_l \vdash E,$$

*donde, para* $j = 1, \ldots, l$, *solamente las distintas variables* $y_{j1}, \ldots, y_{jp_j}$ *son variadas respecto a* $D_j$ *(pero* $y_{j1}, \ldots, y_{jpj}$ *no necesitan ser distintas de las variables* $y_{k1}, \ldots, y_{kp_k}$ *para* $j \neq k$), *entonces*

(II) $\vdash \forall y_{11} \ldots \forall y_{1p_1} D_1 \supset (\forall y_{21} \ldots \forall y_{2p_2} D_2 \supset \ldots (\forall y_{l1} \ldots \forall y_{lp_l} D_l \supset E) \ldots)$;

*e inversamente.*

Porque (II) se sigue de (I) por $\forall$-eliminaciones y $\supset$-introducciones. Inversamente, (I) se sigue de (II) por $\forall$-introducciones y $\supset$-eliminaciones.

LEMA 8b. *Dada una deducción de* E *a partir de* $D_1, \ldots, D_l$, *puede ser hallada otra deducción de* E *a partir de* $D_1, \ldots, D_l$ *en la cual, para* $j = 1, \ldots, l$, *es aplicada la Regla* 9 *a premisas que dependan de* $D_j$ *solamente en relación a variables que son variadas respecto a* $D_j$ *en la deducción dada, y la Regla* 12 *no será aplicada a ninguna premisa que dependa de una fórmula supuesta.*

Tomamos la deducción dada en (I) para el Lema 8a, pasamos a (II), y de ahí, inversamente, volvemos a otra deducción (I). En esta deducción, las aplicaciones de las Reglas 9 y 12 que provienen de la prueba (II) se efectúan sobre premisas que no dependan de ninguna fórmula supuesta. Aquéllas que provienen de ∀-introducciones utilizadas para obtener (I) a partir de (II), son exactamente como las descritas en el presente lema.

LEMA 9. *En* (V) *del Lema* 5, *una variable* y *es variada respecto a una fórmula dada de* Δ *en la deducción resultante* Δ, Γ ⊢ E, *solamente* (a) *si* y *es variada respecto a la misma fórmula de* Δ *en la primera deducción dada* Δ ⊢ C, *o* (b) *si* y *es variada respecto a* C *en la segunda deducción dada* C, Γ ⊢ E, *y* C *depende de esa fórmula de* Δ *en la primera deducción dada* Δ ⊢ C, *y esa fórmula de* Δ *contiene libre a* y.

El Lema 9 sería de aplicación inmediata excepto por la siguiente contingencia. En la segunda deducción dada C, Γ ⊢ E, debería tener lugar una aplicación de la Regla 9 ó 12 con respecto a y, a una premisa dependiente de C, y, sin embargo, la variable y ha de ser mantenida constante respecto a C, porque C no contiene libre a y. Si esta deducción fuese combinada con una deducción Δ ⊢ C, en la cual C dependiese de una fórmula de Δ que contuviese libre a y, entonces y sería variada respecto a esa fórmula de Δ en la deducción resultante Δ, Γ ⊢ E. Pero podemos utilizar el Lema 8b para reemplazar la deducción dada C, Γ ⊢ E por otra, después de lo cual no podrá surgir la contingencia descrita para ninguna variable y.

De aquí en adelante, para nuevas reglas derivadas, procederemos con toda normalidad al tratar la dependencia y la variación, anotando cualquier excepción que pueda surgir e indicando con superescritos sobre el signo "⊢" todos los casos en que la variación pueda ser introducida. En general, en una regla de deducción subsidiaria que tenga fórmulas supuestas para deducciones dadas y deducciones resultantes en obvia correspondencia: La conclusión depende de (Una variable dada es variada con respecto a) una de las fórmulas supuestas dadas de la deducción resultante, solamente si esa conclusión depende de (lo es con respecto a) la correspondiente fórmula supuesta de la deducción dada, o de alguna otra deducción dada. Ejemplos de ello son los Teoremas 3 y 4 § 25 (para la dependencia), 15 y 16 § 34, la regla de inducción formal § 38, 41 (b) y (c) § 73, 42 (III)–(V) y 43 (VIIa)–(VIIIb) § 74, 59 y 60 (b2)–(d) § 81.

∀-INTRODUCCION FUERTE y ∃-ELIMINACION FUERTE. Ocasionalmente es útil emplear la ∀-introducción y la ∃-eliminación en una versión ligeramente reforzada que permite un cambio en la variable.

LEMA 10. *Sea* x *una variable*, A (x) *una fórmula, y* b *una variable, tal que* (i) b *es libre respecto a* x *en* A (x), *y* (ii) b *no ocurre libre en* A (x) (*a menos que* b *sea* x). *Sea además* C, *para la regla de* ∃*-eliminación, una fórmula que no contiene libre* a b, *y las variables libres sean mantenidas constantes para* A (b) *en la deducción subsidiaria. Entonces*:

A(b) $\vdash^{b}$ ∀xA(x). (∀-introducción fuerte).

*Si* Γ (b), A (b) ⊢ C, *entonces* Γ(b), ∃xA(x) $\vdash^{b}$ C. (∃-eliminación fuerte).

PRUEBAS. En el Ejemplo 3 § 22 derivamos la regla $C \supset A(b) \vdash^{b} C \supset \forall x A(x)$. Utilizando esta regla en lugar de la regla 9 postulada en nuestra anterior prueba para la $\forall$-introducción (§ 23), obtenemos la versión fuerte.

REGLAS DERIVADAS Y POSTULADOS RESPECTIVOS. Denominamos a los Postulados 1a, 1b y 2, los *postulados para* $\supset$, a los Postulados 3, 4a y 4b, los *&-postulados*, a los Postulados 7 y 8 (o para el sistema intuicionista, 7 y $8^{I}$) los *¬-postulados*, etc. Los Postulados para $\supset$ son utilizados al establecer todas las reglas derivadas del Teorema 2.

LEMA 11. *Para cada selección de uno o más de los símbolos lógicos* $\supset$, &, $\vee$, ¬, $\forall$ *y* $\exists$ : *Las reglas del Teorema* 2 *para* $\supset$ *y los restantes símbolos (incluyendo las versiones fuertes para* $\forall$ *y* $\exists$, *y para* ¬ *en el sistema intuicionista la regla de ¬-eliminación débil en lugar de la otra) son válidas en el sistema formal que tenga como postulados solamente los* $\supset$*-postulados y los postulados para los símbolos en cuestión, supuesto que en el caso en que los símbolos incluyan a* $\forall$ *pero no a &, los* $\forall$*-postulados incluirán un esquema axiomático adicional como el que sigue, donde* x, A(x) *y* C *están sujetos a las mismas estipulaciones establecidas para la Regla* 9:

$$9a.\quad \forall x (C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x)).$$

DEMOSTRACION. Esto puede ser verificado por una lectura de las anteriores pruebas de las reglas, con una excepción en el caso en que los símbolos incluyan a $\forall$ pero no a &, puesto que el tratamiento del Caso (e) Subcaso (e1) del Teorema 1 (§ 22) impone el uso de los &-postulados. Con el $\forall$-esquema adicional, sin embargo, aquella deducción puede ser reemplazada por la siguiente.

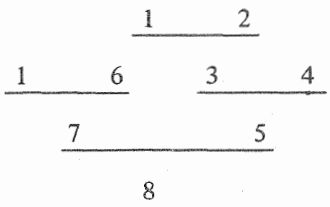
| | | |
|---|---|---|
| *p.* | $A \supset (C \supset A(x))$ | – como en la anterior. |
| $p+1.$ | $A \supset \forall x (C \supset A(x))$ | – Regla 9, *p*. |
| $p+2.$ | $\forall x (C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x))$ | – Esquema Axiomático 9a. |
| | ... | – deducción a partir de $p+1$ y $p+2$ dada por (8′): 1 (final de § 21). |
| $p+q+2.$ | $A \supset (C \supset \forall x A(x))$. | |

DEDUCCIONES EN FORMA DE ARBOL. Hasta ahora hemos considerado una deducción como una secuencia lineal de (ocurrencias de) fórmulas. A veces es útil, en cambio, considerar las (ocurrencias de) fórmulas en una ordenación parcial que represente directamente la estructura lógica. En esta ordenación, las premisas para cada inferencia son escritas inmediatamente encima de la conclusión, como se hizo al establecer las reglas de inferencia; y ninguna (ocurrencia de una) fórmula sirve como premisa para más de una inferencia. Una deducción (o prueba) dispuesta según el primer modo decimos que está en *forma secuencial*; según el último, en *forma de árbol.*

El método para convertir una deducción de E a partir de $\Gamma$ dada en forma secuencial, con un análisis dado, en una deducción en forma de árbol (llamado "resolución en hilos demostrativos" por Hilbert y Bernays 1934, pág. 221), e inversamente, resultará claro con un ejemplo.

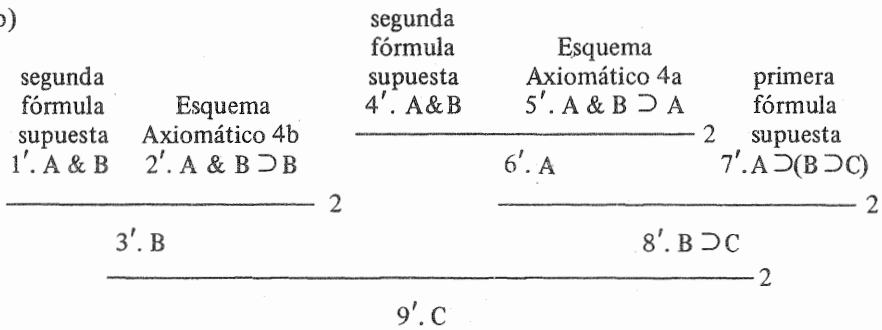
EJEMPLO 1. Considérese la deducción (6) de § 21. Según el análisis, la fórmula final 8 es una consecuencia inmediata de 7 y 5. Escribamos, pues, 7 y 5 inmediatamente encima de 8. Pero 7 es una consecuencia inmediata de 1 y 6; así, escribimos 1 y 6 justamente sobre 7; etc. Recorriendo exactamente los números 1–8, obtenemos la figura siguiente.

(a)




Escribiendo ahora las propias fórmulas (con nuevos números $1'$–$9'$, y el análisis), tenemos la deducción en forma de árbol.

(b)




Inversamente, partiendo de esta deducción de C en forma de árbol, obtenida de A ⊃ (B ⊃ C) y A & B, y disponiendo las (ocurrencias de) fórmulas en forma de secuencia lineal en el orden de los números $1'$–$9'$, obtenemos una deducción en forma secuencial (no la original).

Brevemente descrita, una *rama* de una deducción en forma de árbol consta de las (ocurrencias de) fórmulas en secuencia lineal que descienden dentro de la estructura del árbol, comenzando con una fórmula tomada como axioma o fórmula supuesta, y terminando en la conclusión (o fórmula final) de la deducción. La *altura* de una deducción en forma de árbol es la longitud de una de las ramas más largas (o, en otras palabras, el número de niveles). Una (ocurrencia de una) fórmula se dice que está *por encima* de otra (o la segunda está *por debajo* de la primera), si la primera está por encima de la segunda en la misma rama.

EJEMPLO 1 (conclusión). La deducción (b) tiene 5 ramas, a saber: $1'$, $3'$, $9'$; $2'$, $3'$, $9'$; $4'$, $6'$, $8'$, $9'$; $5'$, $6'$, $8'$, $9'$; $7'$, $8'$, $9'$. La altura es 4. La (ocurrencia de una) fórmula $4'$ está por encima de $8'$, pero no por encima de $3'$.

# CAPITULO VI

# EL CALCULO PROPOSICIONAL

§ 25. **Fórmulas de letras proposicionales.** En este capítulo destacamos, al objeto de someterla a intensivo estudio, aquella parte del sistema formal que se obtiene utilizando solamente los postulados del Grupo A1. De acuerdo con ello han de ser entendidos los significados de 'demostrable', 'deducible' y '$\vdash$'.

Conforme a la definición de 'fórmula' que se adujo para la totalidad del sistema en § 17, nuestras fórmulas han sido todas construidas en términos del simbolismo de teoría de números. Pero mientras utilicemos tan sólo los postulados del Grupo A1, muchos detalles de ese simbolismo son irrelevantes.

No sería de desear que restringiésemos la generalidad de nuestro tratamiento del cálculo proposicional porque nos hayamos propuesto aplicarlo al sistema de teoría de números. Por otra parte, hemos de sentar las bases de tal aplicación.

Ofrecemos ahora, para su utilización en el cálculo proposicional, una definición alternativa de 'fórmula' que elimina los detalles, aquí irrelevantes, de la definición de teoría de números.

Comenzamos por introducir símbolos formales de una nueva especie,

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots,$$

denominados *letras proposicionales*, de los cuales suponemos tener a nuestra disposición una lista (potencialmente) infinita. Sigue la nueva definición de 'fórmula'.

1. Una letra proposicional es una *fórmula.* 2–5. Si A y B son *fórmulas*, entonces $(A) \supset (B)$, $(A) \,\&\, (B)$, $(A) \vee (B)$ y $\neg (A)$ son *fórmulas.* 6. Solamente son *fórmulas* las obtenidas por virtud de 1–5.

Comparando esta definición con la expuesta en § 17, se advertirá que la Cláusula 1 de esta última ha sido reemplazada por la nueva Cláusula 1, y que las Cláusulas 6–7 han sido suprimidas. Cuando deseemos distinguir entre las dos nociones de fórmula, llamaremos *fórmula de teoría de números* a la definida en § 17, y *fórmula de letras proposicionales* a la presente.

EJEMPLO 1. $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$ es una fórmula de letras proposicionales (omitiendo paréntesis de conformidad con las prácticas establecidas en § 17).

Acordamos desde ahora, para este capítulo, que cuando digamos "fórmula" sin especificar un sentido particular, esta palabra puede ser leída o bien en el sentido de fórmula de letras proposicionales, o bien en el sentido de fórmula de letras predicativas que se definirá en el próximo capítulo, o bien en el sentido de teoría de números. (También puede ser leída en otros sentidos que vengan al caso. Pero a efectos de precisión, la restringimos aquí a los tres citados, dejando la cuestión de considerar si es otro el que proceda para las ocasiones en que parezca oportuno hacerlo).

Los resultados establecidos en este capítulo utilizando simplemente "fórmula" se aplicarán por tanto, y sin más aclaraciones, a cualquiera de los tres sistemas

formales que tienen en común el Grupo A1 como lista de postulados, pero difieren en el sentido de fórmula. Podemos denominar respectivamente, y para su distinción, a estos tres sistemas, el *cálculo proposicional puro*, el *cálculo proposicional de letras predicativas* y el *cálculo proposicional de teoría de números.*

Algunos de nuestros resultados serán establecidos, no obstante, utilizando "fórmula de letras proposicionales". Estos resultados se aplicarán asimismo de modo general. La única diferencia en tales casos está en que es más fácil explicarlos en términos de letras proposicionales, dejando al lector la tarea de traducirlos a otros sentidos de fórmula, cuando necesite hacerlo, por medio de dos reglas generales de traducción que suministraremos seguidamente (Teoremas 3 y 4).

Sea $P_1, ..., P_m$ una lista de distintas letras proposicionales. (Aquí "$P_1$", ..., "$P_m$" son letras metamatemáticas, utilizadas como nombres de letras proposicionales cuando no se desea limitar la discusión al uso de determinadas letras proposicionales en particular).

Una fórmula de letras proposicionales A se dice que es una fórmula de letras proposicionales *en* $P_1, ..., P_m$, si no ocurren en A letras proposicionales que no pertenezcan a $P_1, ..., P_m$.

EJEMPLO 2. $\mathcal{A} \vee (\neg\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$ es una fórmula de letras proposicionales en $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.

La *sustitución* de una letra proposicional (o, simultáneamente, de varias letras proposicionales distintas) es definida tal como se hizo para una variable en §18, salvo que ahora se aplica sin excepción a todas las ocurrencias (no habiendo aquí 'ocurrencias ligadas'). Posteriormente, en el curso de esta sección, utilizaremos además una operación llamada *reemplazo en todas las ocurrencias* de una fórmula (o, simultáneamente, de varias fórmulas distintas) definida similarmente (tornándose en fórmula la x de la definición de § 18); esta operación está exenta de ambigüedad porque las ocurrencias no llegan a solaparse.

TEOREMA 3. SUSTITUCION DE LETRAS PROPOSICIONALES. *Sea* $\Gamma$ *una serie de fórmulas de letras proposicionales, y* E *una fórmula de letras proposicionales en las distintas letras proposicionales* $P_1, ..., P_m$. *Sean* $A_1, ..., A_m$ *fórmulas. Sean* $\Gamma^*$ *y* E* *resultado de* $\Gamma$ *y* E, *respectivamente, por efecto de sustituir, de modo simultáneo y respectivo,* $P_1, ..., P_m$ *por* $A_1, ..., A_m$. *Si* $\Gamma \vdash$ E, *entonces* $\Gamma^* \vdash$ E*. (Para el caso de que $\Gamma$ sea vacío: *Si* $\vdash$ E, *entonces* $\vdash$ E*).

DEMOSTRACION. Para los postulados del Grupo A1, lo único que se requiere de las A, B, C, que aparecen en esos postulados, es que sean fórmulas fijas a todo lo largo de una aplicación dada de un postulado. Considérese ahora la deducción dada de E a partir de $\Gamma$ en el cálculo proposicional puro. Las fórmulas $\Gamma$ y la fórmula E son fórmulas de letras proposicionales en las distintas letras proposicionales $P_1, ..., P_m$; junto con ellas, pueden ocurrir algunas más $P_{m+1}, ..., P_{m+r}$ en otras fórmulas de la deducción. Sean $A_{m+1}, ..., A_{m+r}$ fórmulas cualesquiera. Sustitúyanse cada una de las letras proposicionales $P_1, ..., P_{m+r}$, por las fórmulas respectivas $A_1, ..., A_{m+r}$ a lo largo de toda fórmula de la deducción dada. Por cada aplicación de un postulado en la deducción dada, las A, B, C de la aplicación serán transformadas por la sustitución en expresiones A*, B*, C* (tornándose toda ocurrencia de A en una ocurrencia de A*, etc.). Estas expresiones A*, B*, C* serán fórmulas, puesto que a cada aplicación de una de las Cláusulas 2–5 de la definición

de fórmula de letras proposicionales, utilizada al construir A, B, C a partir de las letras proposicionales $P_1$, ..., $P_{m+r}$, corresponderá a una aplicación de la cláusula idénticamente numerada de la definición de fórmula, utilizada al construir A*, B*, C* a partir de las fórmulas $A_1$, ..., $A_{m+r}$. Por tanto, tendremos nuevamente una aplicación del mismo postulado. Así la secuencia de fórmulas en que se transforma la deducción dada, es de nuevo una deducción con el mismo análisis. Es una deducción de E* a partir de $\Gamma^*$.

EJEMPLO 3. Para ilustrar la demostración de la regla, considérese la siguiente deducción de $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ a partir de $\mathcal{B}$.

1. $\mathcal{B}$ – fórmula supuesta.

(a) 2. $\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ – Esquema Axiomático 1a.

3. $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ – Regla 2, 1, 2.

Sustituyendo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ por $\mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \,\&\, C$ (o $\exists c\,(a = c')$, $\neg\, a = 0$), obtenemos la siguiente deducción (b) (o (c)) con el mismo análisis que (a).

1. $\neg\mathcal{A} \,\&\, C$ – fórmula supuesta.

(b) 2. $\neg\mathcal{A} \,\&\, C \supset (\mathcal{B} \supset \neg\mathcal{A} \,\&\, C)$ – Esquema Axiomático 1a.

3. $\mathcal{B} \supset \neg\mathcal{A} \,\&\, C$ – Regla 2, 1, 2.

1. $\neg\, a = 0$ – fórmula supuesta.

(c) 2. $\neg\, a = 0 \supset (\exists c\,(a = c') \supset \neg\, a = 0)$ – Esquema Axiomático 1a.

3. $\exists c\,(a = c') \supset \neg\, a = 0$ – Regla 2, 1, 2.

Ilustramos ahora la aplicación de la regla con los dos mismos ejemplos. Sabemos (por referencia a (a)) que

(a′) $$\mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}.$$

La regla nos permite inferir, por las sustituciones descritas,

(b′) $$\neg\mathcal{A} \,\&\, C \vdash \mathcal{B} \supset \neg\mathcal{A} \,\&\, C,$$

(c′) $$\neg\, a = 0 \vdash \exists c\,(a = c') \supset \neg\, a = 0.$$

En un caso (desde (a′) hasta (b′)), estamos utilizando la regla dentro del cálculo proposicional puro, para el cual dicha regla es una regla derivada del tipo de deducción subsidiaria. En el caso restante, al introducir por sustitución fórmulas en otro sentido, hemos utilizado la regla para inferir (c′) en el cálculo proposicional de teoría de números a partir de (a′) en el cálculo puro.

Evidentemente (a′), (b′), (c′), etc. pueden todas ser incluidas en el aserto: Si A y B son fórmulas, entonces

(10′) $$\mathrm{B} \vdash \mathrm{A} \supset \mathrm{B}.$$

El sentido de la regla manifiesta simplemente que, habiendo establecido una relación de deducibilidad en términos de letras proposicionales particulares $\mathcal{A}, \mathcal{B},$

$C$, ..., podemos afirmar esa misma relación en la forma de un esquema con letras metamatemáticas "A", "B", "C", ... que representen fórmulas cualesquiera.

Combinando esta observación con nuestra anterior advertencia, de que una regla de la forma directa $\Gamma \vdash E$ permanece siempre válida en presencia de postulados adicionales (§ 22), vemos que todos los resultados de la forma $\Gamma \vdash E$ obtenidos en este capítulo (sean o no establecidos en términos de letras proposicionales), serán válidos para ulteriores capítulos, donde tomaremos en consideración más aspectos de la estructura de las fórmulas y una parte mayor de la lista de postulados del sistema formal original.

OBSERVACION 1. Dentro del cálculo proposicional puro, puede realizarse cada vez la sustitución de una variable determinada $P_j$, utilizando la regla con $P_1, ..., P_{j-1}, P_{j+1}, ..., P_m$ haciendo las veces de $A_1, ..., A_{j-1}, A_{j+1}, ..., A_m$.

Se dirá que una fórmula es *prima (para el cálculo proposicional)*, si no tiene ninguna de las formas $A \supset B$, $A \,\&\, B$, $A \vee B$, $\neg A$, donde A y B son fórmulas.

EJEMPLO 4. $a = 0$, $\exists c\,(a = c')$ y $\forall c\,(a = c' \vee a = b)$ son primas, pero $\neg\, a = 0$ y $\neg\, a = 0 \,\&\, \exists c\,(a = c')$ no lo son. Una fórmula de letras proposicionales es prima, sólo cuando consta simplemente de una letra proposicional.

Del hecho de que es posible reconocer sin ambigüedad (§ 17) los alcances de los operadores $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ en una fórmula, se sigue que cualquier fórmula dada está construida de un modo únicamente determinado a partir de fórmulas primas por aplicaciones de las Cláusulas 2–5 de la definición de fórmula. A las distintas fórmulas primas a partir de las cuales resultan construidas de esta suerte una o varias fórmulas, las denominamos los *distintos componentes primos (para el cálculo proposicional)* de esa fórmula o conjunto de fórmulas.

EJEMPLO 5. Los distintos componentes primos de $a = 0 \vee (\neg\, a = 0 \,\&\, \exists c\,(a = c')) \supset \forall c\,(a = c' \vee a = b)$ son $a = 0$, $\exists c\,(a = c')$, $\forall c\,(a = c' \vee a = b)$.

TEOREMA 4. CONVERSA DE SUSTITUCION DE LETRAS PROPOSICIONALES. *Bajo las mismas estipulaciones que en el Teorema* 3, *y supuesto además que* $A_1, ..., A_m$ *sean fórmulas primas distintas: Si* $\Gamma^* \vdash E^*$, *entonces* $\Gamma \vdash E$.

DEMOSTRACION. Considérese una deducción dada de $E^*$ a partir de $\Gamma^*$. Los distintos componentes primos de las fórmulas $\Gamma^*$ y $E^*$ son las fórmulas $A_1, ..., A_m$. Otras fórmulas de la deducción pueden suministrar distintos componentes primos adicionales $A_{m+1}, ..., A_{m+r}$. Sean $P_{m+1}, ..., P_{m+r}$ letras proposicionales. A lo largo de las fórmulas de la deducción dada, sean $A_1, ..., A_{m+r}$ reemplazadas simultáneamente en toda ocurrencia por $P_1, ..., P_{m+r}$, respectivamente. Considérese cualquier aplicación de un postulado en la deducción dada de $E^*$ a partir de $\Gamma^*$. Resulta fácil mostrar (utilizando el Lema 3 tal como se ilustró en § 17) que los reemplazos tendrán lugar dentro de las A, B, C de la aplicación, produciendo fórmulas de letras proposicionales $A'$, $B'$, $C'$, y tornándose toda ocurrencia de A en una ocurrencia de $A'$, etc. Así la secuencia de fórmulas de letras proposicionales, en la que ha quedado transformada la deducción dada de $E^*$ a partir de $\Gamma^*$ merced a estos reemplazos, es una deducción de E a partir de $\Gamma$ con el mismo análisis. Como

muestra el método de esta demostración, la regla conversa puede ser formulada también así:

TEOREMA 4 (segunda versión). *Sean* $\Gamma^*$ *una serie de fórmulas y* $E^*$ *una fórmula, cuyos distintos componentes primos son* $A_1, \ldots, A_m$. *Sean* $P_1, \ldots, P_m$ *letras proposicionales, no necesariamente distintas. Sean* $\Gamma$, E *resultado, respectivamente, de* $\Gamma^*$, $E^*$, *por efecto de reemplazar, de modo simultáneo en todas las ocurrencias,* $A_1, \ldots, A_m$ *por* $P_1, \ldots, P_m$, *respectivamente. Entonces* $\Gamma^* \vdash E^*$ *sólo si* $\Gamma \vdash E$.

El Teorema 4 está incluido en el Teorema 3 mientras no se lea "fórmula" en un sentido distinto al de fórmula de letras proposicionales.

EJEMPLO 6. Para ilustrar la demostración, supongamos que $\neg a = 0 \supset (\exists c\,(a = c')) \supset \neg a = 0)$ ocurre en la deducción dada de $E^*$ a partir de $\Gamma^*$ como un axioma por el Esquema 1a (como en el Ejemplo 3 (c), Paso 2). Reemplazando los distintos componentes primos $a = 0$, $\exists c\,(a = c')$ por las letras proposicionales $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, respectivamente (o ambos por $\mathcal{A}$), tenemos $\neg \mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \neg \mathcal{A})$ (o $\neg \mathcal{A} \supset (\mathcal{A} \supset \neg \mathcal{A})$), que es un axioma por el Esquema 1a en el cálculo proposicional puro. Pero reemplazando $a = 0$, $\exists c\,(a = c') \supset \neg a = 0$ (no siendo prima la última fórmula) por $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, o reemplazando las tres partes primas $a=0$, $\exists c(a=c')$, $a=0$ (no siendo distintas la primera y la tercera) por $\mathcal{A}, \mathcal{B}, C$, no resultaría un axioma por el Esquema 1a.

EJEMPLO 7. Para ilustrar la aplicación de la regla conversa, tomemos el hecho (que será establecido en § 28, Ejemplo 3) de que $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$ es indemostrable en el cálculo proposicional puro. De ello se sigue, por la regla conversa, sustituyendo $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ por $a = 0$, $\exists c\,(a = c')$, respectivamente, que $a = 0 \vee (\neg a = 0 \,\&\, \exists c\,(a = c'))$ es indemostrable en el cálculo proposicional de teoría de números, es decir, esta fórmula de nuestro sistema original no puede ser demostrada sobre la base de los postulados del Grupo A1 solamente (aunque de hecho es demostrable utilizando la lista completa, § 39). Pero de la indemostrabilidad de $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$ en el cálculo puro, no se sigue que $a = 0 \vee (\neg a = 0 \,\&\, \neg a = 0)$ sea indemostrable en el cálculo proposicional de teoría de números. ¿Por qué?

**§ 26. Equivalencia, reemplazo.** Sean A y B fórmulas. Utilizamos "$A \sim B$" como abreviatura de $(A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$. El símbolo "$\sim$" puede leerse "equivalente". Funciona como un operador formal, que colocado entre dos fórmulas del sistema da otra fórmula del sistema. Cuando se omiten paréntesis, su alcance prepondera sobre el de los otros operadores formales (§ 17).

Decimos que A es *equivalente* a B en el cálculo proposicional u otro sistema formal, si en ese sistema formal $\vdash A \sim B$. Aquí la palabra "equivalente" funciona como un verbo metamatemático, que colocado entre dos fórmulas del sistema da una aserción acerca de esas fórmulas.

TEOREMA 5. *Si* A, B *y* C *son fórmulas*:

*1. $\vdash A \supset A$.

*2. $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$.

*3. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$.

*4. $A \supset (B \supset C) \vdash A \,\&\, B \supset C$.

*5. $A \,\&\, B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$.

(Principio de identidad, cadena inferencial, intercambio de premisas, importación, exportación).

*6. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$. *7. $A \supset B \vdash (C \supset A) \supset (C \supset B)$.

*8a. $A \supset B \vdash A \,\&\, C \supset B \,\&\, C$. *8b. $A \supset B \vdash C \,\&\, A \supset C \,\&\, B$.

*9a. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$. *9b. $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee B$.

(Introducción de una conclusión, premisa, miembro conjuntivo, o miembro disyuntivo, en una implicación).

*10a. $\neg A \vdash A \supset B$. *10b. $A \vdash \neg A \supset B$. *11. $B \vdash A \supset B$.

(Demostración de una implicación por refutación de la premisa, o por prueba de la conclusión).

*12. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$. *13. $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$.

*14°. $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$. *15°. $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$.

(Contraposición, y contraposición con dobles negaciones suprimidas).

*16. $A \supset B,\ B \supset A \vdash A \sim B$.

*17a. $A \sim B \vdash A \supset B$. *17b. $A \sim B \vdash B \supset A$.

*18a. $A \sim B,\ A \vdash B$. *18b. $A \sim B,\ B \vdash A$.

(De la definición de $\sim$ en términos de $\supset$ y &).

*19. $\vdash A \sim A$. *20. $A \sim B \vdash B \sim A$. *21. $A \sim B, B \sim C \vdash A \sim C$.

(Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, de la equivalencia).

*22. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A, \neg\neg B \vdash \neg\neg C$.

*23. $\neg\neg (A \supset B) \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg B$.

*24. $\neg\neg (A \supset B), \neg\neg (B \supset C) \vdash \neg\neg (A \supset C)$.

*25. $\vdash \neg\neg (A \,\&\, B) \sim \neg\neg A \,\&\, \neg\neg B$; en particular,

$\vdash \neg\neg (A \sim B) \sim \neg\neg (A \supset B) \,\&\, \neg\neg (B \supset A)$.

(Resultados adicionales de interés para el sistema intuicionista).

DEMOSTRACIONES. Ocho de las anteriores fórmulas han sido ya establecidas, como sigue: *1 en § 20 (1′); *2 en § 21 (8′): 1; *3 en (5′): 3; *4 en (6′): 2; *5 en (7′); *6 en (8′): 2; *10a en § 23 (9′): 6; y *11 en § 25 (10′). El lector puede establecer las otras, utilizando las reglas derivadas del Teorema 2 para el cálculo proposicional (§ 23). Por ejemplo:

*9a. 1. $A \supset B, A \vdash B \vdash B \vee C$ – $\supset$-elim., $\vee$-introd.

2. $A \supset B, C \vdash B \vee C$ – $\vee$-introd.

3. $A \supset B, A \vee C \vdash B \vee C$ – $\vee$-elim., 1, 2.

4. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$ – $\supset$-introd., 3

*12. 1. $A \supset B, \neg B, A \vdash B$ – $\supset$-elim.

2. $A \supset B, \neg B, A \vdash \neg B$.

3. $A \supset B, \neg B \vdash \neg A$ – $\neg$-introd., 1, 2.

4. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$ – $\supset$-introd., 3.

*14. Similarmente a *12, pero ahora se añade, en el Paso 3, una aplicación de $\neg$-elim.

*22. 1. $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$ – $\supset$-elim., *3 (o § 21 (5′): 2).
2. $A \supset (B \supset C), B \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg C$ – *12 dos veces, 1.
3. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A \vdash B \supset \neg\neg C$ – $\supset$-elim., $\supset$-introd., 2.
4. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A \vdash \neg\neg B \supset \neg\neg C$ – *13, *12, 3.

*23. Tomando $A \supset B$, A, B en lugar de las A, B, C, respectivamente, en *22:
1. $(A \supset B) \supset (A \supset B), \neg\neg (A \supset B), \neg\neg A \vdash \neg\neg B$. Pero:
2. $\vdash (A \supset B) \supset (A \supset B)$ – *1. De donde:
3. $\neg\neg (A \supset B), \neg\neg A \vdash \neg\neg B$ – 1, 2.

*24. Tomando $A \supset B$, $B \supset C$, $A \supset C$ en lugar de A, B, C, respectivamente, en *22:
1. $(A \supset B) \supset ((B \supset C)\ (A \supset C)), \neg\neg (A \supset B), \neg\neg (B \supset C) \vdash \neg\neg (A \supset C)$. Pero:
2. $\vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ – $\supset$-introd., *6.

*25. Tomando A, B, A & B en lugar de A, B, C, respectivamente, en *22, y utilizando el Esquema Axiomático 3 (§ 19), $\neg\neg A, \neg\neg B \vdash \neg\neg (A \,\&\, B)$. Aplicando *12 dos veces al Esquema Axiomático 4a, $\vdash \neg\neg (A \,\&\, B) \supset \neg\neg A$; etc.

REEMPLAZO. Sea A una expresión formal. Considérese otra expresión formal C. Puede suceder que A ocurra como parte (consecutiva) de C; lo cual puede, empero, tener lugar más de una vez. Supongamos que, en efecto, A ocurre en C, y que si ello sucede más de una vez, se ha especificado entonces una ocurrencia particular de A en C. Denotamos ahora a C, tras haber especificado una ocurrencia particular de A en C, por "$C_A$". En notación de yuxtaposición, $C_A$ es EAF, donde E y F son las partes (posiblemente vacías) que preceden y siguen a la parte especificada A. Sea ahora B una expresión formal. El resultado de *reemplazar* la parte especificada A de C por B, es la expresión EBF. A esta expresión la denotamos por "$C_B$".

Compárese esta definición de reemplazo con la definición de sustitución dada en § 18. El reemplazo se aplica a una ocurrencia especificada de una expresión que consta de uno o más símbolos. La sustitución se aplica a todas las ocurrencias de un solo símbolo, a menos que sea preciso tener en cuenta la distinción entre ocurrencias 'libres' y 'ligadas', en cuyo caso se aplica a todas las ocurrencias libres. (En § 25 hemos utilizado el reemplazo en todas las ocurrencias. Ello equivale a aplicar sucesivamente el reemplazo, tal como ahora se ha definido, a cada una de las ocurrencias, originales y no-solapadas, de una expresión en una expresión).

EJEMPLO 1. Si A es $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, $C_A$ es $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \,\&\, \neg ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$ y B es $\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, entonces $C_B$ es $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \,\&\, \neg ((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$.

La precedente definición de reemplazo se ha establecido para expresiones formales en general. Para el caso de que A, $C_A$ y B sean fórmulas de letras proposicio-

nales (como en el Ejemplo 1), tenemos la siguiente situación (según cabe demostrar rigurosamente mediante la aplicación del análisis de los alcances de los operadores (§ 17) a la definición de fórmula de letras proposicionales (§ 25)): La fórmula $C_A$ puede ser construida a partir de la parte especificada A por aplicaciones de las Cláusulas 2–5 de la definición de fórmula de letras proposicionales, y $C_B$ puede ser construida a partir de B por pasos paralelos. Al número de pasos en esta construcción de $C_A$ a partir de A, una vez que A está dada y con exclusión de los pasos requeridos para construir las partes que no contienen la ocurrencia especificada de A, lo llamamos la *profundidad* de esa ocurrencia de A en $C_A$. En otras palabras, la profundidad de la parte A en $C_A$ es el número de operadores bajo cuyo alcance se encuentra dicha parte.

EJEMPLO 1 (continuación). Las construcciones paralelas de $C_A$ a partir de A, y de $C_B$ a partir de B son como sigue, siendo la profundidad 3

| | |
|---|---|
| $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ | $\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ |
| $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A}$ | $(\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A}$ |
| $\neg\ ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$ | $\neg ((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$ |
| $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \,\&\, \neg\ ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$ | $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \,\&\, \neg\ ((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$ |

TEOREMA 6. *Si* A, B, $C_A$ *y* $C_B$ *son fórmulas de letras proposicionales relacionadas entre sí tal como se establece en la precedente definición de reemplazo, entonces* $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$. (Teorema de reemplazo).

DEMOSTRACION, por inducción sobre la profundidad de A en $C_A$, considerando a A y B fijas para la inducción. La proposición de inducción es que lo que se establece en el teorema es verdad, con A y B fijas, para todo $C_A$, en donde la ocurrencia especificada de A está a profundidad *d*. BASE: A está a profundidad 0 en $C_A$. Entonces $C_A$ es A, $C_B$ es B, y la conclusión del teorema es, simplemente, $A \sim B \vdash A \sim B$, lo que vale como propiedad general de $\vdash$. PASO DE INDUCCION: A está a profundidad $d + 1$ en $C_A$. Como hipótesis de la inducción, $A \sim B \vdash M_A \sim M_B$, para cualquier fórmula de letras proposicionales $M_A$ en la que la ocurrencia especificada de A se encuentre a profundidad *d*. Ahora bien, $C_A$ ha de tener una de las siete formas $M_A \supset N$, $N \supset M_A$, $M_A \,\&\, N$, $N \,\&\, M_A$, $M_A \vee N$, $N \vee M_A$, $\neg\ M_A$, donde $M_A$ y N son fórmulas de letras proposicionales, y A está a profundidad *d* en $M_A$. Por la hipótesis de la inducción, $A \sim B \vdash M_A \sim M_B$. De otra parte, por el que corresponda de los siguientes lemas (tomando en él $M_A$ en lugar de A, $M_B$ en lugar de B, y N en lugar de C), $M_A \sim M_B \vdash C_A \sim C_B$. Por consiguiente $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$.

LEMAS PARA EL REEMPLAZO. *Si* A, B *y* C *son fórmulas*:

*26. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$.

*27. $A \sim B \vdash C \supset A \sim C \supset B$.

*28a. $A \sim B \vdash A \,\&\, C \sim B \,\&\, C$.

*28b. $A \sim B \vdash C \,\&\, A \sim C \,\&\, B$.

*29a. $A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$.

*29b. $A \sim B \vdash C \vee A \sim C \vee B$.

*30. $A \sim B \vdash \neg\ A \sim \neg\ B$.

DEMOSTRACIONES.

*26. 1. $A \sim B \vdash B \supset A$ – &-elim. (*17b).
2. $A \sim B \vdash (A \supset C) \supset (B \supset C)$ – *6, 1.
3. $A \sim B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$ – de modo similar, utilizando *17a y *6.
4. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$ – &-introd. (*16), 2, 3.

*27. Análogamente, utilizando *17 y *7, luego *17b y *7.

EJEMPLO 1 (conclusión). Escríbase $\sim$ entre cada uno de los cuatro pares de fórmulas en las construcciones paralelas de $C_A$ y $C_B$. La segunda de las cuatro fórmulas resultantes es deducible de la primera por *29a, la tercera, de la segunda por *30, y la cuarta, de la tercera por *28b. Combinando consecutivamente estas deducciones, tenemos la deducción de $C_A \sim C_B$ a partir de $A \sim B$ que está dada por el método de demostración del Teorema 6.

El Teorema 6 ha sido establecido en términos de fórmulas de letras proposicionales. Pero por la regla de sustitución (Teorema 3, § 25), podemos aplicarlo para otros sentidos de fórmula, supuesto que las A, B, $C_A$ de la aplicación puedan ser obtenidas a partir de fórmulas de letras proposicionales mediante sustitución simultánea de las letras proposicionales por fórmulas. De donde, o directamente por el método de la anterior demostración del Teorema 6:

TEOREMA 6 (segunda versión). *Si* A *y* B *son fórmulas*, $C_A$ *es una fórmula construida a partir de una ocurrencia especificada de* A *utilizando únicamente los operadores* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, *y* $C_B$ *resulta de* $C_A$ *al reemplazar esa ocurrencia de* A *por* B, *entonces* $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$.

EJEMPLO 2. Sea x una variable, y A, B y C (x) fórmulas. Por el teorema, $A \sim B \vdash A \vee \forall x (A \supset C(x)) \sim B \vee \forall x (A \supset C(x))$. (Puede considerarse esta fórmula como proviniente de $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \vee C \sim \mathcal{B} \vee C$ mediante sustitución de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $C$, por A, B, $\forall x (A \supset C(x))$, respectivamente). Pero nuestros actuales medios son inadecuados para deducir $A \vee \forall x (A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x (B \supset C(x))$ a partir de $A \sim B$. Aquí, la ocurrencia de A que ha de ser reemplazada está dentro de la parte $\forall x (A \supset C(x))$, y así $C_A$ no puede ser construida a partir de la ocurrencia de A utilizando sólo los operadores $\supset$, &, $\vee$, $\neg$.

COROLARIO. *Bajo las condiciones del teorema* (*en cualquiera de ambas versiones*), $A \sim B, C_A \vdash C_B$. (Propiedad de equivalencia del reemplazo).

A partir del teorema por *18a. (Recíprocamente, el teorema es obtenido a partir del corolario y *19 tomando a $C_A \sim C_A$ como la $C_A$ del teorema. El teorema incluye los lemas como casos en que la profundidad es 1).

Nuestros resultados se han obtenido con vistas a efectuar el reemplazo de una sola ocurrencia de A por cada vez. Por reiteradas aplicaciones podemos también reemplazar cualquier conjunto de ocurrencias.

CADENAS DE EQUIVALENCIAS. Podemos presentar ahora demostraciones de

equivalencia entre fórmulas de letras proposicionales de la manera abreviada siguiente. Escribamos

$$\vdash C_0 \sim C_1 \sim \ldots \sim C_{n-1} \sim C_n,$$

donde para cada $i$ ($i = 1, \ldots, n$), o bien:

(a) $C_i$ es la misma fórmula que $C_{i-1}$; o

($b_1$) $\vdash C_{i-1} \sim C_i$ o ($b_2$) $\vdash C_i \sim C_{i-1}$; o

(c) $C_i$ proviene de $C_{i-1}$ reemplazando una o más ocurrencias de $A_i$ por $B_i$, donde (1) $\vdash A_i \sim B_i$ o (2) $\vdash B_i \sim A_i$.

Entonces podemos considerar a "$C_0 \sim C_1 \sim \ldots \sim C_{n-1} \sim C_n$" como una abreviatura de $(\ldots((C_0 \sim C_1) \,\&\, (C_1 \sim C_2)) \,\&\, \ldots \,\&\, (C_{n-2} \sim C_{n-1})) \,\&\, (C_{n-1} \sim C_n)$; y podemos entender que $\vdash C_j \sim C_k$ para todo par $j$, $k$ ($j$, $k = 0, \ldots, n$). Porque tendremos para cada $i$ o bien $\vdash C_{i-1} \sim C_i$, o $\vdash C_i \sim C_{i-1}$, por *19 en el Caso (a), de modo inmediato en el Caso (b), y por aplicaciones del Teorema 6 en el Caso (c). Entonces tendremos $\vdash C_j \sim C_k$ para todo otro par $j$, $k$ por *19, *20 y *21. El método se aplica igualmente, cuando tengamos cualquier lista de fórmulas supuestas $\Gamma$ escrita antes del símbolo "$\vdash$", a todo lo largo de dicha lista. Podemos insertar observaciones aclaratorias encerradas en corchetes entre eslabones de la cadena. (Como ejemplo, véase la demostración de *57 en § 27).

El método de cadena será también aplicable cuando en lugar de $\sim$ tengamos algún otro símbolo relacional, para el cual hayamos establecido las correspondientes propiedades reflexiva, simétrica, transitiva, y de reemplazo. Por lo demás, a falta de alguna de estas propiedades (excepto la transitividad), puede modificarse dicho método para aplicarlo como sigue. Si falta la simetría, omítase ($b_2$) y (c) (2), y exíjase que $j \leq k$. Si también falta la reflexividad, omítase asimismo (a) y exíjase que $j < k$. Si falta la reemplazabilidad, omítase (c). (Ejemplos extraídos del Capítulo VIII: con todas las propiedades presentes, $=$; faltando la simetría y la y la reemplazabilidad, $\leq$; faltando también la reflexividad, $<$).

§ 27. **Equivalencias, dualidad.** TEOREMA 7. *Si* A, B *y* C *son fórmulas*:

*31. $\vdash (A \,\&\, B) \,\&\, C \sim A \,\&\, (B \,\&\, C)$.
*32. $\vdash (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$
*33. $\vdash A \,\&\, B \sim B \,\&\, A$.
*34. $\vdash A \vee B \sim B \vee A$.
*35. $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \sim (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$.
*36. $\vdash A \vee (B \,\&\, C) \sim (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$.
*37. $\vdash A \,\&\, A \sim A$.
*38. $\vdash A \vee A \sim A$.
*39. $\vdash A \,\&\, (A \vee B) \sim A$.
*40. $\vdash A \vee (A \,\&\, B) \sim A$.

(Leyes asociativa, conmutativa, distributiva, de idempotencia y de eliminación).

*41. $A \vdash A \supset B \sim B$.
*42. $B \vdash A \supset B \sim B$.
*43. $\neg A \vdash A \supset B \sim \neg A$.
*44. $\neg B \vdash A \supset B \sim \neg A$.
*45. $B \vdash A \,\&\, B \sim A$.
*46. $B \vdash A \vee B \sim B$.
*47. $\neg B \vdash A \,\&\, B \sim B$.
*48. $\neg B \vdash A \vee B \sim A$.

(Casos especiales de implicación, conjunción y disyunción).

$$*49^{\circ}.\ \vdash \neg\neg A \sim A.$$

$*50.\ \vdash \neg(A \,\&\, \neg A).$ $\qquad$ $*51^{\circ}.\ \vdash A \vee \neg A.$

(Ley de doble negación, negación de contradicción, ley de tercero excluido).

$*52^{\circ}.\ \vdash A \,\&\, (B \vee \neg B) \sim A.$ $\qquad$ $*53.\ \vdash A \vee (B \,\&\, \neg B) \sim A.$

$*54.\ \vdash A \,\&\, B \,\&\, \neg B \sim B \,\&\, \neg B.$ $\qquad$ $*55^{\circ}.\ \vdash A \vee B \vee \neg B \sim B \vee \neg B.$

(Simplificación de una disyunción de conjunciones, o de una conjunción de disyunciones).

$*56^{\circ}.\ \vdash A \vee B \sim \neg(\neg A \,\&\, \neg B).$ $\qquad$ $*57^{\circ}.\ \vdash A \,\&\, B \sim \neg(\neg A \vee \neg B).$

$*58^{\circ}.\ \vdash A \supset B \sim \neg(A \,\&\, \neg B).$ $\qquad$ $*59^{\circ}.\ \vdash A \supset B \sim \neg A \vee B.$

$*60^{\circ}.\ \vdash A \,\&\, B \sim \neg(A \supset \neg B).$ $\qquad$ $*61^{\circ}.\ \vdash A \vee B \sim \neg A \supset B.$

(Cada dos de los $\supset$, &, $\vee$ en términos del otro y $\neg$).

$*62^{\circ}.\ \vdash \neg(A \,\&\, B) \sim \neg A \vee \neg B.$ $\qquad$ $*63.\ \vdash \neg(A \vee B) \sim \neg A \,\&\, \neg B.$

(Transferencia de $\neg$ a través de & y $\vee$ (leyes de De Morgan, 1847)).

$*49a.\ \vdash A \supset \neg\neg A.$ $\qquad$ $*49b.\ \vdash \neg\neg\neg A \sim \neg A.$

$*49c.\ \vdash A \vee \neg A \supset (\neg\neg A)$; de donde $\vdash A \vee \neg A \supset (\neg\neg A \sim A).$

$*50a.\ \vdash \neg(A \sim \neg A).$ $\qquad$ $*51a.\ \vdash \neg\neg(A \vee \neg A).$

$*56a.\ \vdash A \vee B \supset \neg(\neg A \,\&\, \neg B).$ $\qquad$ $*51b.\ \vdash \neg\neg(\neg\neg A \supset A).$

$*56b.\ \vdash \neg A \vee B \supset \neg(A \,\&\, \neg B).$ $\qquad$ $*57a.\ \vdash A \,\&\, B \supset \neg(\neg A \vee \neg B).$

$*58a.\ \vdash (A \supset B) \supset \neg(A \,\&\, \neg B).$ $\qquad$ $*57b.\ \vdash A \,\&\, \neg B \supset \neg(\neg A \vee B).$

$*58b$–$d.\ \vdash A \supset \neg B \sim \neq (A \,\&\, B) \sim \neg\neg A \supset \neg B \sim \neg\neg(\neg A \vee \neg B).$

$*58e, f.\ \neg\neg B \supset B \vdash \neg\neg A \supset B \sim A \supset B \sim \neg(A \,\&\, \neg B).$

$*58g.\ \vdash (\neg\neg A \supset B) \supset \neg(A \,\&\, \neg B).$ $\qquad$ $*59a.\ \vdash \neg A \vee B \supset (A \supset B).$

$*60a.\ \vdash A \,\&\, B \supset \neg(A \supset \neg B).$ $\qquad$ $*59b.\ \vdash (A \supset B) \supset \neg\neg(\neg A \vee B).$

$*60b.\ \vdash A \,\&\, \neg B \supset \neg(A \supset B).$ $\qquad$ $*59c.\ \vdash (\neg A \supset B) \supset \neg\neg(A \vee B).$

$*60c.\ \vdash \neg\neg A \,\&\, B \supset \neg(A \supset \neg B).$ $\qquad$ $*61a.\ \vdash A \vee B \supset (\neg A \supset B).$

$*60d$–$f.\ \vdash \neg\neg A \,\&\, \neg B \sim \neg(A \supset B) \sim \neg(\neg A \vee B) \sim \neg\neg(A \,\&\, \neg B).$

$*60g$–$i.\ \vdash \neg\neg(A \supset B) \sim \neg(A \,\&\, \neg B) \sim A \supset \neg\neg B \sim \neg\neg A \supset \neg\neg B.$

$*62a.\ \vdash \neg A \vee \neg B \supset \neg(A \,\&\, B).$ $\qquad$ $*61b.\ \vdash \neg(A \vee B) \sim \neg(\neg A \supset B).$

(Resultados adicionales de interés para el sistema intuicionista).

DEMOSTRACIONES PARA EL SISTEMA CLASICO, exceptuando *32, *34, *36, *38, *40, *53, *55. Algún trabajo puede ahorrarse, si se desea, posponiendo la demostración de estos siete hasta que se disponga de la dualidad (Corolario del Teorema 8).

*35. 1. $A, B \vdash A \,\&\, B \vdash (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ – &-introd., $\vee$-introd.
2. $A, C \vdash A \,\&\, C \vdash (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ – &-introd., $\vee$-introd.
3. $A, B \vee C \vdash (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ – $\vee$-elim., 1, 2.
4. $A \,\&\, (B \vee C) \vdash (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ – &-elim., 3.
5. $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \supset (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ – $\supset$-introd., 4.
6. $A \,\&\, B \vdash A$ – &-elim.
7. $A \,\&\, B \vdash B \vdash B \vee C$ – &-elim., $\vee$-introd.
8. $A \,\&\, B \vdash A \,\&\, (B \vee C)$ – &-introd., 6, 7.
9. $A \,\&\, C \vdash A \,\&\, (B \vee C)$ – similarmente.
10. $(A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C) \vdash A \,\&\, (B \vee C)$ – $\vee$-elim., 8, 9.
11. $\vdash (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C) \supset A \,\&\, (B \vee C)$ – $\supset$-introd., 10.
12. $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \sim (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ – &-introd. (*16), 5, 11.

*49. 1. $\vdash \neg\neg A \supset A$ – $\neg$-elim., $\supset$-introd. (o Esquema Axiomático 8).
2. $A, \neg A \vdash A$.
3. $A, \neg A \vdash \neg A$.
4. $A \vdash \neg\neg A$ – $\neg$-introd., 2, 3; etc.

*51. 1. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$ – $\vee$-introd.
2. $\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$.
3. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ – $\neg$-introd., 1, 2.
4. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A$ – similarmente.
5. $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ – $\neg$-introd., 3, 4.
6. $\vdash A \vee \neg A$ – $\neg$- elim., 5.

OBSERVACION 1. Así en el sistema formal sin el Esquema Axiomático 8, $\neg\neg B \supset B \vdash A \vee \neg A$ donde B es $A \vee \neg A$. Recíprocamente, en el sistema intuicionista, $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \supset A$, así:

1. $A \vdash \neg\neg A \supset A$ – *11.
2. $\neg A \vdash \neg\neg A \supset A$ – *10b.
3. $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \supset A$ – $\vee$-elim., 1, 2.

De este modo, o bien $\neg\neg A \supset A$, o bien $A \vee \neg A$, pueden ser elegidos como el postulado no-intuicionista del sistema clásico.

*52. Por *45 y *51.

*54. Similarmente por *47 y *50. Se han omitido paréntesis en el resultado, puesto que por *31 es irrelevante el modo en que se considere la asociación.

*56. 1. $A, \neg A \,\&\, \neg B \vdash A$.
2. $A, \neg A \,\&\, \neg B \vdash \neg A$ – &-elim.

3. $A \vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ – $\neg$-introd., 1, 2.
4. $B \vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ – similarmente.
5. $\vdash A \vee B \supset \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ – $\vee$-elim., 3, 4, $\supset$-introd.
6. $\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$ – $\vee$-introd.
7. $\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$.
8. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ – $\neg$-introd., 6, 7.
9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ – similarmente.
10. $\vdash \neg(A \vee B) \supset \neg A \,\&\, \neg B$ – &-introd. 8, 9, $\supset$-introd.
11. $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \supset A \vee B$ – contraposición (*14), 10.

*57. Presentado como una cadena de equivalencias: $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \sim \neg\neg(\neg\neg A \,\&\, \neg\neg B)$ [*56] $\sim \neg\neg A \,\&\, \neg\neg B$ [*49] $\sim A \,\&\, B$ [*49].

*59–63. Establézcanse por el método de cadena.

DEMOSTRACIONES PARA EL SISTEMA INTUICIONISTA. *49c. Por la Observación 1; por *49a, *16 y *17a, $\vdash \neg\neg A \supset A \sim (\neg\neg A \sim A)$. *51a. Por la demostración de *51 omitiendo el Paso 6. *51b. Aplíquese dos veces *12 a *49c, y utilícese *51a. *58d. Utilícese *63. *60f. Utilícese *25.

*Intercambiar* dos expresiones A y B a lo largo de una tercera expresión C es reemplazar en C, simultáneamente, todas las ocurrencias de A por B y todas las ocurrencias de B por A (seguirán ejemplos).

TEOREMA 8°. *Sea* D *una fórmula de letras proposicionales construida a partir de las distintas letras proposicionales* $P_1, \ldots, P_m$ *y sus negaciones* $\neg P_1, \ldots, \neg P_m$, *utilizando únicamente los operadores* &, $\vee$. *Entonces, al intercambiar a lo largo de* D & *con* $\vee$ *y cada letra con la negación de ella, se obtiene una fórmula* $D^\dagger$ *equivalente a la negación* $\neg$ D *de* D.

*En otras palabras, si* D *es una fórmula tal de letras proposicionales, y* $D^\dagger$ *es el resultado de aplicar el intercambio descrito a* D: $\vdash \neg D \sim D^\dagger$.

EJEMPLO 1°. Tomando como D a $\neg A \,\&\, (\neg B \vee B)$, $\neg$ D es equivalente a $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \neg \mathcal{B})$.

La demostración consiste esencialmente en lo siguiente: el $\neg$ de $\neg$D puede ser transferido progresivamente al interior por aplicaciones de *62 y *63, siendo luego descargadas por aplicaciones de *49 cualesquiera dobles negaciones resultantes, con lo cual D se transforma en $D^\dagger$ (seguirán detalles).

EJEMPLO 1 (conclusión).

$$\begin{aligned} \vdash \neg(\neg\mathcal{A} \,\&\, (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B})) &\sim \\ \neg\neg\mathcal{A} \vee \neg(\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B}) &\sim \\ \neg\neg\mathcal{A} \vee (\neg\neg\mathcal{B} \,\&\, \neg\mathcal{B}) &\sim \\ \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \neg\mathcal{B}). & \end{aligned}$$

Al objeto de dar la demostración más explícitamente, tomamos como número de inducción (para una inducción por curso de valores) al número de ocurrencias de & y **V** en D; llámesele el *grado* de D.

BASE: D es de grado 0. Entonces para alguna letra proposicional P, D es P o D es $\neg$P. CASO 1: D es P. Entonces $\vdash \neg$ D $\sim \neg$ P [hipótesis del caso] $\sim$ P$^\dagger$ [definición de $\dagger$] $\sim$ D$^\dagger$ [hipótesis del caso]. CASO 2: D es $\neg$ P. Similarmente, utilizando *49. PASO DE INDUCCION: D es de grado $g + 1$. Entonces para algunas fórmulas de letras proposicionales A y B, del tipo bajo consideración, con grados $\leq g$, o bien D es A & B, o D es A **V** B. CASO 1: D es A & B. Entonces $\vdash \neg$ D $\sim \neg$ (A & B) [hipótesis del caso] $\sim \neg$ A **V** $\neg$ B [*62] $\sim$ A$^\dagger$ **V** B$^\dagger$ [hipótesis de la inducción] $\sim$ (A & B)$^\dagger$ [definición de $\dagger$] $\sim$ D$^\dagger$ [hipótesis del caso]. CASO 2: D es A **V** B. Similarmente.

EJEMPLO 2°. Por la regla de sustitución (Teorema 3 § 25), sustituyendo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ por $B$, $\neg\mathcal{A}$ **V** $C$, en el resultado del Ejemplo 1,

$$\vdash \neg(\neg B \,\&\, (\neg[\neg\mathcal{A} \vee C] \vee [\neg\mathcal{A} \vee C])) \sim B \vee ([\neg\mathcal{A} \vee C] \,\&\, \neg[\neg\mathcal{A} \vee C]).$$

De hecho, para cualesquiera fórmulas A y B,

$$\vdash \neg(\neg A \,\&\, (\neg B \vee B)) \sim A \vee (B \,\&\, \neg B).$$

Como este ejemplo ilustra, puede establecerse también el teorema utilizando cualesquiera fórmulas $A_1, \ldots, A_m$ en lugar de las letras proposicionales $P_1, \ldots, P_m$, supuesto que $A_1, \ldots, A_m$ retengan su identidad a lo largo de la construcción de D, y que sean mantenidas intactas en la operación de intercambio. (Segunda versión del Teorema 8).

COROLARIO°. *Una equivalencia entre dos fórmulas literales* E *y* F *del tipo descrito en el teorema queda preservada después de intercambiar* & *con* **V** *a lo largo de* E *y* F.

*En otras palabras, si* E *y* F *son dos fórmulas tales de letras proposicionales, y* E′ *y* F′ *son los resultados de aplicar el intercambio descrito a* E *y* F, *respectivamente: Si* $\vdash$ E $\sim$ F, *entonces* $\vdash$ E′ $\sim$ F′. (Principio de dualidad).

EJEMPLO 3°. Por *52 $\vdash \mathcal{A} \,\&\, (\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{B}) \sim \mathcal{A}$. De donde (tomando $\mathcal{A} \,\&\, (\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{B})$ en lugar de E y $\mathcal{A}$ en lugar de F) $\vdash \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \neg \mathcal{B}) \sim \mathcal{A}$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis, $\vdash$ E $\sim$ F. Sustituyamos cada letra proposicional P dentro de E y F por la negación $\neg$P de esa letra, indicando esta operación de sustitución por "*". Entonces, por la regla de sustitución (Teorema 3 § 25), $\vdash$ E* $\sim$ F*. Seguidamente reemplacemos dentro de E* y F* cada letra doblemente negada $\neg\neg$P por la simple letra P, indicando esta operación por "‡". Por la ley de doble negación (*49) y la propiedad de equivalencia del reemplazo (Corolario del Teorema 6), $\vdash$ E*$^\ddagger$ $\sim$ F*$^\ddagger$. El efecto de estas dos operaciones es intercambiar las letras proposicionales con las negaciones de ellas en la equivalencia dada. Ahora, por el Teorema 6 (ó *30), $\vdash \neg$ E*$^\ddagger \sim \neg$ F*$^\ddagger$. Evaluando las negaciones por el Teorema 8, $\vdash$ E*$^{\ddagger\dagger}$ $\sim$ F*$^{\ddagger\dagger}$. Estos dos últimos pasos efectúan el intercambio de & con **V**, e intercambian por segunda vez las letras proposicionales con las negaciones de ellas a fin de devolverles su condición original. Lo que tenemos ahora es por tanto $\vdash$ E′ $\sim$ F′.

EJEMPLO 3 (conclusión).

| | | |
|---|---|---|
| $\vdash E \sim F.$ | $\vdash$ | $\mathcal{A} \,\&\, (\ \mathcal{B} \,\mathbf{V} \neg\ \ \mathcal{B}) \sim\ \ \mathcal{A}.$ |
| $\vdash E^* \sim F^*.$ | $\vdash$ | $\neg\mathcal{A} \,\&\, (\neg\, \mathcal{B} \,\mathbf{V} \neg \neg\, \mathcal{B}) \sim\ \ \neg\mathcal{A}.$ |
| $\vdash E^{*\ddagger} \sim F^{*\ddagger}.$ | $\vdash$ | $\neg\mathcal{A} \,\&\, (\neg\, \mathcal{B} \,\mathbf{V}\ \ \ \mathcal{B}) \sim\ \ \neg\mathcal{A}.$ |
| $\vdash \neg\, E^{*\ddagger} \sim \neg\, F^{*\ddagger}.$ | $\vdash$ | $\neg\ (\neg\mathcal{A} \,\&\, (\neg\, \mathcal{B} \,\mathbf{V}\ \ \ \mathcal{B})) \sim \neg\ \neg\mathcal{A}.$ |
| $\vdash E^{*\ddagger\dagger} \sim F^{*\ddagger\dagger}$, esto es $\vdash E' \sim F'.$ | $\vdash$ | $\mathcal{A} \,\mathbf{V}\, (\ \mathcal{B} \,\&\ \ \neg\, \mathcal{B}) \sim\ \ \mathcal{A}.$ |

EJEMPLO 4°. Sustituyendo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ por cualesquiera fórmulas A, B en el resultado del Ejemplo 3 (por el Teorema 3 § 25), $\vdash$ A **V** (B & $\neg$ B) $\sim$ A. Esto es *53.

Similarmente, *32, *34, *36, *38, *40, *55 se siguen de *31, *33, *35, *37, *39, *54, respectivamente, por dualidad (Corolario del Teorema 8), cuando A, B, C, son simples letras proposicionales; y por tanto, por la regla de sustitución (Teorema 3), cuando A, B, C son fórmulas cualesquiera.

EJEMPLO 5°. Por dualidad (Corolario del Teorema 8):

(a) Si $\vdash \mathcal{A} \,\mathbf{V}\, \mathcal{B} \sim \mathcal{A}$, entonces $\vdash A \,\&\, B \sim \mathcal{A}$.

Pero no podemos inferir lo siguiente:

(b) "Para cualesquiera fórmulas A y B, si $\vdash$ A **V** B $\sim$ A, entonces $\vdash$ A & B $\sim$ A". (Pues tomando a $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ & $\neg\, \mathcal{B}$ como las A, B en (b), "$\vdash$ A **V** B $\sim$ A" se convierte en "$\vdash \mathcal{A} \,\mathbf{V}\, (\mathcal{B} \,\&\, \neg\, \mathcal{B}) \sim \mathcal{A}$", que es verdadera por *53; mientras que "$\vdash$ A & B $\sim$ A" se convierte en "$\vdash \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \,\&\, \neg\, \mathcal{B} \sim \mathcal{A}$", que es falsa como se mostrará en el Ejemplo 4 de § 28). Explíquese. (¿En qué difiere la presente situación de los Ejemplos 2 y 4? ) – Para establecer una segunda versión del corolario, hemos de exigir que $A_1, \ldots, A_m$ sean fórmulas primas distintas (cfr. Teoremas 3 y 4). – Puesto que (b) es falso, por el Teorema 3 lo es también:

(c) "$\mathcal{A} \,\mathbf{V}\, \mathcal{B} \sim \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \sim \mathcal{A}$".

La dualidad es así válida sólo como regla de deducción subsidiaria, no como regla directa.

El reconocimiento de la dualidad en lógica se remonta a Schröder 1877.

Al aplicar la dualidad a una fórmula que ha sido abreviada omitiendo paréntesis según la convención de § 17, en la cual & prepondera sobre **V**, han de tomarse precauciones para mostrar los alcances de los operadores sin cambio en el resultado. (de ahí que usualmente prefiramos en este respecto no aplicar la convención entre & y **V**).

A modo de ejercicio, el lector puede verificar el siguiente addendum al corolario, reconsiderando la demostración.

COROLARIO (segunda parte)°. *Asimismo*: *Si* $\vdash$ E $\supset$ F, *entonces* $\vdash$ F' $\supset$ E'. (Relación converso-dual).

EJEMPLO 6°. El axioma $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ tiene como converso-dual al axioma $\mathcal{A} \supset \mathcal{A} \,\mathbf{V}\, \mathcal{B}$. La fórmula demostrable $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \,\mathbf{V}\, \mathcal{B}$ es su propia converso-dual.

§ 28. **Evaluación, consistencia.** Al construir el sistema formal, o un subsistema en este capítulo, nuestras investigaciones metamatemáticas han sido dedicadas

principalmente a establecer la demostrabilidad de ciertas fórmulas y la deducibilidad de ciertas fórmulas a partir de otras, esto es, a desarrollar la lógica y la matemática dentro del sistema formal. Ello es una parte necesaria de nuestro programa y contribuye a mostrar que el sistema formal constituye una formalización de una cierta parte de la matemática.

Pero también en metamatemática se plantean cuestiones que dicen relación al sistema formal como un todo. Una de ellas es la cuestión de la 'consistencia' del sistema, que es fundamental en el programa de Hilbert (§ 14).

Se dice que el cálculo proposicional (y generalmente cualquier sistema formal que tenga el símbolo $\neg$ para la negación) es (*simplemente*) *consistente*, si, para ninguna fórmula A, tanto A como $\neg$ A son ambas demostrables en el sistema; y que es (*simplemente*) *inconsistente* en el caso contrario, es decir que, para alguna fórmula A, tanto $\vdash$ A como $\vdash \neg$ A.

Esta es una definición estrictamente metamatemática. Se refiere sólo al símbolo formal $\neg$ y a las definiciones de fórmula y fórmula demostrable. El demostrar la consistencia de un sistema formal dado se convierte así en un problema matemático exacto que puede ser considerado en metamatemática.

La definición y el problema de la consistencia cobran significado desde fuera de la metamatemática, bajo la interpretación del sistema formal como formalización de una teoría informal con el símbolo $\neg$ expresando la negación. Las proposiciones expresadas por dos fórmulas de teoría de números A y $\neg$ A, si A no contiene variables libres (o las proposiciones expresadas para cada conjunto particular de valores de las variables, si A contiene variables libres), constituyen una contradicción tomadas conjuntamente. Similarmente, en el caso de fórmulas de letras proposicionales, al interpretar las letras proposicionales mediante proposiciones particulares cualesquiera. Por tanto, una demostración metamatemática de la consistencia del sistema formal proporcionará seguridad contra una contradicción que surja en la teoría informal.

Para el cálculo proposicional (y, en general, para cualquier sistema formal que tenga la &-eliminación y la $\neg$-eliminación débil como reglas postuladas o derivadas), la definición anterior es equivalente a lo siguiente. El sistema es (*simplemente*) *consistente*, si hay alguna fórmula indemostrable; (*simplemente*) *inconsistente*, si toda fórmula es demostrable. Porque si tanto $\vdash$A como $\vdash \neg$ A, entonces utilizando la $\neg$-eliminación débil (§ 23), $\vdash$B, para toda fórmula B. En caso de consistencia, A & $\neg$ A es un ejemplo de una fórmula indemostrable, porque de otro modo, utilizando la &-eliminación, tendríamos tanto $\vdash$ A como $\vdash \neg$ A.

La definición de consistencia (en la primera forma) y la definición de fórmula demostrable (digamos en la primera forma, § 19) sugiere un plan de ataque para el problema de demostrar la consistencia (no el único plan posible). Supóngase que podemos hallar una propiedad metamatemática de fórmulas tal que (a) los axiomas tienen esa propiedad, (b) si las premisas para una aplicación de una regla de inferencia tienen tal propiedad, también la tiene la conclusión, y (c) dos fórmulas de la forma A y $\neg$ A no pueden ambas tener esa propiedad. Entonces utilizando (a) y (b) toda fórmula demostrable tendría esa propiedad, y, por (c), el sistema sería consistente. En la presente sección daremos una demostración metamatemática de consistencia para el cálculo proposicional siguiendo este plan.

La propiedad de fórmulas que utilizaremos está sugerida por la interpretación lógica del cálculo proposicional. Concebimos a cada letra proposicional como una variable cuyos valores son proposiciones, y consideramos que cada una de estas

proposiciones o es verdadera o es falsa. Los operadores del cálculo $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ forman, partiendo de esas proposiciones, otras proposiciones cuya verdad o falsedad dependerá sólo de la verdad o falsedad de las proposiciones componentes de acuerdo con las tablas que se darán a continuación. (De aquí que los operadores del cálculo sean a veces llamados 'funciones de valores-de-verdad de las proposiciones'). Entonces resultará manifiesto que las fórmulas de letras proposicionales demostrables tienen todas la propiedad de que son idénticamente verdaderas, en el sentido de que representan proposiciones verdaderas para todas las permutaciones posibles de proposiciones verdaderas y falsas como valores de las letras proposicionales contenidas en ellas.

Al utilizar esta idea con vistas a obtener una demostración metamatemática de consistencia para el cálculo, es necesario evitar toda referencia a 'proposiciones', 'verdad' y 'falsedad', que encierran connotaciones extrañas a la metamatemática. Lo cual puede hacerse puesto que nada esencial en el argumento bosquejado más arriba depende de los valores que puedan tener las letras proposicionales al ser proposiciones, o de la naturaleza de la verdad y la falsedad, excepto que las proposiciones verdaderas y falsas sean distintas entre sí.

El carácter puramente matemático de lo que pretendemos hacer puede ser puesto de relieve por una analogía con la aritmética escolar elemental de enteros positivos. Mientras se estipulase que los números 1, 2, 3, ... en esa aritmética tuviesen un significado para contar y medir, tal y como se los trataba en las tablas de adición y multiplicación, podrían ser cualquier enumeración de objetos distintos. Según este punto de vista, la aritmética trata de operaciones, esto es funciones, $+$ y $\cdot$, sobre un dominio de objetos $\{1, 2, 3, ...\}$ y depende sólo de la posibilidad de reconocer y distinguir entre tales objetos, pero no de su naturaleza intrínseca.

Construiremos ahora una aritmética en sentido similar para un dominio de sólo dos objetos, con cuatro funciones $\supset$, &, $\vee$, $\neg$. Ello describe sucintamente la tarea que nos proponemos. Comoquiera que para la metamatemática $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ son objetos dados carentes de significado, una más precisa enunciación de lo que vamos a realizar es la siguiente. Introducimos un procedimiento metamatemático de computación (llamado un *procedimiento de evaluación*), por el cual una función en nuestra aritmética (o una tabla para una tal función, llamada *tabla de verdad*) es correlacionada con cada uno de los símbolos $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, y por tanto, con cada fórmula de letras proposicionales. Después estudiamos las propiedades metamatemáticas de las fórmulas de letras proposicionales definidas en términos de las correlativas funciones (o tablas).

Puesto que para la aritmética abstracta sólo se requiere que los dos objetos (*valores de verdad*) sean distintos, es irrelevante cómo se denomine a éstos. Podemos designarlos como "0" y "1", o "+" y "−", o "↑" y "↓", o "t" y "f", etc. Elegimos el último par de símbolos, que sugieren respectivamente las nociones de la interpretación lógica 'verdadero' y 'falso'.

Comenzamos considerando las letras proposicionales como variables con rango sobre el dominio {t, f}.

Consideramos entonces los operadores del cálculo como funciones sobre este dominio, definidas por las siguientes tablas, análogas a las de adición y multiplicación en la aritmética de enteros positivos. Partiendo de la tabla, para cual(es)quiera valor(es) dado(s) de la(s) variable(s) independiente(s), puede leerse el correspondiente valor de la función.

$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$

| $\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$ | t | f |
|---|---|---|
| t | t | f |
| f | t | t |

$\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$

| $\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$ | t | f |
|---|---|---|
| t | t | f |
| f | f | f |

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

| $\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$ | t | f |
|---|---|---|
| t | t | t |
| f | t | f |

$\neg \mathcal{A}$

| $\mathcal{A}$ | |
|---|---|
| t | f |
| f | t |

(Las tablas para $\neg$ y $\vee$ son las mismas que las dadas en § 10 Ejemplo 4 para $'$ y $\circ$, cuando los dos objetos son representados por "0" y "1").

Entonces, cada fórmula de letras proposicionales A, en una lista dada $P_1, \ldots, P_m$ de letras proposicionales distintas, representa una función de esas letras consideradas como variables independientes sobre el dominio {t, f}. Para cada $m$-tuplo de valores de las letras, puede ser computado el correspondiente valor de la función mediante una serie de aplicaciones de las tablas fundamentales.

EJEMPLO 1. La fórmula literal $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, esto es, $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{B} \supset \mathcal{A})$ (§ 26), representa la función cuya tabla es la siguiente.

$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$

| $\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$ | t | f |
|---|---|---|
| t | t | f |
| f | f | t |

La computación del valor introducido en el cuadrado superior derecho es como sigue.

$$(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{B} \supset \mathcal{A})$$
$$(\mathrm{t} \supset \mathrm{f}) \,\&\, (\mathrm{f} \supset \mathrm{t})$$
$$\mathrm{f} \quad \& \quad \mathrm{t}$$
$$\mathrm{f}$$

La disposición de las tablas en forma de cuadrado es especial para el caso de dos variables (lo que sirve de ayuda para sugerir propiedades de las funciones). Para $m$ variables $P_1, \ldots, P_m$, en general, podemos disponer los $2^m$ $m$-tuplos de posibles argumentos verticalmente uno debajo de otro en algún orden fijado, y escribir los correspondientes valores de la función en una *columna de valores* en oposición a aquéllos.

EJEMPLO 2.

| $\mathcal{A}$ | $\mathcal{B}$ | $C$ | $\neg[\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \,\&\, C) \vee \neg\mathcal{A}]$ |
|---|---|---|---|
| t | t | t | f |
| t | t | f | t |
| t | f | t | t |
| t | f | f | t |
| f | t | t | f |
| f | t | f | f |
| f | f | t | f |
| f | f | f | f |

De una fórmula de letras proposicionales E en las distintas letras proposicionales $P_1, ..., P_m$, se dice que es *idénticamente verdadera* si la columna de valores de su tabla contiene sólo t; *idénticamente falsa* si sólo f. De dos fórmulas de letras proposicionales E y F en $P_1, ..., P_m$, se dice que son *idénticamente iguales* si sus tablas tienen la misma columna de valores. (En otras palabras, una E idénticamente verdadera representa la función constante t, una E idénticamente falsa, la función constante f, y E y F idénticamente iguales, la misma función).

Estas definiciones así establecidas se aplican a E (a E y a F) consideradas como fórmula(s) de letras proposicionales en una lista especificada $P_1, ..., P_m$ de letras proposicionales distintas, sin que (conforme a § 25) tengan que ocurrir todas ellas en la(s) fórmula(s). Podemos suponer primeramente que $P_1, ..., P_m$ es la mínima lista elegible, es decir, la lista que comprende exactamente, aquellas distintas letras proposicionales que ocurren en E (en E o en F). Entonces, si añadimos otras letras a la lista, cada fila en la(s) tabla(s) de la(s) fórmula(s) se escindirá, simplemente, en un número de filas ($2^k$ si se añaden $k$ letras) que muestran las posibles asignaciones de valores para esas letras adicionales, sin alterar el proceso de computación o entrada de valores. De aquí que, si tenemos idéntica verdad o idéntica falsedad (idéntica igualdad) con respecto a la lista mínima, la tendremos también con respecto a cualquier otra lista, y recíprocamente. Por tanto, la referencia a la lista puede ser omitida.

TEOREMA 9. *Una condición necesaria de que una fórmula de letras proposicionales* E *sea demostrable (o deducible de fórmulas idénticamente verdaderas* $\Gamma$*) en el cálculo proposicional, es que sea idénticamente verdadera; es decir, si* $\vdash$ E, *entonces* E *es idénticamente verdadera.*

La demostración es por inducción de curso-de-valores sobre la longitud de la demostración dada de E, utilizando los dos lemas siguientes.

LEMA 12a. *Una fórmula de letras proposicionales que sea un axioma es idénticamente verdadera.*

DEMOSTRACION. Para cada uno de los diez esquemas de axioma del cálculo proposicional (Postulados 1a, 1b, 3–8 § 19, o intuicionistamente $8^I$ § 23, en lugar de 8), podemos verificar fácilmente el siguiente hecho por computación: La tabla que se obtiene asignando, directamente y de todos los modos posibles, los valores t y f a las partes A, B, C, que aparecen en el esquema, contiene sólo t en la columna de valores. Esto conduce a la verificación del lema tratando las A, B, C de los esquemas, como simples letras proposicionales $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

La verdad del lema se sigue de aquí. Pues considérese cualquier axioma que sea una fórmula de letras proposicionales. Esa fórmula proviene de uno de los esquemas tomando en lugar de A, B, C, ciertas fórmulas de letras proposicionales en, digamos, $P_1, ..., P_m$ como lista adjunta de distintas letras proposicionales. Entonces, independientemente de qué $m$-tuplo de t y f se asignen como valores a $P_1, ..., P_m$, el triplo de valores para A, B, C al que conduzca, ha de conducir a su vez (según se ha verificado ya) al valor t para el axioma en su totalidad.

LEMA 12b. *Si las premisas para una aplicación de la regla de inferencia son fórmulas de letras proposicionales idénticamente verdaderas, también lo es la conclusión.*

DEMOSTRACION. Por inspección de la siguiente tabla, vemos que el único par de valores de A, B que da el valor t a las dos premisas A y A ⊃ B correspondientes a la regla de inferencia del cálculo (Postulado 2), es el par t, t; y este par da el valor t a la conclusión B.

| A | B | A | A ⊃ B | B |
|---|---|---|---|---|
| t | t | t | t | t |
| t | f | t | f | f |
| f | t | f | t | t |
| f | f | f | t | f |

De donde, si A y B son fórmulas de letras proposicionales en $P_1, ..., P_m$. cualquier $m$-tuplo de valores de $P_1, ..., P_m$ que dé el valor t a ambas premisas, ha de dar también este valor a la conclusión. Por hipótesis, las premisas tienen el valor t para todo $m$-tuplo de valores de $P_1, ..., P_m$. Por tanto la conclusión ha de tenerlo también.

EJEMPLO 3. La fórmula $\neg[\mathcal{A} \vee B \supset (B \,\&\, C) \vee \neg \mathcal{A}]$ no es demostrable en el cálculo proposicional, porque hay f en la columna de valores de su tabla (Ejemplo 2). Del mismo modo, $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \,\&\, B)$ no es demostrable, porque la fórmula toma el valor f cuando $\mathcal{A}, B$ toman los valores f, f.

COROLARIO 1. *Una condición necesaria para que dos fórmulas de letras proposicionales* E *y* F *sean equivalentes es que* E *y* F *sean idénticamente iguales; es decir, si* $\vdash$ E ~ F, *entonces* E *y* F *son idénticamente iguales.*

DEMOSTRACION. Si E y F son equivalentes entonces, por la definición de equivalencia, E ~ F es demostrable. De donde, por el teorema, E ~ F es idénticamente verdadera. Con respecto a la tabla para ~ (Ejemplo 1), vemos que E ~ F puede recibir el valor t solamente cuando E y F reciben ambas el valor t o ambas el valor f, esto es, cuando las dos reciben el mismo valor. Puesto que E ~ F es idénticamente verdadera, es decir, siempre recibe el valor t, E y F reciben siempre el mismo valor, o sea, son idénticamente iguales.

EJEMPLO 4. $\mathcal{A} \,\&\, B \,\&\, \neg B$ y $\mathcal{A}$ no son equivalentes, porque toman valores diferentes (a saber, f y t, respectivamente) cuando p. ej. se les da a $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ los valores t, t.

COROLARIO 2. *El cálculo proposicional es (simplemente) consistente; es decir, para ninguna fórmula* A *puede suceder que* $\vdash$ A *y* $\vdash \neg$ A.

DEMOSTRACION. Utilizando la segunda versión de la definición de consistencia simple (más arriba dada), ello resulta demostrado por el Ejemplo 3.

Para dar la demostración partiendo directamente de la definición original, supóngase que una de las dos fórmulas, A y ¬ A, es demostrable. Entonces, por el teorema, es idénticamente verdadera; y entonces, utilizando la tabla para ¬, la otra es idénticamente falsa, por tanto, no idénticamente verdadera, y, por tanto, por el teorema, indemostrable.

Ello establece la consistencia del cálculo proposicional en términos de fórmulas de letras proposicionales. Si A* y ¬ A* son fórmulas demostrables en el cálculo para otra noción de fórmula, entonces, por la conversa de la regla de sustitución (Teorema 4 § 25), habría fórmulas de letras proposicionales demostrables A y ¬ A. De este modo se extiende la consistencia a los otros sentidos de fórmula.

Esta demostración de consistencia no es válida, empero, para la adición de cualquier otro grupo de postulados, aun cuando ese grupo fuese también consistente.

La demostración de la consistencia para el cálculo proposicional fue dada primeramente por Post 1921. (Cfr. también Łukasiewicz 1925, Hilbert-Ackermann 1928).

La aritmética de un dominio de dos objetos, utilizada en esta sección para dar la demostración de consistencia, puede ser concebida como *una* interpretación del cálculo en el siguiente sentido. Las tablas de evaluación proporcionan significados aritméticos para los operadores del cálculo. Las letras proposicionales son consideradas como variables independientes con rango sobre el dominio {t, f} de la aritmética. Cada fórmula de letras proposicionales es interpretada como expresando la proposición de que su valor es t para todas las elecciones de valores de sus variables independientes. Por el Teorema 9, sólo las fórmulas que son verdaderas bajo esta interpretación, son demostrables. Porque la proposición expresada por una fórmula bajo esta interpretación es equivalente a la posesión, por parte de la fórmula, de la propiedad metamatemática de verdad idéntica, tal como se definió anteriormente en términos de un procedimiento de computación utilizando t y f.

Por otra parte, en *la interpretación lógica (usual)*, las letras proposicionales son consideradas como variables independientes con rango sobre algún dominio de proposiciones. Una fórmula de letras proposicionales expresa entonces la proposición general que dice que todas las proposiciones particulares, expresadas por ella, para diferentes elecciones de proposiciones de ese dominio como valores de sus variables independientes, son verdaderas. La interpretación lógica dice relación a la interpretación aritmética, poniendo las proposiciones particulares (del dominio en cuestión) en correspondencia de muchos-a-uno con los dos objetos t, f, siendo verdaderas aquellas proposiciones que corresponden a t, y falsas aquellas que corresponden a f. La proposición expresada por una fórmula bajo esta interpretación, no es equivalente a una propiedad, definible metamatemáticamente, de la fórmula, excepto para dominios especialmente restringidos de las proposiciones suministradas como valores de las letras proposicionales.

§ 29. **Completud, forma normal.** Otro problema susceptible de ser tratado en metamatemática es el de la 'completud' de un sistema formal dado. Por ejemplo, hemos confeccionado una lista de once postulados para el cálculo proposicional (§ 19). ¿Podemos dar alguna razón de por qué nos hemos detenido justamente ahí? ¿Podríamos intentar, con garantía de éxito, el descubrimiento de otros postulados que, añadidos a la lista, proporcionasen más fórmulas demostrables? Para poder responder a estas cuestiones hemos de suministrar primero algún criterio acerca de qué sea lo que deseamos poder demostrar en el sistema. De acuerdo con el criterio elegido, resultarán diferentes nociones de completud.

Podemos dar al criterio una forma positiva y decir que el sistema es completo si su lista de postulados suministra de antemano todo cuanto necesitemos para

un determinado propósito. Por ejemplo, supóngase que ha sido definida para las fórmulas del sistema una cierta propiedad; o, alternativamente, que ha sido dada una interpretación para las fórmulas del sistema, en cuyo caso la propiedad consiste en que las fórmulas expresen proposiciones verdaderas bajo la interpretación. Relativamente a una tal propiedad o interpretación, pueden darse definiciones de consistencia y de completud de la manera siguiente.

El sistema es *consistente* con respecto a la propiedad (o interpretación), si sólo fórmulas que tengan la propiedad (o expresen proposiciones verdaderas bajo la interpretación) son demostrables. El sistema es *completo* con respecto a la propiedad (o interpretación), si todas las fórmulas que tengan la propiedad (o expresen proposiciones verdaderas bajo la interpretación) son demostrables.

A diferencia de la noción de consistencia simple, aducida en la precedente sección, estas nociones de consistencia y completud relativas a una propiedad o interpretación pueden no pertenecer siempre a la metamatemática. Si pertenecen o no, tendremos que considerarlo caso por caso, según que la propiedad (o interpretación) pueda o no ser formulada dentro de la metamatemática.

Para el cálculo proposicional tenemos la propiedad de idéntica verdad (o si lo preferimos, la interpretación del cálculo como una aritmética de un dominio de dos objetos), que puede ser formulada en metamatemática. El Teorema 9 es así un teorema metamatemático de consistencia para cierta propiedad de las fórmulas literales (o interpretación del cálculo).

Recapitulando la idea de completud relativa a una interpretación: un sistema es completo bajo una interpretación dada, si los postulados deductivos (o reglas de transformación) nos permiten demostrar en el sistema todas las propiedades verdaderas que sus reglas de formación nos permitan expresar en dicho sistema.

Otras formulaciones de completud resultan si damos una forma negativa al criterio relativo a qué fórmulas serían demostrables, y decimos que el sistema es completo si los postulados suministran todo cuanto podamos hacer para que no surja un determinado e indeseable efecto. Al punto acude a la mente, como un tal efecto, la idea de simple inconsistencia. Las nociones de completud obtenidas por esta vía serán siempre metamatemáticas, si el efecto a evitar es metamatemáticamente describible (como es, en particular, la simple inconsistencia). Se darán formulaciones exactas para sistemas formales particulares a medida que lleguemos a ellos.

Obsérvese que un teorema de consistencia será siempre un teorema destinado a establecer que, a lo sumo, tales y tales fórmulas son demostrables; y un teorema de completud será un teorema destinado a establecer que, al menos, tales y tales fórmulas son demostrables.

De esta introducción general al problema de la completud, pasamos a considerar ahora dicho problema en lo que hace al cálculo proposicional. Mostraremos primero (Teorema 10) que el cálculo es completo con respecto a la propiedad de verdad idéntica.

TEOREMA 10° Y COROLARIO 1°. *Las condiciones del Teorema* 9 *y el Corolario* 1 *son suficientes* (como también necesarias); *esto es, si* E *es idénticamente verdadera, entonces* $\vdash$ E, *y si* E *y* F *son idénticamente iguales, entonces* $\vdash$ E $\sim$ F.

La demostración se basará en dos lemas. Sean $P_1, \ldots, P_m$ distintas letras proposicionales. Dado un $m$-tuplo de $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{f}$ como valores de $P_1, \ldots, P_m$, entenderemos

por el *m-tuplo literal correspondiente* la secuencia $Q_1, ..., Q_m$ de letras y letras negadas donde, para cada $j$ ($j = 1, ..., m$), $Q_j$ sea $P_j$ o $\neg P_j$ según que el valor dado a $P_j$ sea t o f.

EJEMPLO 1. Supóngase que $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ toman valores t, f, t, respectivamente. El $m$-tuplo literal correspondiente es $\mathcal{A}, \neg \mathcal{B}, \mathcal{C}$.

LEMA 13. *Sea* E *una fórmula de letras proposicionales en las distintas letras proposicionales* $P_1, ..., P_m$; *sea dado un m-tuplo de* t *y* f *como valores de* $P_1, ..., P_m$; *y sea* $Q_1, ..., Q_m$ *el m-tuplo literal correspondiente. Entonces* $Q_1, ..., Q_m \vdash E$ *o* $Q_1, ..., Q_m \vdash \neg E$, *según que, para el m-tuplo dado de valores,* E *tome el valor* t *o el valor* f.

EJEMPLO 2. En correspondencia con la tabla del Ejemplo 2 § 28 para $\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}]$, tenemos ahora ocho deducciones:

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \vdash \neg\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$
$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \neg \mathcal{C} \vdash \neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$
$$\mathcal{A}, \quad \neg \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \vdash \neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$
$$\mathcal{A}, \quad \neg \mathcal{B}, \quad \neg \mathcal{C} \vdash \neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$
$$\neg \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \vdash \neg\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$
$$\neg \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \neg \mathcal{C} \vdash \neg\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$
$$\neg \mathcal{A}, \quad \neg \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \vdash \neg\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$
$$\neg \mathcal{A}, \quad \neg \mathcal{B}, \quad \neg \mathcal{C} \vdash \neg\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}].$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 13, por inducción de curso de valores sobre el número de (ocurrencias de) símbolos lógicos en E; a ese número lo denominaremos el *grado.*

BASE: Es de grado 0. Entonces E es $P_j$ para algún $j$. En el $m$-tuplo dado de valores, el valor de $P_j$ es t o es f. CASO 1: el valor de $P_j$ es t. Entonces $Q_j$ es $P_j$, esto es, $Q_j$ es E; y así, por las propiedades generales de $\vdash$, $Q_1, ..., Q_m \vdash E$, como había de mostrarse, puesto que en este caso E toma el valor t. CASO 2: el valor de $P_j$ es f. Entonces, y similarmente, $Q_j$ es $\neg$ E, y así $Q_1, ..., Q_m \vdash \neg E$, como había de mostrarse.

PASO DE INDUCCION: E es de grado $d + 1$. Entonces, para algunas fórmulas de letras proposicionales A y B en $P_1, ..., P_m$ de grado $\leq d$, E es A $\supset$ B o A & B o A $\vee$ B o $\neg$ A. CASO 1: E es A $\supset$ B. Cuatro subcasos resultan, según que, para el $m$-tuplo dado de valores de $P_1, ..., P_m$, las fórmulas A, B tomen los valores respectivos t, t o t, f o f, t o f, f. SUBCASO 2: A, B toman los valores t, f. Entonces (por la entrada superior derecha de la tabla para $\supset$) E toma el valor f, y así hemos de mostrar que $Q_1, ..., Q_m \vdash \neg E$. Pero por la hipótesis de la inducción, $Q_1, ..., Q_m \vdash A$ y $Q_1, ..., Q_m \vdash \neg B$. Por añadidura, utilizando *41 o *44, A, $\neg$ B $\vdash \neg$ (A $\supset$ B); esto es, A, $\neg$ B $\vdash \neg$ E. De aquí que $Q_1, ..., Q_m \vdash \neg E$, como había que mostrar. El tratamiento de los otros casos y subcasos es similar, utilizando *41–*48, *49a.

LEMA 14. *Sea* E *una fórmula de letras proposicionales en las distintas letras proposicionales* $P_1, ..., P_m$. *Si para cada uno de los* $2^m$ *m-tuplos de* t *y* f, $Q_1, ..., Q_m \vdash E$, *donde* $Q_1, ..., Q_m$ *es el m-tuplo literal correspondiente, entonces* $P_1 \vee \neg P_1, ..., P_m \vee \neg P_m \vdash E$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 14. Por $2^{m-1} + 2^{m-2} + ... + 1$ aplicaciones de **V**-eliminación. Por ejemplo, cuando $m = 2$, por hipótesis:

(a)
$$\begin{cases} P_1, \quad P_2 \vdash E. \\ P_1, \neg P_2 \vdash E. \\ \neg P_1, \quad P_2 \vdash E. \\ \neg P_1, \neg P_2 \vdash E. \end{cases}$$

Por dos aplicaciones de **V**-eliminación:

(b)
$$\begin{cases} P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash E. \\ \neg P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash E. \end{cases}$$

Por una aplicación adicional,

(c) $$P_1 \vee \neg P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash E,$$

como había que mostrar.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 10. Digamos que E es una fórmula de letras proposicionales en $P_1, ..., P_m$. Por hipótesis E es idénticamente verdadera, esto es, toma el valor t para cada *m*-tuplo de t y f como valores de $P_1, ..., P_m$. Entonces, por el Lema 13, se satisface la hipótesis del Lema 14; así, por el Lema 14, $P_1 \vee \neg P_1, ..., P_m \vee \neg P_m \vdash E$. De donde, utilizando *51, $\vdash E$.

OBSERVACION 1. Todos los pasos de esta demostración, salvo el último, son asimismo aceptables para el sistema intuicionista. De donde se sigue que, en dicho sistema, para cualquier fórmula literal E en $P_1, ..., P_m$:

(a) $P_1 \vee \neg P_1, ..., P_m \vee \neg P_m \vdash E$, si E es idénticamente verdadera.

(b) $P_1 \vee \neg P_1, ..., P_m \vee \neg P_m \vdash E \vee \neg E$.

El teorema expresa la completud de las reglas deductivas del cálculo proposicional, al efecto de establecer fórmulas literales que son idénticamente verdaderas bajo la interpretación aritmética; y el Corolario 1 dice que la teoría deductiva da cuenta completa de la igualdad de funciones definibles en la aritmética.

COROLARIO 2°. *La adición a la lista de postulados para al cálculo proposicional de una fórmula literal indemostrable, para ser usada como un esquema axiomático, destruiría la consistencia simple.*

DEMOSTRACION. Por el Teorema 10, esta fórmula literal ha de recibir el valor f para algún conjunto de valores de las letras proposicionales que contenga. Selec-

ciónese un tal conjunto de valores y utilícese el nuevo esquema axiomático, sustituyendo las letras que tengan el valor t por $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$, y las que tengan el valor f por $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$. El nuevo axioma resultante sería idénticamente falso. De donde, por el Corolario 1, sería equivalente a $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$, que es también idénticamente falsa. Así (utilizando *18a) $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$ sería también demostrable, y el sistema, por tanto, inconsistente (§ 28).

El Corolario 2 dice que el cálculo proposicional no es susceptible de ser aumentado por postulados del mismo carácter que los ya registrados en la lista, sin destruir la consistencia simple. Esta es una propiedad de completud del segundo tipo descrito en las observaciones introductorias.

Dado un $m$-tuplo de t y f como valores de $P_1, \ldots, P_m$, y conviniendo en que sea $Q_1, \ldots, Q_m$ el $m$-tuplo literal correspondiente, llamamos a $Q_1 \& \ldots \& Q_m$ ($Q_1^\dagger \vee \ldots \vee Q_m^\dagger$, § 27) la *conjunción* (*disyunción*) *elemental correspondiente.*

EJEMPLO 1 (conclusión). La conjunción (disyunción) elemental correspondiente es $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{B} \& C$ ($\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \neg C$).

TEOREMA 11°. *Una fórmula de letras proposicionales* E *en las distintas letras proposicionales* $P_1, \ldots, P_m$ *es equivalente a una fórmula* F (llamada una *forma normal disyuntiva principal de* E) *que tiene una de las dos formas siguientes. Si* E *toma el valor* t *para algunos m-tuplos de* t *y* f *como valores de* $P_1, \ldots, P_m$, *entonces* F *es la disyunción* (*en algún orden*) *de las conjunciones elementales correspondientes. Si* E *es idénticamente falsa, entonces* F *es* $P_1 \& \neg P_1$. (*Por virtud de la dualidad,* E *tiene una forma normal conjuntiva principal* G, *donde los papeles de* $\vee$ *y* &, *y de* t *y* f *están intercambiados*; $\vdash$ E $\sim$ G).

EJEMPLO 2 (continuación)°. $\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& C) \vee \neg \mathcal{A}]$ tiene como f. n. d. p. $(\mathcal{A} \& \mathcal{B} \& \neg C) \vee (\mathcal{A} \& \neg \mathcal{B} \& C) \vee (\mathcal{A} \& \neg \mathcal{B} \& \neg C)$, y como f. n. c. p. $\neg \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{B} \vee \neg C \& \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{B} \vee \neg C \& \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{B} \vee C \& \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee \neg C \& \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vee C$.

DEMOSTRACION. Por el Teorema 10 Corolario 1, ya que (como se ve fácilmente por la forma especificada de una f. n. d. p., y por las tablas de evaluación para $\neg$, &, $\vee$) E y F son idénticamente iguales.

El cálculo proposicional, además de ser deductivamente completo en dos sentidos (Teorema 10 Corolario 2), es asimismo notacionalmente completo en el sentido de que cada una de las $2^{2^m}$ funciones de valor de verdad posibles de $m$ variables $P_1, \ldots, P_m$, puede ser representada por una fórmula literal de tales letras. Porque, dada la tabla para la función, podemos construir una f. n. d. p. (únicamente determinada inclusive en el orden de sus miembros disyuntivos) para representarla.

Estos tres resultados de completud aparecieron primero en Post 1921; el presente método de demostración del Teorema 10 es debido a Kalmár 1934-5. (El autor lo usó también como una aplicación de la $\vee$-eliminación en otro contexto, en un primer diseño de 1934).

Hilbert y Ackermann 1928 dieron una versión de la demostración de Post, que consiste en establecer primero el teorema de forma normal mediante técnicas de reducción que se remontan en parte a cultivadores de lógica simbólica en el siglo XIX. Dicho brevemente, una fórmula literal E puede ser reducida a una f. n. d. p.

(o f. n. c. p.), utilizando el método de cadena § 26, como sigue. Primero, se usa *58 o *59 para remover las ocurrencias de $\supset$. Segundo, las ocurrencias de $\neg$ son transferidas al interior por repetidas aplicaciones del Teorema 8. Tercero, la expresión resultante es "distribuida" utilizando la ley distributiva *35 (junto con *33) como en álgebra ordinaria, con $\vee$, & en el papel de +, · (o viceversa, usando *36 con *34, para f. n. c. p.). Cuarto, se efectúan simplificaciones, basadas (además de en *31–*34) en las leyes de idempotencia *37, *38 y en *52–*55, de suerte que los miembros disyuntivos (para f. n. c. p., miembros conjuntivos) resultantes o "términos" contengan cada uno a lo sumo una ocurrencia de cada letra, salvo cuando se obtiene la f. n. d. p. $P_1 \,\&\, \neg P_1$ (la f. n. c. p. $P_1 \vee \neg P_1$). Quinto, en el caso no-excepcional, se introducen en los términos las letras que falten, usando *52 y *35 (*53 y *36). Sexto, usando *31–*34, *37, *38, se ordenan normalmente las letras y las letras negadas dentro de los términos, de suerte que éstos resulten ser conjunciones elementales (disyunciones elementales), y las duplicaciones de términos se suprimen.

EJEMPLO 2 (conclusión)°. Aun cuando nuestra demostración del Teorema 11 establece que $\neg\,[\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C}) \vee \neg\mathcal{A}]$ es equivalente a $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \,\&\, \neg\,\mathcal{C}) \vee (\mathcal{A} \,\&\, \neg\,\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C}) \vee (\mathcal{A} \,\&\, \neg\,\mathcal{B} \,\&\, \neg\,\mathcal{C})$, el lector puede encontrar interesante la reducción de la una a la otra, por el procedimiento que se acaba de describir. La cuarta operación conduce a $(\mathcal{A} \,\&\, \neg\,\mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \,\&\, \neg\,\mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \,\&\, \neg\,\mathcal{C} \,\&\, \mathcal{A})$. – De ello, por *40, obtenemos como una "forma normal disyuntiva" (no "principal") $(\mathcal{A} \,\&\, \neg\,\mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \,\&\, \neg\,\mathcal{C})$, y de aquí, utilizando *35, la aún más breve equivalente (no una f. n. d.) $\mathcal{A} \,\&\, (\neg\,\mathcal{B} \vee \neg\,\mathcal{C})$.

§ 30. **Procedimiento de decisión, interpretación.** Conocemos en matemática ejemplos de cuestiones generales, tales que cualquier instancia particular de la cuestión puede ser respondida por un método uniforme preasignado. Más precisamente, en un ejemplo tal, hay una clase infinita de cuestiones particulares y un procedimiento en relación a esa clase, estando ambos previamente descritos, y siendo tales que si seleccionamos tras ello cualquier cuestión particular de la clase, el procedimiento se aplicará con seguridad y nos conducirá a una respuesta definida, o "sí" o "no", respecto de la cuestión particular seleccionada.

EJEMPLO 1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con coeficientes enteros dados. ¿Es $f(x)$ un factor de $g(x)$? Podemos dividir $g(x)$ por $f(x)$. Esta división es practicable paso a paso por un método preasignado. Concluirá en un número finito de pasos (cuántos sean, dependerá de cómo contemos los pasos, pero ello puede precisarse de forma que el número dependa del grado de la ecuación y de la magnitud de los coeficientes). Entonces tendremos el resto ante nosotros. Podemos observar que este resto o es 0 o es diferente de 0. Si es 0, la respuesta a la cuestión es "sí". Si es diferente de 0, la respuesta es "no".

EJEMPLO 2. ¿Tiene la ecuación $ax + by = c$, donde $a$, $b$, $c$ son enteros dados, una solución en enteros para $x$ e $y$? Existe un método muy conocido para responder a esta cuestión, utilizando el algoritmo de Euclides.

A un método de este tipo, que es suficiente para responder o por "sí" o por "no" a cualquier instancia particular de una cuestión general, lo llamamos *proce-*

*dimiento de decisión* o *método de decisión* o *algoritmo* para la cuestión. Al problema de hallar un método tal, lo llamaremos el *problema de decisión* para la cuestión. El problema aparece en lógica moderna con Schröder 1895, Löwenheim 1915 y Hilbert 1918. La presente exposición es sólo introductoria; más adelante intentaremos una definición más precisa de lo que constituye un método de decisión (§§60, 61). Por el momento bastará con que seamos capaces de reconocer ejemplos particulares de procedimientos de decisión.

De la misma manera podemos tener un *procedimiento de calculación* o *algoritmo* (y por ende un *problema de calculación*) con relación a una cuestión general que requiera como respuesta no "sí" o "no", sino la exhibición de algún objeto.

Ahora bien, con referencia a un sistema formal dado, como el que hemos venido estudiando, hay algunas cuestiones generales, tales como '¿Es una expresión formal dada una fórmula?' y '¿Es una secuencia finita dada de expresiones formales una demostración?', para las cuales queda directamente suministrado un método de decisión por las definiciones que establecen el sistema. De hecho, éste ha de ser el caso si la formalización por medio del sistema ha de cumplir su propósito. De una diferente naturaleza es la cuestión '¿Es una fórmula dada demostrable?' Para ver esta diferencia, comparemos las definiciones de las tres nociones: 'fórmula', 'demostración', 'fórmula demostrable'. Con respecto a cada una de estas tres definiciones hemos de reconocer, al aplicarla a un objeto particular dado, que el objeto dado pertenece a la clase definida (si es que pertenece) mediante la consideración de una secuencia de objetos, a saber, respectivamente: las fórmulas obtenidas al efectuar la construcción de la fórmula dada, los segmentos de la demostración, las fórmulas en una demostración de la fórmula demostrable dada. En los casos de fórmula y demostración, esta secuencia de objetos está contenida dentro del objeto dado, del que puede ser recuperada para nuestra consideración. Pero en el caso de fórmula demostrable, esta secuencia de objetos no está contenida dentro del objeto dado. Por esto, para la última cuestión, si existe un método de decisión ha de consistir en algo distinto de una aplicación directa o casi directa de la definición, y el problema de decisión para esta cuestión no es trivial. Con frecuencia se le llama *el problema de decisión* para el sistema formal. Este problema se resuelve para el cálculo proposicional puro por medio de los Teoremas 9 y 10 (§§ 28, 29):

TEOREMA 12°. *Un procedimiento de decisión (o algoritmo) para determinar si una fórmula de letras proposicionales* E *es o no demostrable en el cálculo proposicional, es suministrado por el procedimiento de calcular la tabla para la función* t *y* f *representada por* E. *Según que aparezcan solamente* t *o no en la columna de valores,* E *es o no demostrable.*

Por añadidura, el procedimiento de decisión se extiende a los otros sentidos de fórmula, por cuanto podemos pasar primero a una fórmula literal correspondiente reemplazando simultáneamente los distintos componentes primos por respectivas y distintas letras proposicionales (Teoremas 3 y 4 §25). Un procedimiento de decisión para equivalencia está incluido en el de demostrabilidad por la definición de equivalencia (§ 26), o puede basarse similarmente en los Corolarios 1. El problema de decisión para la deducibilidad se reduce al de la demostrabilidad, de conformidad con las reglas derivadas de $\supset$ y & (Teorema 2 § 23), que, en el cálculo proposicional, $D_1, \ldots, D_l \vdash E$ si, y sólo si, $\vdash D_1 \,\&\, \ldots \,\&\, D_l \supset E$. (Un segundo conjunto de procedimientos de decisión es suministrado por el proceso de reducción a f. n. d. p., final de § 29).

INTERPRETACION. Nuestro resultado metamatemático de que el cálculo proposicional admite una interpretación aritmética, con dos objetos $\mathfrak{t}, \mathfrak{f}$ en la aritmética, ilumina la interpretación lógica usual (cfr. final de § 28). Vemos que nuestro cálculo proposicional es un instrumento lógico adecuado (1) cuando las proposiciones particulares son tales que cada una es definidamente verdadera o falsa, o (2) cuando deseamos dar por supuesto en una teoría que estemos desarrollando, que cada proposición es o verdadera o falsa. Para un intuicionista, la Situación (1) está representada en la matemática de un dominio finito de objetos, y también al razonar con proposiciones que versan sobre los objetos de un dominio infinito cuando esas proposiciones son de un tipo para el cual hay procedimientos de decisión (cfr. Observación 1 § 29). El uso del cálculo proposicional en matemática clásica puede ser considerado como un ejemplo de la Situación (2).

Las tablas de verdad definen ahora exactamente de qué modo los operadores del cálculo han de ser interpretados como funciones de valor-de-verdad de proposiciones. Por ejemplo, vemos que $\vee$ es la "o" *inclusiva*: $A \vee B$ es verdadera, si A es verdadera o B es verdadera o lo son ambas. [La "o" *exclusiva* puede expresarse así: $(A \vee B) \,\&\, \neg (A \,\&\, B)$].

La implicación $A \supset B$ significa lo mismo que $\neg A \vee B$ (*59 § 27), y es llamada *implicación material*. La validez de $A \supset B$ no requiere una conexión necesaria de ideas entre A y B. Por ejemplo, la luna está hecha de queso verde implica materialmente $2 + 2 = 5$ (porque la premisa es falsa). El "último teorema" de Fermat implica materialmente $2 + 2 = 4$ (porque la conclusión es verdadera). Ello es considerado paradójico por algunos escritores (Lewis 1912, 1917). Sin el intento de entrar de lleno en una cuestión controvertida, ofrecemos las siguientes y breves observaciones. Cuando mejor se entiende el papel de la implicación material es cuando se la considera en un contexto más amplio, tal como el suministrado por el sistema total de teoría de números. $\forall x\,(A\,(x) \supset B\,(x))$ expresa una relación entre $A\,(x)$ y $B\,(x)$ como proposiciones variables (o 'funciones proposicionales de x') llamada *implicación formal*. Cuando la implicación material es usada en combinación con una generalidad para construir una implicación formal, la propiedad que tiene aquélla de valer siempre que el primer miembro sea falso lleva consigo que un teorema $\forall x\,(A\,(x) \supset B\,(x))$ valga *vacuamente* para ciertos valores de x. Este es un artificio, vinculado a la admisión de 0 en el sistema de números y del conjunto vacío en la teoría de conjuntos, que conduce a formulaciones más simples y comprensivas de teoremas. Lo mismo es cierto de la propiedad que tiene la implicación material de valer siempre que el segundo miembro sea verdadero. Desde el punto de vista del castellano vulgar, $\supset$ queda probablemente mejor traducido como "si..., entonces..." o "sólo si". No obstante, "implicación" es un nombre expedito para $\supset$. Al utilizarlo, seguimos la práctica común en matemática de emplear la misma designación para nociones análogas que surgen en teorías técnicas relacionadas. (Un ejemplo de ello son los muchos y diferentes tipos de "adición" y "multiplicación" en matemática). El operador $\supset$ tiene el carácter de una implicación en nuestro sistema formal, como consecuencia de las dos propiedades del mismo expresadas por el teorema de deducción y la Regla 2 (es decir, las dos $\supset$-reglas del Teorema 2). Así, representa la consecuencia lógica, no en un sentido a priori, sino en el sentido definido para el sistema formal por los postulados deductivos del sistema.

OTRAS FORMAS DEL CALCULO. De conformidad con *56–*61, pudiera haberse

obtenido la completud notacional del cálculo proposicional (final de § 29) tomando $\neg$ y sólo uno de los otros tres operadores $\supset$, &, $\mathbf{V}$ como operadores primitivos para el cálculo (símbolos formales), y definiendo a partir de esos operadores elegidos los dos que resten de $\supset$, &, $\mathbf{V}$, como símbolos de abreviatura (tal como fue definido $\sim$ en § 26). Todavía cabe establecer una ulterior reducción a un único operador primitivo | (llamado 'negación alternativa', o la 'barra de Sheffer', 1913*), con la tabla:

| $\mathcal{A}$ \| $\mathcal{B}$ | $\mathcal{B}$ t | $\mathcal{B}$ f |
|---|---|---|
| $\mathcal{A}$ t | f | t |
| $\mathcal{A}$ f | t | t |

De aquí se define $\neg\mathcal{A}$ como $\mathcal{A}|\mathcal{A}$, y $\mathcal{A}\,\mathbf{V}\,\mathcal{B}$ como $(\neg\mathcal{A})|(\neg\,\mathcal{B})$.

El cálculo proposicional puede ser establecido haciendo que la regla de sustitución, a la que hemos derivado como una regla de deducción subsidiaria en el Teorema 3 § 25, sea mejor una regla directa postulada:

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}^*.}$$

En este caso, las letras proposicionales son llamadas *variables proposicionales*, y cabe emplear axiomas particulares que hagan uso de las variables formales $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ en lugar de los esquemas axiomáticos que hagan uso de las variables metamatemáticas "A", "B", "C". La regla directa de sustitución es usualmente construida de forma que sea aplicada cada vez a una sola variable (cfr. Observación 1 § 25).

EJEMPLO 3. Tenemos entonces $\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{A})$ comc Axioma 1a. Para construir a partir de aquí una demostración de $\mathrm{A} \supset (\mathrm{B} \supset \mathrm{A})$, para cualesquiera fórmulas dadas A y B, procedemos así: Si A no contiene a $\mathcal{B}$, sustitúyase primero $\mathcal{A}$ por A, luego $\mathcal{B}$ por B. Si A contiene a $\mathcal{B}$, sea P una letra proposicional distinta de $\mathcal{A}$ y que no ocurra en A, y sustitúyase sucesivamente $\mathcal{B}$ por P, $\mathcal{A}$ por A, P por B.

Este es el método más usual de establecer el cálculo proposicional; el método por nosotros elegido consistente en el uso de esquemas axiomáticos es debido a von Neumann 1927. En cualquier caso, las reglas de inferencia han de tener el carácter de esquemas, esto es, han de emplear variables metamatemáticas, puesto que ha de preverse un número infinito de aplicaciones. Para el cálculo con la regla directa de sustitución, mientras que la noción de demostrabilidad es la misma (como el lector debe probar), la relación de deducibilidad es más extensa. El teorema de deducción, y otras reglas de deducción subsidiaria que dependen de él, ha de comportar entonces una restricción en el uso de variables proposicionales en las deducciones subsidiarias, establecida con referencia a aplicaciones de la nueva regla de sustitución del mismo modo que la que hemos establecido con referencia a las Reglas 9 y 12 para variables individuales en el cálculo de predicados.

Con cualquiera de estas variantes (también hay otras) en el modo de construir el cálculo proposicional como un sistema formal, tenemos aun esencialmente el mismo cálculo. Pese a las diferencias en la selección de los operadores, la clase de

fórmulas demostrables y la interpretación como una aritmética de dos objetos, permanecen idénticas. Todos estos sistemas, y la teoría común si abstraemos de la fórmula particular, pueden ser llamados *cálculo proposicional clásico* o *bi-valente.*

OTROS CALCULOS PROPOSICIONALES. Existen otros sistemas de cálculo proposicional, que son cálculos proposicionales por cuanto analizan proposiciones teniendo en cuenta tan sólo cómo están formadas a partir de otras proposiciones consideradas como totalidad; estos cálculos tienen por tanto una definición de fórmula del mismo carácter (dentro de la elección particular de operadores), pero difieren esencialmente del sistema aquí estudiado.

Una clase de ejemplos se obtiene por generalización del cálculo proposicional bi-valente a los *cálculos proposicionales n-valentes* para cualquier entero positivo $n \geq 2$. Los correspondientes a $n > 2$ fueron discutidos por Łukasiewicz 1920 ($n = 3$) y Post 1921 (cualquier $n$). Son cálculos que pueden ser tratados sobre la base de tablas de verdad en una aritmética de $n$ objetos, al modo como el sistema clásico es tratado sobre la base de dos (Cfr. p. ej., Łukasiewicz y Tarski 1930, Rosser y Turquette 1945, 1949, 1952).

Otro ejemplo es el cálculo proposicional intuicionista (Heyting 1930), que pretende ser una formalización del razonamiento matemático intuicionista con proposiciones. Como se advirtió en § 23, obtenemos una lista de postulados para el cálculo proposicional intuicionista (para el cálculo de predicados intuicionista) a partir de nuestro grupo de postulados A1 (grupo A), simplemente reemplazando el Esquema Axiomático 8 por el Esquema Axiomático $8^1$. Esta no es la lista original de postulados de Heyting, sino una sugerida por Gentzen 1934-5. (Los postulados de Heyting para el cálculo de predicados están en 1930a). Si nuestros resultados numerados y teoremas en itálica marcados con el símbolo "°" por cuanto no están establecidos intuicionistamente, dentro del alcance de nuestra discusión, no son realmente válidos para el sistema intuicionista, es una cuestión que requiere en cada caso ulterior consideración. Hacia el final del libro volveremos sobre ello (§§ 80, 82). El resultado de esta sección, a saber, que existe un procedimiento de decisión para el cálculo proposicional, es un resultado que es válido para el sistema intuicionista (Teorema 56 (d) § 80). Es sabido que en el cálculo proposicional intuicionista, ninguno de los cuatro operadores puede ser expresado en términos de los restantes (Wajsberg 1938, McKinsey 1939); y que el cálculo no puede ser tratado sobre la base de tablas de verdad para cualquier $n$ finito (Gödel 1932), pero puede serlo para $n = \aleph_0$ (Jaśkowski 1936*).

Todavía más alejados del punto de vista del cálculo clásico aquí estudiado están los *cálculos proposicionales de implicación estricta* (Lewis 1912), y los *cálculos de proposiciones modales* que tratan de la 'posibilidad', 'necesidad', etc. (Cfr. Lewis y Langford 1932, Feys 1937-8, McKinsey y Tarski 1948, Feys y McKinsey 1952).

CAPITULO VII

# EL CALCULO DE PREDICADOS

**§ 31. Fórmulas de letras predicativas.** En este capítulo estudiamos la parte del sistema formal que se obtiene utilizando exactamente los postulados del Grupo A.

El cálculo proposicional, estudiado en el capítulo precedente, es una formalización de relaciones lógicas que dependen sólo del análisis a efectuar sobre el modo según el cual ciertas proposiciones se componen de proposiciones más simples, usando operaciones de composición en las que esas proposiciones más simples intervienen como totalidades no analizadas.

En el cálculo de predicados, el análisis da un paso más, permitiéndonos considerar también lo que se puede llamar la estructura 'sujeto-predicado' de las proposiciones más simples, y usar operaciones de composición que dependen de esa estructura.

Este análisis no toma en cuenta todavía todos los aspectos de la estructura de las proposiciones de teoría de números. Ello puede ser subrayado, al igual que en el precedente capítulo, introduciendo una noción alternativa de fórmula, que elimina los detalles irrelevantes de la definición de fórmula de teoría de números, y deja asimismo abierto el camino a otras aplicaciones.

Empezamos introduciendo expresiones formales de una nueva especie, que constituyen una generalización de las letras proposicionales introducidas en § 25, como sigue,

$$\mathcal{A},\ \mathcal{A}(a), \mathcal{A}(a, b), \ldots,\ B,\ B(a),\ B(a, b), \ldots,\ C,\ C(a),\ C(a, b), \ldots$$

A estas expresiones las llamamos *letras predicativas* (*con variables de forma nominal* o *anejas*). Cada uno de los símbolos anteriormente usados como una letra proposicional, forma una letra predicativa diferente con cada número diferente $n \geq 0$ de variables anejas, y para $n = 0$, una letra predicativa es una letra proposicional. Las $n$ variables anejas pueden ser cualesquiera $n$ variables distintas. De diferentes elecciones de las $n$ variables anejas con una letra predicativa dada, se dice que dan diferentes formas nominales de la misma letra predicativa, p. ej. $\mathcal{A}(a, b)$, $\mathcal{A}(b, a)$ y $\mathcal{A}(c, d)$ son tres formas nominales de la letra predicativa formada al usar $\mathcal{A}$ con dos variables anejas, pero $\mathcal{A}(a)$ y $\mathcal{A}(a, b, c)$ son otras letras predicativas y $\mathcal{A}(a, a)$ no es una letra predicativa. Ordinariamente basta, a lo largo de una discusión, considerar cada una de las distintas letras predicativas empleadas en ella, como representadas por una sola forma nominal, esto es, considerándolas, a lo largo de la discusión, como una secuencia fija de $n$ variables anejas; y usualmente convenimos en que estas $n$ variables anejas sean las primeras $n$ variables, ordenadamente tomadas, de una lista infinita dada de variables $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... (usualmente aquí la lista $a, b, c, \ldots$).

Para la definición de *fórmula de letras predicativas* dada inductivamente como sigue, los únicos términos serán las variables. Sin embargo, preferimos decir "término" en algunos casos y "variable" en otros, de suerte que resulte claro en qué

sentido se generalice nuestra discusión si más tarde nos interesa disponer de una clase de términos más amplia que la formada simplemente por variables.

1. Si P $(a_1, ..., a_n)$ es una letra predicativa con variables anejas, y $t_1, ..., t_n$ son términos, entonces P $(t_1, ..., t_n)$ es una *fórmula*. 2–5. Si A y B son *fórmulas*, entonces (A) $\supset$ (B), (A) & (B), (A) $\vee$ (B) y $\neg$ (A) son *fórmulas*. 6–7. Si x es una variable, y A (x) es una *fórmula*, entonces $\forall x$ (A (x)) y $\exists x$ (A (x)) son *fórmulas*. 8. Sólo son *fórmulas* las dadas por 1–7.

EJEMPLO 1. Por 1, $\mathcal{A}(b, a)$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(a, b)$ y $\mathcal{A}(a, a)$ son fórmulas de letras predicativas. Aquí, basta partir de las dos formas nominales $\mathcal{A}(a, b)$ y $\mathcal{B}$. Por sucesivas aplicaciones de 3 y 2 (omitiendo paréntesis bajo las usuales convenciones, § 17), $\mathcal{A}(b, a)$ & $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}(b, a)$ & $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b)$ son fórmulas de letras predicativas. Finalmente, por 6, $\forall b\,(\mathcal{A}(b, a)\ \&\ \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$ es una fórmula de letras predicativas.

En lo que respecta a este capítulo, cuando decimos "término" y "fórmula" sin especificar los sentidos, estas palabras pueden ser entendidas o bien en los respectivos sentidos de variable libre y fórmula de letras predicativas, o también en sus respectivos sentidos de teoría de números (§ 17). A los dos sistemas formales, que tienen en común el Grupo A (§ 19) como lista de postulados, pero que difieren según se ha dicho en sus reglas de formación, los distinguimos llamándolos *cálculo de predicados puro* y *cálculo de predicados de teoría de números*.

Antes de seguir adelante con la metamatemática, veamos cómo se interpreta el formalismo, considerado en tanto que cálculo de predicados.

En lenguajes naturales, una proposición se expresa por una sentencia. Entonces un 'predicado' se expresa por una sentencia incompleta o esqueleto de sentencia que contiene un lugar vacío. Por ejemplo "__es un hombre" expresa un predicado. Cuando se cubre el lugar vacío con el nombre de un sujeto tal como "Sócrates", se obtiene una sentencia tal como "Sócrates es un hombre". Esta situación queda convenientemente descrita utilizando la moderna noción matemática de 'función' (§ 10). El predicado es entonces una función de una variable. Esta variable fluctúa sobre un dominio que incluye como miembros a Sócrates, Quirón, etc. Con cada miembro de este dominio, la función pone en correlación una proposición; esto es, cuando la variable independiente toma un miembro del dominio como valor, el predicado toma una proposición como valor correspondiente. Así, el predicado es una *función proposicional de una variable*. Frecuentemente los predicados reciben el nombre de 'propiedades', p. ej. en los Capítulos II y III. En esta terminología, "__es un hombre" expresa la propiedad *P* de ser un hombre, y "Sócrates es un hombre" expresa la proposición de que Sócrates tiene la propiedad *P*. Otro término usado a este respecto es el de 'clase'; "Sócrates es un hombre" expresa que Sócrates pertenece a la clase *C* de los hombres. ('Predicado', en su estricto significado gramatical de aquello que una sentencia dice acerca de su sujeto, es menos amplio que 'función proposicional de una variable' o 'propiedad', puesto que, para un predicado, el nombre omitido en el esqueleto de la sentencia ha de ser el sujeto de la sentencia).

A título de segunda ilustración considérese el esqueleto de sentencia "__ama a__". En terminología gramatical, ese esqueleto consta de un verbo transitivo y de dos lugares vacíos, uno para ser cubierto por el nombre de un sujeto tal como "Juana", y otro por el de un objeto tal como "Juan". Si la sentencia resultante expresa una proposición verdadera o falsa, no se dice aquí. El esqueleto de sentencia en esta ilustración, expresa una *relación binaria*, esto es, una relación entre dos miembros, o, en otras palabras, una *función proposicional de dos variables*.

En otros ejemplos, puede haber varios espacios vacíos correlativos a cubrir por el mismo nombre. Por ejemplo "$\_\_1$ es el padre de $\_\_2$, o $\_\_1$ es la madre de $\_\_2$" expresa una relación binaria, asimismo expresada por "$\_\_1$ es un progenitor de $\_\_2$".

El lector puede fácilmente confeccionar ejemplos de esqueletos de sentencias que contengan un número mayor $n$ de lugares vacíos, o de conjuntos de lugares vacíos correlativos. Un tal esqueleto de sentencia expresa una *relación n-aria*, o *función proposicional de n variables*.

Desde el punto de vista de las funciones, la distinción entre un 'predicado', en el sentido tradicional de la primera ilustración, y una 'relación' es de menor importancia; y análogamente la distinción entre 'sujeto' y 'objeto', en los dos primeros ejemplos. Será más conveniente de aquí en adelante, decir simplemente "predicado" y "objeto" en todos los casos. Por un *predicado* (*de n variables*) entendemos, de acuerdo con ello, una función proposicional de $n$ variables, donde $n$ puede ser ó 0, dando lugar a una proposición, ó 1, dando lugar a un predicado en el sentido tradicional o una propiedad, ó $>1$, dando lugar a una relación $n$-aria. Llamamos *objetos* a los valores de las variables independientes (cuando $n > 0$), y *variables de objeto* a las variables independientes.

El cálculo de predicados tratará de la lógica de predicados en este sentido general de 'predicado'; esto es, como función proposicional. Por ello algunos autores hablan de "cálculo funcional" en vez de hablar de "cálculo de predicados".

Consideraremos aquí sólo el caso del cálculo de predicados que tiene un dominio de objetos para todas sus variables de objetos, en cuyo caso los objetos pueden ser asimismo llamados *individuos*, y las variables de objeto, *variables individuales*. Con este caso basta para la aplicación que pretendemos hacer a nuestro sistema de teoría de números, el cual tiene por dominio al conjunto de los números naturales.

El tratamiento del cálculo de predicados no dependerá de ninguna suposición acerca del dominio de objetos, salvo que sea no-vacío, es decir, que contenga al menos un elemento. En lo que concierne a la pura forma del cálculo, no se introduce requisito alguno de referencia a objetos particulares del dominio; esto es, hay variables individuales pero no constantes individuales.

Veamos ahora cómo elegir el simbolismo que usaremos para representar predicados. Reemplazaremos los blancos más arriba empleados para mostrar los lugares vacíos en un esqueleto de sentencia, por el artificio, habitual en matemática, de letras llamadas "variables". Así, en lugar de "$\_\_1$ es padre de $\_\_2$, o $\_\_1$ es madre de $\_\_2$" nos convendrá más escribir (1) "$a$ es padre de $b$, o $a$ es madre de $b$". Algunos ejemplos matemáticos serían (2) "$a$ es par", (3) "$a$ es igual a $b$", y (4) "$a$ es menor que $b$".

Por otra parte, puesto que un predicado es un tipo de función, a saber, una función cuyos valores son proposiciones, empleamos notación funcional (§ 10) para nombrar predicados, excepto en casos en que alguna otra notación sea de uso común. Así podemos designar el predicado de (1) por "$P(a, b)$" (para "$a$ es un progenitor de $b$"), y el de (2) por "$E(a)$" usando la notación funcional con el símbolo predicativo ("$P$" o "$E$") escrito delante de las variables independientes. (Así lo hemos hecho ya en § 7 al usar "$P(n)$" para expresar que $n$ tiene la propiedad $P$). Para (3) y (4) usamos las notaciones relacionales acostumbradas "$a = b$" y "$a < b$", con el símbolo predicativo ("$=$" o "$<$") escrito entre las variables independientes.

Para el cálculo de predicados puro, las letras predicativas tales como $\mathcal{A}(a, b)$, $B$, etc., han de ser interpretadas como haciendo las veces de predicados no especifica-

dos, esto es, estando $\mathcal{A}(a, b)$ por un predicado de dos variables, $B$ por un predicado de cero variables (es decir, una proposicion), etc. Entonces cualquier fórmula de letras predicativas puede ser interpretada como estando por un predicado que está determinado por los predicados representados por las distintas letras predicativas a partir de las cuales está construida, p. ej., $\forall b(\mathcal{A}(b, a) \,\&\, B \supset \mathcal{A}(a, b))$ representa un predicado de una variable (correspondiente a la $a$ libre) determinado por el predicado de dos variables representado por $\mathcal{A}(a, b)$ y la proposición representada por $B$.

Nótese que cuando estamos usando $\mathcal{A}(a, b)$ como la forma nominal correspondiente a la letra predicativa $\mathcal{A}$ con dos variables anejas, entonces, al momento de interpretar, una vez hayamos elegido independientemente cuál sea el predicado al que haya de representar $\mathcal{A}(a, b)$, los significados de $\mathcal{A}(c, b)$, $\mathcal{A}(a, a)$, $\mathcal{A}(b, a)$, etc. dependerán de esa elección, por la convención standard establecida para la notación funcional (§ 10).

Similarmente, cualquier fórmula en el sistema de teoría de números puede ser interpretada como expresando un predicado, bajo los significados de los símbolos que son usuales en teoría de números. Por ejemplo $\exists c\,(a = 0'' \cdot c)$ expresa $E(a)$ o *a es par*, $a = b$ expresa $a = b$, y $\exists c\,(c' + a = b)$ (abreviado, $a < b$ en § 17) expresa $a < b$.

Sean $x_1, \ldots, x_n$ distintas variables, y $A(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula (bajo cualquiera de las dos nociones de fórmula). Cuando estamos interpretando a $A(x_1, \ldots, x_n)$ por un predicado, o efectuando con ella operaciones formales en correspondencia con su interpretación por un predicado (incluso aunque la interpretación no esté envuelta en las operaciones formales) llamamos a $A(x_1, \ldots, x_n)$ una *forma nominal* en $x_1, \ldots, x_n$ como *variables de forma nominal*, y decimos que $x_1, \ldots, x_n$ tienen la *interpretación de forma nominal*, o la *interpretación predicativa*. La forma nominal $A(x_1, \ldots, x_n)$ es la fórmula del sistema; "$A(x_1, \ldots, x_n)$" es nuestro nombre metamatemático para esa fórmula (bajo nuestra notación de sustitución § 18); y ocasionalmente podemos introducir "$A(x_1, \ldots, x_n)$" como un nombre para el predicado $A(x_1, \ldots, x_n)$ que la fórmula $A(x_1, \ldots, x_n)$ expresa bajo tal interpretación.

Es natural interpretar una fórmula con variables libres por un predicado, p. ej. cuando nos ocupamos de las reglas de formación del sistema y la fórmula en cuestión está siendo considerada como un constituyente de otras fórmulas. Una discusión de las interpretaciones de una fórmula por una proposición tendrá lugar al final de § 32.

§ 32. **Reglas derivadas, variables libres.** Al usar las reglas derivadas del Teorema 2 (§ 23) para el cálculo de predicados, hemos de observar cuidadosamente las restricciones relativas al tratamiento de variables: (1) el t correspondiente a una $\forall$-eliminación o $\exists$-introducción, ha de ser libre con respecto a x en A (x) (cfr. § 18). (2) La x correspondiente a una $\exists$-eliminación, no debe ocurrir libre en C. (3) En una deducción subsidiaria, las variables libres deben ser mantenidas constantes con respecto a la fórmula supuesta a descargar (cfr. § 22). Observaciones entre paréntesis llamarán al principio la atención sobre las precauciones a tomar. Más tarde se irá dejando paulatinamente al lector la tarea de observarlas.

TEOREMA 13. *Para* *64–*68, *sean* $x_1, \ldots, x_n$ *variables distintas, sea* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula, y sean* $t_1, \ldots, t_n$ *términos (no necesariamente distintos) que*

*son libres con respecto a* $x_1, ..., x_n$, *correlativamente, en* $A(x_1, ..., x_n)$. *Para* *67, *sea además* C *una fórmula que no contenga libre a ninguna de las* $x_1, ..., x_n$, *sea* $\Gamma(x_1, ..., x_n)$ *una secuencia finita de cero o más fórmulas, y supóngase que las variables libres son mantenidas constantes con respecto a la última fórmula supuesta* $A(x_1, ..., x_n)$ *en la deducción subsidiaria. Entonces:*

*64. $A(x_1, ..., x_n) \vdash^{x_1 ... x_n} \forall x_1 ... \forall x_n A(x_1, ..., x_n)$.

*65. $\forall x_1 ... \forall x_n A(x_1, ..., x_n) \vdash A(t_1, ..., t_n)$.

*66. $A(x_1, ..., x_n) \vdash^{x_1 ... x_n} A(t_1, ..., t_n)$.

*68. $A(t_1, ..., t_n) \vdash \exists x_1 ... \exists x_n A(x_1, ..., x_n)$.

*67. *Si* $\Gamma(x_1, ..., x_n), A(x_1, ..., x_n) \vdash C$, *entonces* $\Gamma(x_1, ..., x_n), \exists x_1 ... \exists x_n A(x_1, ..., x_n) \vdash^{x_1 ... x_n} C$.

(*n*-ples $\forall$-introducción, $\forall$-eliminación, sustitución, $\exists$-introducción y $\exists$-eliminación).

*Si* x *es una variable, y* A(x) *y* B(x) *son fórmulas:*

*69. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$.

*70. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \supset \exists x B(x)$.

DEMOSTRACIONES. *64. Por *n* aplicaciones sucesivas de la regla simple de $\forall$-introducción (§ 23).

Para *65 y *66 (y posteriormente *68), distinguimos dos casos. CASO 1: $t_1, ..., t_n$ no contienen a $x_1, ..., x_n$. CASO 2: contrariamente.

*65. CASO 1. Por *n* sucesivas $\forall$-eliminaciones simples,

$$\forall x_1 ... \forall x_n A(x_1, ..., x_n) \vdash \forall x_2 ... \forall x_n A(t_1, x_2, ..., x_n) \vdash$$
$$\forall x_3 ... \forall x_n A(t_1, t_2, x_3, ..., x_n) \vdash ... \vdash \forall x_n A(t_1, ..., t_{n-1}, x_n) \vdash$$
$$A(t_1, ..., t_n).$$

La hipótesis del caso y la hipótesis del teorema según la cual $t_1, ..., t_n$ son libres con respecto a $x_1, ..., x_n$, correlativamente, en $A(x_1, ..., x_n)$, aseguran conjuntamente que $t_1$ es libre con respecto a $x_1$ en $\forall x_2 ... \forall x_n A(x_1, x_2, ..., x_n)$, que $t_2$ lo es con respecto a $x_2$ en $\forall x_3 ... \forall x_n A(t_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, etc. (El Caso 2 seguirá a *66 Caso 1).

*66 CASO 1. Combinando *64 y *65 Caso 1 (o por *n* sucesivas aplicaciones de la regla de sustitución simple § 23).

*65 CASO 2. Sean $w_1, ..., w_n$ variables que son distintas entre sí y de $x_1, ..., x_n$, y que no ocurren en $A(x_1, ..., x_n)$ o en $t_1, ..., t_n$. Entonces, por los Casos 1 de *65 y *66,

$$\forall x_1 ... \forall x_n A(x_1, ..., x_n) \vdash A(w_1, ..., w_n) \vdash^{w_1 ... w_n} A(t_1, ..., t_n).$$

*68 CASO 2. $A(t_1, ..., t_n) \vdash \exists w_1 ... \exists w_n A(w_1, ..., w_n)$. También $A(w_1, ..., w_n) \vdash \exists x_1 ... \exists x_n A(x_1, ..., x_n)$, de donde, por *67,

$$\exists w_1 ... \exists w_n A(w_1, ..., w_n) \vdash \exists x_1 ... \exists x_n A(x_1, ..., x_n).$$

*69. 1. $A(x) \supset B(x), A(x) \vdash B(x) \vdash^{x} \forall x B(x)$ – $\supset$-elim., $\forall$-introd.
2. $A(x) \supset B(x), \forall x A(x) \vdash^{x} \forall x B(x)$ – $\forall$-elim., 1 [el término x es libre con respecto a x en A (x) haciendo uso de la definición de § 18].
3. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$ – $\supset$-introd., 2 [la variable x es mantenida constante en la deducción subsidiaria 2 con respecto a la fórmula supuesta $\forall x A(x)$ a descargar, puesto que x no ocurre libre en $\forall x A(x)$].

*70. 1. $A(x) \supset B(x), A(x) \vdash B(x) \vdash \exists x B(x)$ – $\supset$-elim., $\exists$-introd. [cfr. *69 Paso 2].
2. $A(x) \supset B(x), \exists x A(x) \vdash^{x} \exists x B(x)$ – $\exists$-elim., 1 [$\exists x B(x)$ no contiene a x libre, y x es mantenida constante en la deducción subsidiaria 1].
3. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \supset \exists x B(x)$ – $\supset$-introd., 2 [x no ocurre libre en en $\exists x A(x)$].

La regla de $\exists$-eliminación requerida en el Paso 2 de *70, es una regla de deducción subsidiaria, mientras que la regla de $\forall$-eliminación utilizada en el Paso 2 de *69 fue establecida en la forma directa más fuerte (a pesar de que, conforme a un método de abreviatura introducido en el Ejemplo 1 de § 23, el paso se presente en el mismo formato). De ahí que la justificación del Paso 2 de § 70, requiera un mayor cuidado.

EJEMPLO 1. La $\forall$-introducción puede aplicarse a la fórmula $\mathcal{A}(a, a)$ solamente de un modo, mientras que la $\exists$-introducción (simple o 2-ble) puede ser aplicada de varios modos, como sigue.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash^{a} \forall a \mathcal{A}(a, a)$ – $\forall$-introd., suponiendo que x es $a$, y A (x) es $\mathcal{A}(a, a)$.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash \exists a \mathcal{A}(a, a)$ – $\exists$-introd., suponiendo que x es $a$, A(x) es $\mathcal{A}(a, a)$, y t es $a$.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash \exists b \mathcal{A}(a, b)$ – $\exists$-introd., suponiendo que x es $b$, A(x) es $\mathcal{A}(a, b)$, y t es $a$.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash \exists b \mathcal{A}(b, a)$ – $\exists$-introd., suponiendo que x es $b$, A(x) es $\mathcal{A}(b, a)$, y t es $a$.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash \exists a \exists b \mathcal{A}(a, b)$ – 2-ble $\exists$-introd., suponiendo que $x_1, x_2$ son $a, b$, $A(x_1, x_2)$ es $\mathcal{A}(a, b)$, y $t_1, t_2$ son $a, a$.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash \exists a \exists b \mathcal{A}(b, a)$ – 2-ble $\exists$-introd., suponiendo que $x_1, x_2$ son $a, b$, $A(x_1, x_2)$ es $\mathcal{A}(b, a)$, y $t_1, t_2$ son $a, a$.

INTERPRETACION DE FORMULAS CON VARIABLES LIBRES. La restricción concerniente a nuestras reglas de deducción subsidiaria del Teorema 2, según la cual las variables libres deberán mantenerse constantes con respecto a cada fórmula supuesta a descargar, puede ser aclarada mediante ciertas observaciones sobre la interpretación, que no son, sin duda, parte de la metamatemática.

En el siguiente Ejemplo 2, Paso 1, tenemos una deducción a partir de la fórmula supuesta $b \neq 0$ y manteniéndose constante $b$, de suerte que cabe aplicar inmediatamente la $\supset$-introducción. En el Ejemplo 3, la $\supset$-introducción no es inmediatamente aplicable puesto que $b$ es variada, aun cuando se la puede aplicar tras una $\forall$-eliminación. En el Ejemplo 4, vemos cómo puede ser obtenido un resultado falso

(para la interpretación de teoría de números), si se viola la restricción relativa a la deducción subsidiaria.

EJEMPLO 2. 1. $b \neq 0 \vdash a + b \neq a$ –puede ser establecida, manteniendo $b$ constante, en el sistema de teoría de números (§ 39: "s ≠ t" abrevia ¬ s = t, § 17).
2. $\vdash b \neq 0 \supset a + b \neq a$ – $\supset$-introd., 1.
3. $\vdash \forall b\,(b \neq 0 \supset a + b \neq a)$ – $\forall$-introd., 2.

EJEMPLO 3. 1. $b \neq 0 \vdash^{b} 0 \neq 0$ – sustitución (§ 23), siendo $b$ variada.
2. $\forall b\,(b \neq 0) \vdash 0 \neq 0$ – $\forall$-elim., 1.
3. $\vdash \forall b\,(b \neq 0) \supset 0 \neq 0$ – $\supset$-introd., 2.

EJEMPLO 4. 1. $b \neq 0 \vdash^{b} 0 \neq 0$ – lo mismo que Ejemplo 3, Paso 1.
2? $\vdash b \neq 0 \supset 0 \neq 0$ – $\supset$-introd., mal aplicada a 1.
3? $\vdash \forall b\,(b \neq 0 \supset 0 \neq 0)$ – $\forall$-introd., 2.
4? $\vdash 0' \neq 0 \supset 0 \neq 0$ – $\forall$-elim., 3.
5. $\vdash 0' \neq 0$ – por sustitución en el Axioma 15.
6? $\vdash 0 \neq 0$ – Regla 2, 5, 4.

La única violación de las reglas formales en el Ejemplo 4 sucede en el Paso 2. Sugerimos que el lector intente explicar por sí mismo la falacia en términos de la interpretación, antes de continuar leyendo la discusión que sigue más abajo. En especial debiera notar la diferencia entre las fórmulas del Paso 3 de los Ejemplos 3 y 4. El lector puede aportar asimismo los detalles formales relativos a los dos ejemplos siguientes, y comparar los resultados.

EJEMPLO 5. Dados A (x) ⊢ B y A (x) ⊢ ¬ B manteniéndose x constante, entonces ⊢ ¬ A (x) y ⊢ ∀x ¬ A (x).

EJEMPLO 6. Dados A(x) $\vdash^{x}$ B y A(x) $\vdash^{x}$ ¬ B no manteniéndose necesariamente x constante, entonces ⊢ ¬ ∀xA (x).

Las reglas de ∀-eliminación y ∃-eliminación pueden ser discutidas de manera similar.

En matemática informal, conocemos dos diferentes modos de utilizar variables libres al establecer proposiciones, lo que se ilustra en álgebra por una *ecuación idéntica* $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ y una *ecuación condicional* $x^2 + 2 = 3x$.

La primera de estas interpretaciones es la que se aplica a las variables libres en los axiomas y teoremas formales de nuestro sistema, y la llamamos la *interpretación de generalidad.* Por ejemplo, el Axioma 14, que es $a' = b' \supset a = b$, significa que, para todo par $a$ y $b$ de números naturales, si $a' = b'$, entonces $a = b$; y el teorema formal $a = a$, demostrado en el Ejemplo 1 § 19, expresa que todo número natural es igual a sí mismo.

Pero cuando una fórmula A (x) con una variable libre x, es tomada como fórmula supuesta para una deducción formal, tenemos una alternativa. Podemos proponer el supuesto en el sentido de "Supóngase que, para todo $x$, $A$ $(x)$", de suerte que x tenga la interpretación de generalidad. O podemos proponer el supuesto en el sentido de "Supóngase que $x$ es un número tal que $A$ $(x)$", en cuyo caso decimos que x tiene la *interpretación condicional.*

En el segundo caso, el uso, en la deducción, de operaciones que dependen, desde el punto de vista del significado, de la posibilidad de permitir que x fluctúe sobre el dominio de objetos, no estará en consonancia con la interpretación. Para la interpretación de generalidad, no hay tal limitación. El Paso 1 del Ejemplo 2 es una deducción construida en consonancia con la interpretación condicional; y el Paso 1 de los Ejemplos 3 y 4 solamente lo está con la interpretación de generalidad. Que la fórmula supuesta $b \neq 0$ sea falsa bajo esta última interpretación, es algo que no cae aquí bajo consideración, de suerte que la fórmula concluyente del Ejemplo 3 es enteramente correcta (aun cuando no muy interesante).

El estudiante de matemática elemental está familiarizado con la distinción entre símbolos clasificados como constantes y símbolos clasificados como variables. Un detenido examen muestra que esta distinción en el uso de los símbolos es siempre relativa a un contexto. Se introduce un símbolo dado como nombre de un objeto, y a lo largo de un cierto contexto toda ocurrencia del símbolo sigue siendo un nombre de ese mismo objeto. Desde fuera del contexto, se indica que el objeto puede ser cualquiera (alguno, etc.) de los miembros de algún conjunto. Fundamentalmente, entonces, el símbolo es constante, esto es, su significado no puede ser cambiado dentro del contexto, mientras, desde fuera del contexto, es variable.

(La terminología empleada de hecho en una teoría dada es, generalmente, la adecuada al contexto constituido por la teoría en su totalidad. A veces, símbolos que son constantes a lo largo de un importante subcontexto, pero variables para la teoría en su totalidad, son denominados "parámetros" o "constantes arbitrarias".)

Para la interpretación de generalidad de una variable x en una fórmula A (x), el contexto dentro del cual todas las ocurrencias libres de x han de representar el mismo objeto, es, exactamente, la fórmula total A (x). La fórmula A (x) significa entonces lo mismo que $\forall x A(x)$, y en analogía con el alcance del cuantificador $\forall x$, llamamos también a A (x) el *alcance* de la generalidad expresada por la variable libre x.

Para la interpretación condicional, el contexto dentro del cual todas las ocurrencias (libres) de x tienen el mismo significado, no es justamente A (x) sino toda la deducción a partir de A (x) [o la parte de ella dependiente de A (x)].

En el Ejemplo 4, Paso 1, bajo la interpretación de generalidad el alcance de la generalidad expresada por $b$ es exactamente la fórmula supuesta $b \neq 0$. Si la fórmula del Paso 2 fuese demostrable, la interpretación de generalidad se aplicaría entonces a ella en su totalidad, y el alcance se convertiría en $b \neq 0 \supset 0 \neq 0$, no justamente la parte $b \neq 0$.

El cuantificador universal $\forall x$ funciona en nuestro simbolismo lógico como un artificio para restringir el alcance de generalidad a una parte de la fórmula. Las fórmulas de los Pasos 2 y 3 del Ejemplo 4 (o de las dos conclusiones del Ejemplo 5) son sinónimas bajo la interpretación de generalidad de la variable libre en la primera. No puede ser escrita ninguna fórmula sin cuantificador que sea sinónima de la fórmula del Paso 3, Ejemplo 3 (o de la conclusión del Ejemplo 6).

Sea A una fórmula que contenga libres exactamente las distintas variables $x_1, \ldots, x_n$ en orden de primera ocurrencia. Según que $n > 0$ ó que $n = 0$, llamamos a A *abierta* o *cerrada*. A la fórmula cerrada $\forall x_1 \ldots \forall x_n A$ (abreviada a veces "$\forall A$") la llamamos la *clausura* de A. Por *64 y *65, A y $\forall A$ son *interdeducibles* (esto es, cada una de ellas puede ser deducida a partir de la otra), variando $x_1, \ldots, x_n$ en la deducción de $\forall A$ a partir de A. Bajo la interpretación de generalidad A y $\forall A$ son sinónimas.

§ 33. **Reemplazo.** Sea $C_A$ una fórmula en la que hay una ocurrencia especificada de una fórmula A, y sea $C_B$ el resultado de reemplazar esta ocurrencia por B (§ 26). Existirán entonces construcciones paralelas de $C_A$ a partir de A, y de $C_B$ a partir de B, por las Cláusulas 2–7 de la definición de fórmula (§ 17 ó § 31). Al número de pasos en esta construcción de $C_A$ (o de operadores bajo cuyos alcances se encuentre la parte A) lo llamamos la *profundidad* de la parte A en $C_A$.

EJEMPLO 1. Supóngase que A sea $\mathcal{A}(b,a)$, que $C_A$ sea $\forall b(\mathcal{A}(b,a) \& B \supset \mathcal{A}(a,b))$ (siendo aquí la ocurrencia especificada la única ocurrencia), y que B sea $\exists d\mathcal{A}(d,a,c)$: Entonces $C_B$ es $\forall b\ (\exists d\mathcal{A}(d,a,c) \& B \supset \mathcal{A}(a,b))$. Las construcciones paralelas de $C_A$ a partir de A, y de $C_B$ a partir de B son como sigue, y la profundidad es 3.

| | |
|---|---|
| $\mathcal{A}(b,a)$ | $\exists d\mathcal{A}(d,a,c)$ |
| $\mathcal{A}(b,a) \& B$ | $\exists d\mathcal{A}(d,a,c) \& B$ |
| $\mathcal{A}(b,a) \& B \supset \mathcal{A}(a,b)$ | $\exists d\mathcal{A}(d,a,c) \& B \supset \mathcal{A}(a,b)$ |
| $\forall b\ (\mathcal{A}(b,a) \& B \supset \mathcal{A}(a,b))$ | $\forall b\,(\exists d\mathcal{A}(d,a,c) \& B \supset \mathcal{A}(a,b))$ |

TEOREMA 14. *Si* A, B, $C_A$ *y* $C_B$ *son fórmulas relacionadas como en la precedente discusión del reemplazo, entonces*

$$A \sim B \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_A \sim C_B$$

*donde* $x_1, \ldots, x_n$ *son las variables libres de* A *o de* B *que pertenecen a un cuantificador de* $C_A$ *que tenga dentro de su alcance la ocurrencia especificada de* A. (Teorema de reemplazo).

En otras palabras, $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de $A \sim B$ que son cuantificadas en la construcción de $C_A$ a partir de la parte especificada A. La demostración del teorema se lleva a cabo por inducción sobre la profundidad, al igual que antes (Teorema 6 § 26), usando ahora dos lemas adicionales.

LEMAS ADICIONALES PARA EL REEMPLAZO. *Si* x *es una variable, y* A (x) *y* B (x) *son fórmulas;*

*71. $A(x) \sim B(x) \vdash^x \forall x A(x) \sim \forall x B(x)$.

*72. $A(x) \sim B(x) \vdash^x \exists x A(x) \sim \exists x B(x)$.

DEMOSTRACIONES. A partir de *69 y *70, respectivamente.

EJEMPLO 1 (conclusión). Escríbase $\sim$ entre las fórmulas de cada par en las columnas paralelas. Las fórmulas resultantes son deducibles, cada una a partir de la precedente utilizando sucesivamente *28a, *26 y *71 (variando $b$).

COROLARIO 1. *Bajo las condiciones del teorema:*
*Si* $\vdash A \sim B$, *entonces* $\vdash C_A \sim C_B$.

EJEMPLO 2°. Por *49 y (*20), $\vdash A(x) \sim \neg\neg A(x)$. De donde

$$\vdash \neg\neg \forall x A(x) \sim \neg\neg \forall x \neg\neg A(x).$$

EJEMPLO 3. Ahora bien (cfr. Ejemplo 2 § 26), si A y B no contienen a x libre: $A \sim B \vdash A \vee \forall x (A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x (B \supset C(x))$. Si A y B pueden contener a x libre: $A \sim B \vdash^{x} A \vee \forall x (A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x (B \supset C(x))$. Si $\vdash A \sim B$, entonces $\vdash A \vee \forall x (A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x (B \supset C(x))$.

COROLARIO 2. *Bajo las condiciones del teorema*: $A \sim B$, $C_A \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_B$, *variando* $x_1, \ldots, x_n$ *sólo para la primera fórmula supuesta. Si* $\vdash A \sim B$, *entonces* $C_A \vdash C_B$. (Propiedad de reemplazo de la equivalencia).

Un reemplazo puede ser precedido por una sustitución de variables individuales (*66).

EJEMPLO 4. $b+0=a \sim a=b \vdash^{b} b'+0=a \sim a=b' \vdash^{b}$. $\exists b (b'+0=a) \sim \exists b (a=b')$. Pero en § 38 tendremos $\vdash b+0=a \sim a=b$. De aquí pues $\vdash \exists b (b'+0=a) \sim \exists b (a=b')$.

La interpretación aclara el tratamiento de las variables en el reemplazo. En matemática informal, sabiendo que sen $x$ es la misma función que cos $(\pi/2 - x)$, esto es, teniendo sen $x = \cos(\pi/2 - x)$ como una ecuación idéntica (tomando $x$ la interpretación de generalidad, § 32), estamos justificados al reemplazar "sen $x$" por "$\cos(\pi/2 - x)$" en "$\int_0^t \operatorname{sen} x\, dx$", y en reemplazar "sen $2x$" por "$\cos(\pi/2 - 2x)$". Pero suponiendo la ecuación condicional $\operatorname{sen} x = 1 - x$, no tenemos derecho a reemplazar "sen $x$" por "$1 - x$" en "$\int_0^t \operatorname{sen} x\, dx$", o a reemplazar "sen $2x$" por "$1 - 2x$".

CAMBIO DE VARIABLES LIGADAS. Se dirá que dos fórmulas A y B son *congruentes*, si A y B tienen el mismo número $k$ de símbolos, y para cada $i$ $(i=1, \ldots, k)$: (I) Si el símbolo $i$-ésimo de A no es una variable, entonces el símbolo $i$-ésimo de B es el mismo símbolo. (II) Si el símbolo $i$-ésimo de A es una ocurrencia libre de una variable, entonces el símbolo $i$-ésimo de B es una ocurrencia libre de la misma variable. (III) Si el símbolo $i$-ésimo de A es una ocurrencia de una variable ligada por el $j$-ésimo cuantificador de A, entonces el símbolo $i$-ésimo de B es una ocurrencia de una variable (no necesariamente de la misma variable) ligada por el $j$-ésimo cuantificador de B.

En resumen, dos fórmulas son congruentes si difieren solamente en sus variables ligadas, y las variables ligadas correspondientes están ligadas por cuantificadores correspondientes.

EJEMPLO 5. Las dos fórmulas siguientes son congruentes:

$$\forall a (\mathcal{A}(a, c) \vee \exists a B(a) \supset \exists b C(a, b)), \quad \forall b (\mathcal{A}(b, c) \vee \exists c B(c) \supset \exists a C(b, a)).$$

Ello puede hacerse manifiesto introduciendo índices que muestren qué ocurrencias de variables están ligadas por el mismo cuantificador:

$$\forall a_1 (\mathcal{A}(a_1, c) \vee \exists a_2 B(a_2) \supset \exists b_3 C(a_1, b_3)), \forall b_1 (\mathcal{A}(b_1, c) \vee \exists c_2 B(c_2) \supset \exists a_3 C(b_1, a_3)).$$

Si borramos las variables ligadas dejando espacios en blanco numerados con los índices, obtendremos expresiones idénticas.

LEMA 15a. *Si* x *es una variable,* A (x) *es una fórmula, y* b *es una variable tal que* (i) b *es libre con respecto a* x *en* A (x), *y* (ii) b *no ocurre libre en* A (x) (*a menos que* b *sea* x), *entonces:*

*73. $\vdash \forall x A(x) \sim \forall b A(b)$. *74. $\vdash \exists x A(x) \sim \exists b A(b)$.

DEMOSTRACIONES. *73. Por el Ejemplo 3 § 22 (Pasos 1–2), $\vdash \forall b A(b) \supset \forall x A(x)$, y similarmente $\vdash \forall x A(x) \supset \forall b A(b)$. –Nótese, por el Ejemplo 9 § 18, que (i) y (ii) son necesarios y suficientes en orden a que $\forall b A(b)$ sea congruente con $\forall x A(x)$ (o $\exists b A(b)$ con $\exists x A(x)$).

LEMA 15b. *Las fórmulas congruentes son equivalentes; esto es, si* A *es congruente con* B, *entonces* $\vdash A \sim B$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que A contiene, en orden, exactamente $r$ cuantificadores con las variables respectivas $u_1, \ldots, u_r$ (no necesariamente distintas). Sean $w_1, \ldots, w_r$ variables distintas que no ocurren ni en A ni en B. Hagamos que C provenga de A cambiando cada $u_j$ ($j = 1, \ldots, r$) por $w_j$ en exactamente las ocurrencias que ligue el $j$-ésimo cuantificador. Por $r$ reemplazos sucesivos, utilizando *73 o *74 y el Corolario 1 del Teorema 14, $\vdash A \sim C$. Similarmente, $\vdash B \sim C$. De donde (*20, *21), $\vdash A \sim B$.

EJEMPLO 5 (conclusión). $\vdash \forall a (\mathcal{A}(a, c) \vee \exists a \mathcal{B}(a) \supset \exists b C(a, b)) \sim \forall d (\mathcal{A}(d, c) \vee \exists a \mathcal{B}(a) \supset \exists b C(d, b))$ [*73] $\sim \forall d (\mathcal{A}(d, c) \vee \exists e \mathcal{B}(e) \supset \exists b C(d, b))$ [*74] $\sim \forall d (\mathcal{A}(d, c) \vee \exists e \mathcal{B}(e) \supset \exists f C(d, f))$ [*74]. Similarmente $\vdash \forall b (\mathcal{A}(b, c) \vee \exists c \mathcal{B}(c) \supset \exists a C(b, a)) \sim \forall d (\mathcal{A}(d, c) \vee \exists e \mathcal{B}(e) \supset \exists f C(d, f))$.

OBSERVACION 1. (a) Similarmente al Teorema 14, utilizando como lemas *6–*9b, *12, *69, *70 (en lugar de *26–*30, *71, *72): *Supóngase que la parte* A *está en* $C_A$ *dentro de los alcances de sólo algunos de los símbolos* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. *Entonces* $A \supset B \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_A \supset C_B$ *o* $B \supset A \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_A \supset C_B$ *en el sistema que tiene como postulados sólo los* $\supset$*-postulados y los postulados correspondientes a los símbolos en cuestión, a condición de que en el caso de que los símbolos incluyan a* $\forall$ *pero no a* &, *los* $\forall$*-postulados incluyan el Esquema Axiomático* 9a *del Lema* 11 § 24. (Cfr. Herbrand 1930 § 3.2, MacLane 1934 págs. 28 ss., Curry 1939 págs. 290–291).

(b) $\vdash \forall x A(x) \supset \forall b A(b)$ *y* $\vdash \forall b A(b) \supset \forall x A(x)$ (*similarmente con* $\exists$) *utilizando sólo los Postulados* 9 *y* 10 (11 *y* 12). (c) Por lo tanto: *Si* A *es congruente con* B, *entonces* $\vdash A \supset B$ *y* $\vdash B \supset A$ (*de donde* A *y* B *son interdeducibles*) *utilizando sólo los* $\supset$*-postulados y los postulados correspondientes a* (*a lo sumo*) *los símbolos lógicos que* A *contiene, y a condición de que suceda lo mismo que en* (a).

ABREVIATURAS PERMANENTES. Nuestro uso de abreviaturas permanentes, tales como "$a < b$" (discutidas al final de § 17) diferirá del de abreviaturas transitorias, tales como "A (x)", "A ($x_1, \ldots, x_n$)", etc. (§ 18), en dos respectos. Primero, no contendrá variables libres no exhibidas en la abreviatura ('variables libres anónimas'). Segundo, en lugar de evitar la entrada de términos no libres en las posiciones de sustitución, consideramos permitido elegir a voluntad las variables ligadas supri-

midas por la abreviatura ('variables ligadas anónimas'), al objeto de que los términos que deseemos introducir por sustitución, cualesquiera que sean, resulten libres en las posiciones de sustitución. Todas las fórmulas que se obtengan desabreviando legítimamente una abreviatura dada, son congruentes, y por tanto, según el Lema 15b, equivalentes. Así, al considerar cuestiones de deducibilidad y demostrabilidad, no importa cuál sea la fórmula desabreviada de la que se haga uso, si su obtención es legítima.

Para el caso de que proceda la aplicación de un postulado, la manera de desabreviar puede comportar una diferencia, p. ej. $s<t \supset (B \supset s<t)$ es un axioma por el Esquema 1a sólo si ambas ocurrencias de "$s < t$" son desabreviadas del mismo modo. De aquí en adelante, al establecer que procede la aplicación de un postulado, supondremos tácitamente que las abreviaturas de igual apariencia son igualmente desabreviadas.

*§ 34. **Sustitución.** El uso de una regla de sustitución formal para letras predicativas puede ser en buena medida evitado estableciendo los resultados en la forma esquemática, con letras metamatemáticas en lugar de letras predicativas particulares. De este modo efectuamos informalmente la sustitución al aplicar los resultados con un cambio en la significación de las letras metamatemáticas, pero ello no constituye una aplicación de una regla de sustitución formal. Tal hemos venido haciendo continuamente desde muy al comienzo de nuestro estudio del sistema formal. Se aducirá un nuevo ejemplo que indique el sentido de este procedimiento.

EJEMPLO 1°. Como en *83 (§ 35) estableceremos que, si x es cualquier variable y A(x) cualquier fórmula, $\vdash \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$. Sea ahora x cualquier variable y A(x) cualquier fórmula. Tomando la negación $\neg A(x)$ de esta fórmula A(x) como la A(x) de *83, tenemos $\vdash \exists x \neg A(x) \sim \neg \forall x \neg \neg A(x)$. Esto y el Ejemplo 2 § 83, explican los pasos segundo y tercero de la siguiente cadena: $\vdash \forall x A(x) \sim \neg \neg \forall x A(x)$ [*49] $\sim \neg \neg \forall x \neg \neg A(x)$ [*49] $\sim \neg \exists x \neg A(x)$ [*83].

El único uso esencial que haremos de la regla de sustitución formal para el cálculo de predicados (Teorema 15) será al establecer la dualidad (Corolario del Teorema 18 § 35), donde sustituimos las letras predicativas por sus negaciones. Tal sustitución puede ser justificada merced al razonamiento usado ya al demostrar la regla de sustitución para el cálculo proposicional (Teorema 3 § 25), sin nuevas complicaciones. Una ulterior aplicación de la sustitución formal ocurre al pasar de un número de resultados, primeramente demostrados por dualidad en términos de letras predicativas particulares, a los resultados generales de la misma forma con letras metamatemáticas. Esta aplicación podría ser evitada usando la regla de sustitución sólo heurísticamente, para descubrir demostraciones cuya validez podemos luego establecer sin el uso de tal regla. El lector puede por tanto, si lo desea, omitir el tratamiento detallado de la sustitución dado en el resto de esta sección.

Introduciremos una noción generalizada de 'ocurrencia', que es apropiada para la interpretación de forma nominal. En matemática informal, "sen $x$", como expresión de una función, ocurre en "3 sen $x$ + cos $x$", en "$\int_0^t \operatorname{sen} x dx$" y en "cos $x$ sen $2x$", aunque como expresión de un número sólo ocurre en el primer caso.

Al objeto de simplificar la notación de esta sección, analizaremos cada sustitución considerando que las variables anejas a cada una de las distintas letras

predicativas son las $n$ primeras de una lista infinita de variables $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... (cfr. § 31). No obstante, puede que esta lista haya de ser elegida de modo diferente para sustituciones diferentes (véase a continuación).

Por una *ocurrencia* de una letra predicativa $P(a_1, ..., a_n)$ con variables anejas en una fórmula de letras predicativas E, entenderemos una parte (consecutiva) de E de la forma $P(t_1, ..., t_n)$, donde $t_1, ..., t_n$ son términos. Una fórmula de letras predicativas E se dice ser una fórmula de letras predicativas *en* las distintas letras predicativas.

(1) $P_1(a_1, ..., a_{n_1}), ..., P_m(a_1, ..., a_{n_m})$ $\quad (n_1, ..., n_m \geq 0;\ m \geq 1)$,

si no ocurren en E otras letras predicativas que (1).

EJEMPLO 2. La letra predicativa $\mathcal{A}(a, b)$ ocurre dos veces en $\forall b\,(\mathcal{A}(b, a)\ \&\ \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$, primero como la parte $\mathcal{A}(b, a)$, y segundo como la parte $\mathcal{A}(a, b)$. La fórmula $\forall b\,(\mathcal{A}(b, a)\ \&\ \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$ es una fórmula de letras predicativas en $\mathcal{A}(a, b)$, $\mathcal{B}$, $C(a, b, c)$.

La *sustitución* de las letras predicativas (1) en E por las fórmulas (en cualquiera de los sentidos § 31)

(2) $A_1(a_1 ..., a_{n_1}), ..., A_m(a_1, ..., a_{n_m})$,

consideradas como formas nominales en las respectivas variables exhibidas (y siendo E* el resultado de la sustitución), consistirá en reemplazar, simultáneamente para cada $j$ ($j = 1, ..., m$), cada ocurrencia $P_j(t_1, ..., t_{n_j})$ de $P_j(a_1, ..., a_{n_j})$ en E por $A_j(t_1, ..., t_{n_j})$.

Las variables de forma nominal (esto es, las a) no aparecen como tales en E ni en E*. Al preguntar si una fórmula dada E* proviene de otra fórmula dada E, por sustitución de ciertas letras predicativas, basta plantear la cuestión eligiendo para la forma nominal variables que no ocurran en E ni en E*, aunque, por nuestra parte, no nos restringiremos a una tal opción de las variables de forma nominal cuando otras sean procedentes.

Se dice que la sustitución es *libre*, si para cada $j$ ($j = 1, ..., m$), $A_j(a_1, ..., a_{n_j})$ es 'libre' con respecto a $P_j(a_1, ..., a_{n_j})$ en E, en el siguiente sentido: $A(a_1, ..., a_n)$ es *libre* con respecto a $P(a_1, ..., a_n)$ en E, si, para cada ocurrencia $P(t_1, ..., t_n)$ de $P(a_1, ..., a_n)$ en E, (A1) $t_1, ..., t_n$ son libres con respecto a $a_1, ..., a_n$, correlativamente en $A(a_1, ..., a_n)$, y (A2) $P(t_1, ..., t_n)$ no está en E dentro del alcance de un cuantificador $\forall y$ o $\exists y$, donde y sea una variable libre de $A(a_1, ..., a_n)$ distinta de de las variables de forma nominal $a_1, ..., a_n$.

EJEMPLO 3. Sea $m = 1$; $n = n_1 = 2$; supóngase que $a_1$, $a_2$ son $c, d$; que $P(a_1, a_2)$ es $\mathcal{A}(c, d)$, que $A(a_1, a_2)$ es $\forall b\,\mathcal{B}(a, b, c, d) \vee \mathcal{A}(d, c)$; y que E es $\exists c\,\mathcal{A}(c, a)$. Entonces E* es $\exists c\,(\forall b\,\mathcal{B}(a, b, c, a) \vee \mathcal{A}(a, c))$. La sustitución es libre.

Es conveniente referirse a las ocurrencias libres de $a_1, ..., a_n$ en $A(a_1, ..., a_n)$ como *ocurrencias explícitas*; y a las otras ocurrencias de variables en $A(a_1, ..., a_n)$ como *ocurrencias anónimas*. Las variables que ocurren explícitamente [anónimamente] libres (ligadas) en $A(a_1, ..., a_n)$ son *variables explícitas* [*anónimas*] *libres* (*ligadas*) de $A(a_1, ..., a_n)$. La terminología se extiende generalmente a situaciones en las que fórmulas o partes de fórmulas son representadas por letras metamatemáticas.

EJEMPLO 4. Considerando $\mathcal{A}(a, b)$ & $\exists a\, \mathcal{B}(a, b, c)$ como una forma nominal en $a$, $b$, y utilizando en el lugar de ella "A $(a, b)$" (o "A $(a_1, a_2)$" donde "$a_1$", "$a_2$" están por $a$, $b$), la primera ocurrencia de $a$ y las dos ocurrencias de $b$ son explícitas, la segunda y tercera ocurrencias de $a$ y la ocurrencia de $c$ son anónimas. Así, $a$ y $b$ son variables libres explícitas, $c$ es una variable libre anónima, y $a$ es una variable ligada anónima. Utilizando "$\forall a$A $(a, b)$" en el lugar de $\forall a\,(\mathcal{A}(a, b)$ & $\exists a\,\mathcal{B}(a, b, c))$, las dos primeras ocurrencias de $a$ son explícitas, las otras dos anónimas; así $a$ es a la vez una variable ligada explícita y una variable ligada anónima. $\forall a$ es un cuantificador explícito, y $\exists a$ un cuantificador anónimo.

En nuestros siguientes ejemplos de sustitución, las variables $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... serán $a$, $b$, $c$, ... (Tal elección puede hacerse siempre, excepto cuando interfiriese, como en el Ejemplo 3, con las variables anónimas en la sustitución).

El incumplimiento de (A1) o (A2) es siempre debido a la presencia de variables anónimas.

EJEMPLO 5. La fórmula $\exists c\mathcal{A}(c, a, b)$ no es libre con respecto a $\mathcal{A}(a)$ en $\mathcal{A}(c) \supset \mathcal{B}$, porque se viola (A1) (tras la sustitución, siendo el resultado $\exists c\mathcal{A}(c, c, b) \supset \mathcal{B}$, la $c$ de $\mathcal{A}(c)$ se convertiría en ligada por el cuantificador anónimo de $\exists c$ de $\exists c\mathcal{A}(c, a, b)$), ni tampoco en $\forall b\,(\mathcal{A}(a) \supset (b))$, porque se viola (A2) (tras la sustitución, siendo el resultado $\forall b\,(\exists c\mathcal{A}(c, a, b) \supset \mathcal{B}(b))$, la $b$ libre anónima de $\exists c\mathcal{A}(c,a,b)$ se convertiría en ligada por el cuantificador $\forall b$ de $\forall b\,(\mathcal{A}(a) \supset \mathcal{B}(b)))$.

Las condiciones (A1) y (A2) pueden ser consideradas como condiciones de que cada parte A $(t_1, ..., t_n)$ de E*, resultante de la sustitución de P $(a_1, ..., a_n)$ por A $(a_1, ..., a_n)$, constituya una *ocurrencia de* A $(a_1, ..., a_n)$ *como una forma nominal en* $a_1, ..., a_n$.

EJEMPLO 6. Las a de este ejemplo serán $a$, $b$, $c$. Pero recurriremos al uso de índices que nos ayuden al referirnos a diferentes ocurrencias de las variables. Sea E

(i) $\forall b_1\,(\mathcal{A}(b_2, a_3)\,\&\,\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a_4, b_5))$.

Sean A $(a, b)$, B, C $(a, b, c)$ (que han de sustituir respectivamente a $\mathcal{A}(a, b)$, $\mathcal{B}$, $C(a, b, c)$)

(ii) $\exists c_6\, C(c_7, a, b, b)$, $\quad \neg\mathcal{B}(a_8), \mathcal{A}(a, b)$

(siendo anónimas las ocurrencias de variables con subíndices). Entonces E* (el resultado de la sustitución realizada en E) es

(iii) $\forall b_1\,(\exists c_6\, C(c_7, b_2, a_3, a_3)\,\&\,\neg\mathcal{B}(a_8) \supset \exists c_6\, C(c_7, a_4, b_5, b_5))$.

La sustitución es libre.

El significado del próximo lema se aclarará por el ejemplo que le sigue.

LEMA 16a. *Si la sustitución de* (1) *por* (2) *en* E *es libre, entonces en el resultado* E* *cada ocurrencia de una variable se presenta como una ocurrencia libre de la variable o bien en* E *o anónimamente en alguna* $A_j$ $(a_1, ..., a_{n_j})$, *y cada ocurrencia ligada de una variable y el cuantificador que la liga se presentan conjuntamente en la misma relación o bien en* E *o anónimamente en alguna* $A_j$ $(a_1, ..., a_{n_j})$.

EJEMPLO 6 (continuación). Las dos $a_3$ libres en (iii) se presentan como la $a_3$ libre en (i). La $a_8$ libre se presenta como la $a_8$ anónima libre en (ii). Las dos $b_5$ ligadas por $\forall b_1$ se presentan conjuntamente como la $b_5$ ligada por $\forall b_1$ en (i). La $c_7$ ligada por $\exists c_6$ (o cualquier par semejante) se presenta como la $c_7$ anónima ligada por $\exists c_6$ en (ii).

BOSQUEJO DE DEMOSTRACION. Considérese una ocurrencia dada de una variable en $E^*$. Dicha ocurrencia o bien (Caso 1) no está en ninguna de las partes $A_j(t_1, ..., t_{n_j})$ (p. ej. $b_1$), o bien (Caso 2) está en una de las partes $A_j(t_1, ..., t_{n_j})$ pero no en ninguna $t_i$ (p. ej., $c_6$, $c_7$, $a_8$), o bien (Caso 3) está en una de las ocurrencias de $t_i$ que ha sido introducida en $A_j(t_1, ..., t_{n_j})$ por sustitución de una ocurrencia libre de $a_i$ en $A_j(a_1, ..., a_{n_j})$ (p. ej., $b_2$, $a_3$, $a_4$, $b_5$). Sigue el lema, utilizando en el Caso 2 la condición (A2) para la libertad, y en el Caso 3 la condición (A1).

LEMA 16b. *Supóngase que*

$$\widetilde{A}_1(a_1, ..., a_{n_1}), ..., \widetilde{A}_m(a_1, ..., a_{n_m}) \tag{$\widetilde{2}$}$$

*son fórmulas congruentes respectivamente con las fórmulas* (2), *y supóngase que* $\widetilde{F}$ *es una fórmula congruente con* F. *Si la sustitución de* (1) *por* (2) *en* F *con resultado* F*, *y la sustitución de* (1) *por* ($\widetilde{2}$) *en* $\widetilde{F}$ *con resultado* $\widetilde{F}^\dagger$, *son ambas libres, entonces* $\widetilde{F}^\dagger$ *es congruente con* F*.

Por el Lema 16a, obsérvese que, si el $p$-ésimo símbolo de F* se presenta como el $q$-ésimo símbolo de F (de $A_j(a_1, ..., a_{n_j})$), el $p$-ésimo símbolo de $\widetilde{F}\dagger$ se presenta como el $q$-ésimo símbolo de $\widetilde{F}$ (de $\widetilde{A}_j(a_1, ..., a_{n_j})$).

LEMA 17. *Dada una demostración de* F, *y una lista de variables* $z_1, ..., z_q$, *podemos hallar una fórmula* $\widetilde{F}$ *congruente con* F *y que no contenga ligadas a ninguna de las variables* $z_1, ..., z_q$, *y una demostración de* $\widetilde{F}$ *que no contenga aplicaciones de las Reglas* 9 *ó* 12 *con respecto a ninguna de las* $z_1, ..., z_q$.

DEMOSTRACION. Sean $b_1, ..., b_s$ las distintas variables libres de F, y llámese también a F "$F(b_1, ..., b_s)$". Sean $u_1, ..., u_r$ todas las distintas variables que ocurren libres o ligadas en cualquier fórmula de la demostración dada de F (incluyendo a $b_1, ..., b_s$). Sean $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_r$ nuevas variables, distintas entre sí y distintas de $u_1, ..., u_r$, $z_1, ..., z_q$. Por la definición de lo que constituye una demostración en el cálculo de predicados (Grupo de Postulados A § 19), todas las variables están inicialmente a la par. De donde si, a lo largo de la demostración dada de F, cambiamos $u_1, ..., u_r$ simultáneamente en todas las ocurrencias libres y ligadas por $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_r$, respectivamente, la figura resultante ha de ser también una demostración. Digamos que es una demostración de $\widetilde{F}(\mathfrak{b}_1, ..., \mathfrak{b}_s)$; así pues (a) $\vdash \widetilde{F}(\mathfrak{b}_1, ..., \mathfrak{b}_s)$. Ahora, por $n$-ple sustitución (*66), (b) $\widetilde{F}(b_1, ..., b_s) \vdash_{\mathfrak{b}_1 ... \mathfrak{b}_s} \widetilde{F}(b_1, ..., b_s)$. En lo que concierne a la demostración de *66, puesto que $b_1, ..., b_s$ son distintas de $\mathfrak{b}_1, ..., \mathfrak{b}_s$, la deducción (b) requiere el uso de la Regla 9 solamente con respecto a $\mathfrak{b}_1, ..., \mathfrak{b}_s$ (y en ningún caso la Regla 12). Supóngase que $\widetilde{F}$ es $\widetilde{F}(b_1, ..., b_s)$. Combinando (a) y (b), obtenemos una demostración de $\widetilde{F}$ en la que las Reglas 9 y 12 son utilizadas sólo con respecto a las nuevas variables $\bar{u}_1, ..., \bar{u}_r$ (incluyendo $\mathfrak{b}_1, ..., \mathfrak{b}_s$), y por tanto no con respecto a ninguna de las $z_1, ..., z_q$.

TEOREMA 15. SUSTITUCION DE LETRAS PREDICATIVAS. *Sean* $D_1, ..., D_l$, E *fórmulas de letras predicativas en las distintas letras predicativas* (1). *Sean* $D_1^*, ..., D_l^*$, $E^*$ *el resultado de la sustitución de* (1) *por* (2) (*como formas nominales en las variables mostradas*) *a lo largo de* $D_1, ..., D_l$, E, *respectivamente. Entonces, dando por supuesto que*

(A) *la sustitución es libre, y*

(B) *para* $j = 1, ..., m$, *las variables libres anónimas de* $A_j$ $(a_1, ..., a_{n_j})$ *son mantenidas constantes en la deducción dada para cada fórmula supuesta que contenga las correspondientes letras predicativas* $P_j$ $(a_1, ..., a_{n_j})$: *Si* $D_1, ..., D_l \vdash E$, *entonces* $D_1^*, ..., D_l^* \vdash E^*$.

(El Supuesto (B) es sin duda satisfecho, si todas las variables libres anónimas de (2) son mantenidas constantes en la deducción dada. En el caso en que $l = 0$, desaparece el Supuesto (B), y tenemos simplemente: *Si* $\vdash$ E, *entonces* $\vdash E^*$, *supuesto que* (A) *la sustitución sea libre*).

DEMOSTRACION. Tomamos la deducción dada $D_1, ..., D_l \vdash E$ como la (I) del Lema 8a (§ 24), y pasamos a una demostración (II). Escribimos ahora la extensa fórmula en (II) como "F". La sustitución de (1) por (2) en F es libre, como puede verse utilizando el Supuesto (A), y también el Supuesto (B) para asegurarse que se ha respetado la condición (A2) con respecto a las y de (II). Si podemos mostrar ahora que $\vdash F^*$, entonces utilizando el Lema 8a en la dirección inversa, se seguirá que $D_1^*, ..., D_l^* \vdash E^*$, como había de ser demostrado.

Según ello, considérese una demostración dada de F. En las fórmulas de esta demostración pueden ocurrir algunas letras predicativas distintas de (1). Sea (1′) la lista (1) incrementada para incluir esas letras; y sea (2′) la lista (2) del mismo modo incrementada, utilizando como formas nominales adicionales, fórmulas que no contengan variables anónimas.

Supóngase que fuésemos a sustituir (1′) por (2′) a lo largo de la demostración dada de F. Entonces podríamos razonar, exactamente como en la demostración de la regla de sustitución de letras proposicionales (Teorema 3 § 25), que la figura resultante sería una demostración de F*, salvo por dos contingencias.

Primera, la C, para una aplicación de la Regla 9 o de la 12, puede ser transformada por la sustitución en una fórmula C* que contenga libre la x de la aplicación, de suerte que la regla ya no sea aplicable. Lo cual puede suceder sólo si la x de la aplicación es una de las variables libres anónimas $z_1, ..., z_q$ de (2). Utilizando el Lema 17, podemos reemplazar la demostración dada de F por una demostración de una fórmula $\widetilde{F}$ congruente con F y que no contenga ligadas ninguna de las variables $z_1, ..., z_q$, y de este modo en la nueva demostración no hay aplicaciones de las Reglas 9 y 12 con respecto a $z_1, ..., z_q$.

Segunda, la t para una aplicación del Esquema Axiomático 10 u 11 puede, tras la sustitución, no estar libre con respecto a x en A (x), debido a la introducción de cuantificadores anónimos en las fórmulas (2) con variables que ocurran en la t. Elijamos fórmulas $(\widetilde{2}')$ congruentes con (2′) y que no contengan ligadas variables que ocurran libres o ligadas en ninguna fórmula de la demostración de $\widetilde{F}$.

Si sustituimos ahora (1′) por $(\widetilde{2}')$ en la demostración de $\widetilde{F}$, no podrá surgir ninguna contingencia; y así, denotando la sustitución de $(\widetilde{2}')$ por "†", la secuencia resultante de fórmulas será una demostración de $\widetilde{F}^\dagger$. Así $\vdash \widetilde{F}^\dagger$.

Mediante la elección de las variables ligadas en $(\widetilde{2}')$, la condición (A1) para la libertad es satisfecha en la sustitución de (1) por $(\widetilde{2})$ en $\widetilde{F}$. Y dado que $\widetilde{F}$ no contiene ligada ninguna de las variables libres anónimas $z_1, ..., z_q$ de (2), y por tanto de $(\widetilde{2})$, la condición (A2) es asimismo satisfecha. De este modo, la sustitución de (1) por $(\widetilde{2})$ en $\widetilde{F}$ es libre. También lo es la de (1) por (2) en F (como se observó anteriormente). De donde, por el Lema 16b, $\widetilde{F}^{\dagger}$ es congruente con F*; y por el Lema 15b, $\vdash \widetilde{F}^{\dagger} \sim F^*$. Lo cual con $\vdash \widetilde{F}^{\dagger}$ (y *18a) da $\vdash F^*$, como quedaba por mostrar.

EJEMPLO 7°. Demostraremos (Ejemplo 2 § 35) que

(a) $\vdash \mathcal{A} \vee \forall a B(a) \sim \forall a (\mathcal{A} \vee B(a))$. De donde por el Lema 15b,

(b) $\vdash \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x) \sim \forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x))$, donde x es cualquier variable. De donde por el Teorema 15, (c) $\vdash A \vee \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B(x))$, donde B(x) es cualquier fórmula, y A cualquier fórmula que no contenga libre a x (ya que de otro modo (A2) sería violada por el Supuesto (A)). Lo cual es *92 con las mismas estipulaciones que aparecen en el Teorema 17. De (b) inferimos fácilmente (d) $\mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x) \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)$ y (e) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x) \vdash^{x} \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)$. La sustitución de $\mathcal{A}$ por una fórmula A que contenga libre a x está permitida en (d), pero el Supuesto (B) la impide en (e).

Las situaciones que los supuestos de la regla de sustitución, o las estipulaciones en nuestras letras metamatemáticas, intentan impedir envuelven siempre una variable que ocurre tanto anónima como explícitamente. Una regla general que podría ser usada, en lugar de las más detalladas condiciones establecidas caso por caso, es simplemente que las variables anónimas sean distintas de las variables explícitas. Ello es, sin duda, algo más restrictivo de lo necesario, p. ej. las x ligadas anónimas en la A de *92 son claramente inocuas.

OBSERVACION 1. *Si* $\Gamma$, E *son fórmulas de letras predicativas en las letras predicativas* (1), *y* $\Gamma \vdash$ E, *entonces hay una deducción de* E *a partir de* $\Gamma$ *en* (*cada fórmula de*) *la cual no ocurren otras letras predicativas distintas de* (1). Porque en la deducción dada podemos sustituir $(1')$ por $(2')$, donde (2) es la misma que (1), y las formas nominales adicionales en $(2')$ contienen solamente a (1), p. ej. cada una de ellas puede ser $\forall x_1 ... \forall x_{n_1} P_1(x_1, ..., x_{n_1})$.

CONVERSA DE SUSTITUCION. Una fórmula $A(a_1, ..., a_n)$ será denominada una *forma nominal prima* (en las distintas variables $a_1, ..., a_n$), supuesto que (i) no tenga ninguna de las formas $A \supset B$, A & B, A $\vee$ B, $\neg$ A, $\forall x A(x)$ o $\exists x A(x)$, donde A y B son fórmulas, x es una variable, y A (x) es una fórmula, y (ii) contiene exactamente las variables $a_1, ..., a_n$. Se dirá que dos formas nominales primas $A_i(a_1, ..., a_{n_i})$ y $A_j(a_1, ..., a_{n_j})$ son distintas (en tanto que formas nominales primas), si $A_i(t_1, ..., t_{n_i})$ y $A_j(u_1, ..., u_{n_j})$ no son la misma fórmula para cualesquiera términos $t_1, ..., t_{n_i}, u_1, ..., u_{n_j}$. Por ejemplo, $a + a = b$ y $0 = a \cdot b$ son distintas, pero $a + a = b$ y $a = b \cdot c$ no lo son.

TEOREMA 16. CONVERSA DE SUSTITUCION DE LETRAS PREDICATIVAS. *Bajo las mismas estipulaciones que en el Teorema* 15, *sin los Supuestos* (A) *y* (B), *pero suponiendo en cambio que* (2) *son formas nominales primas distintas: Si* $D_1^*, ..., D_l^* \vdash E^*$, *entonces* $D_1, ..., D_l \vdash$ E.

Ello puede ser demostrado utilizando las mismas ideas que en el Teorema 4 (§ 25), y admitiendo igualmente una segunda versión.

REEMPLAZO DE LA FORMA NOMINAL. Utilizando la noción de ocurrencia de forma nominal indicada anteriormente (a continuación del Ejemplo 5), la teoría del reemplazo (Teorema 14 con *66, cfr. § 33 a continuación del Corolario 2) puede ser formulada así: $A(x_1,...,x_n) \sim B(x_1,...,x_n) \vdash^{x_1...x_n} C_{A(t_1,...,t_n)} \sim C_{B(t_1,...,t_n)}$, supuesto que las partes $A(t_1, ..., t_n)$ y $B(t_1, ..., t_n)$ constituyan ocurrencias de $A(x_1, ..., x_n)$ y $B(x_1, ..., x_n)$, respectivamente, como formas nominales en $x_1, ..., x_n$.

OBSERVACION 2. Resultados similares a los Teoremas 15 y 16 y la Observación 1 son válidos para variables individuales. Estableceremos sólo el siguiente. (a) *Si* $z_1, ..., z_q$ *son variables distintas que no ocurren ligadas en* $D(z_1, ..., z_q)$ *ni en* $E(z_1, ..., z_q)$, *y* $D(z_1, ..., z_q) \vdash E(z_1, ..., z_q)$ *con* $z_1, ..., z_q$ *mantenidas constantes, entonces hay una deducción de* $E(z_1, ..., z_q)$ *a partir de* $D(z_1, ..., z_q)$ *en la cual no ocurren ligadas* $z_1, ..., z_q$. DEMOSTRACIÓN, establecida para $q = 1$ y con exactamente una variable, y, variada. Por el Lema 8a, $\forall$-introd. (en z), y cambio a una nueva variable $\overline{z}$, $\forall \overline{z}[\forall y D(\overline{z}) \supset E(\overline{z})]$ es demostrable. Esta fórmula no contiene en absoluto a z. Por la definición de lo que constituye una demostración en el cálculo de predicados de una fórmula dada, no todas las variables en la fórmula están a la par. Hay por tanto una demostración de $\forall \overline{z}[\forall y D(\overline{z}) \supset E(\overline{z})]$ que no contiene a z. A partir de esta fórmula y $D(z)$, podemos deducir $E(z)$ por $\forall$-elim. (en z), $\forall$-introd. (en y) y $\supset$-elim. (b) *Sean* $z_1, ..., z_q$ *variables distintas que no ocurren ligadas en* $D(z_1, ..., z_q)$ *ni en* $E(z_1, ..., z_q)$; *y sean* $t_1, ..., t_q$ *términos primos distintos (esto es, símbolos individuales o variables) ninguno de los cuales ocurre en* $D(z_1, ..., z_q)$ *o en* $E(z_1, ..., z_q)$ *a menos que sea una de las* $z_1, ..., z_q$). *Entonces* $D(z_1, ..., z_q) \vdash E(z_1, ..., z_q)$ *con* $z_1, ..., z_q$ *mantenidas constantes, si y sólo si,* $D(t_1, ..., t_q) \vdash E(t_1, ..., t_q)$ *con (las variables incluidas)* $t_1, ..., t_q$ *mantenidos constantes.* Porque por (a), $z_1, ..., z_q, t_1, ..., t_q$ pueden ser eliminados como variables ligadas de la deducción dada, tras lo cual cada inferencia seguirá siendo válida al sustituir a lo largo de ella $z_1, ..., z_q$ por $t_1, ..., t_q$ o viceversa.

**§ 35. Equivalencias, dualidad, forma prenexa.** TEOREMA 17. *Si* x *e* y *son variables distintas*, A, B, A (x), B (x) *y* A (x, y) *son fórmulas*, A *y* B *no contienen a* x *libre y para* *79 *y* *80 *si* x *está libre con respecto a* y *en* A(x, y), *entonces*:

*75. $\vdash \forall x A \sim A$. *76. $\vdash \exists x A \sim A$.

*77. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y)$. *78. $\vdash \exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y)$.

*79. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x)$. *80. $\vdash \exists x A(x, x) \supset \exists x \exists y A(x, y)$.

*81. $\vdash \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$.

*82. $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$.

(Alteraciones de cuantificadores).

*83°. $\vdash \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$. *84°. $\vdash \forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x)$.

($\exists$ y $\forall$, cada uno en términos del otro y $\neg$).

*85°. $\vdash \neg\, \forall x A(x) \sim \exists x \neg\, A(x)$.

*86. $\vdash \neg\, \exists x A(x) \sim \forall x \neg\, A(x)$.

*87. $\vdash \forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x) \sim \forall x (A(x) \,\&\, B(x))$.

*88. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A(x) \vee B(x))$.

*89. $\vdash A \,\&\, \forall x B(x) \sim \forall x (A \,\&\, B(x))$.

*90. $\vdash A \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A \vee B(x))$.

*91. $\vdash A \,\&\, \exists x B(x) \sim \exists x (A \,\&\, B(x))$.

*92°. $\vdash A \vee \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B(x))$.

*93. $\vdash \exists x (A(x) \,\&\, B(x)) \supset \exists x A(x) \,\&\, \exists x B(x)$.

*94. $\vdash \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \vee B(x))$.

(Transferencia de $\neg$, & y $\forall$ a través de cuantificadores).

*83a. $\vdash \exists x A(x) \supset \neg\, \forall x \neg\, A(x)$.

*84a. $\vdash \forall x A(x) \supset \neg\, \exists x \neg\, A(x)$.

*85a. $\vdash \exists x \neg\, A(x) \supset \neg\, \forall x A(x)$.

*92a. $\vdash A \vee \forall x B(x) \supset \forall x (A \vee B(x))$.

(Resultados adicionales de interés para el sistema intuicionista).

*95. $\vdash \forall x (A \supset B(x)) \sim A \supset \forall x B(x)$.

*96. $\vdash \forall x (A(x) \supset B) \sim \exists x A(x) \supset B$.

*97°. $\vdash \exists x (A \supset B(x)) \sim A \supset \exists x B(x)$.

*98°. $\vdash \exists x (A(x) \supset B) \sim \forall x A(x) \supset B$.

*99°. $\vdash \exists x (A(x) \supset B(x)) \sim \forall x A(x) \supset \exists x B(x)$.

*97a. $\vdash \exists x (A \supset B(x)) \supset (A \supset \exists x B(x))$.

*98a. $\vdash \exists x (A(x) \supset B) \supset (\forall x A(x) \supset B)$.

*99a. $\vdash \exists x (A(x) \supset B(x)) \supset (\forall x A(x) \supset \exists x B(x))$.

(Transferencia de cuantificadores a través de $\supset$, con comparación de resultados clásicos e intuicionistas).

DEMOSTRACIONES, para el sistema clásico, de *75–*94, exceptuando *76, *78, *80, *88, *90, *92, *94. Se ahorra trabajo posponiendo estas siete hasta que se haya obtenido la dualidad (o para *80 y *94, la relación converso-dual). Entonces, *95–*99 se seguirán clásicamente, utilizando *59 (§27) con *88, *90, *92 y *85, *86.

*75 Si redesignamos a A como "A (x)", entonces puesto que A no contiene a x libre, A (t) es también A (x) (§ 18). El resultado se sigue, utilizando $\forall$-elim. y $\supset$-introd. (o el Esquema Axiomático 10), y $\forall$-introd. y $\supset$-introd. [x no es variada en la $\forall$-introd., puesto que A (x) no la contiene libre], y *16.

*79. 1. $\forall x \forall y A(x, y) \vdash A(x, x) \vdash^{x} \forall x A(x, x)$ – doble $\forall$-elim. (*65) [x, x es un par de términos libres con respecto a x, y en $A(x, y)$], $\forall$-introd.
2. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x)$– $\supset$-introd., 1 [x no es variada en 1 puesto que $\forall x \forall y A(x, y)$ no contiene libre a x].

*82. 1. $A(x, y) \vdash \exists x A(x, y) \vdash^{y} \forall y \exists x A(x, y)$ – $\exists$-introd., $\forall$-introd.
2. $\forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)$ – $\forall$-elim., 1.

3. $\exists x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)$ – $\exists$-elim., 2 [$\forall y \exists x A(x, y)$ no contiene libre a x, y ninguna variable es variada en 2, ya que y (cfr. 1) no ocurre libre en $\forall y A(x, y)$].
4. $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$ – $\supset$-introd., 3 [ninguna variable es variada en 3 (cfr. Lema 7b § 24)].

Obsérvese cómo el intento de dar una demostración correspondiente a la conversa de *82 (esto es de *82 con la dirección de $\supset$ invertida) queda frustrado por la restricción sobre el uso de deducción subsidiaria en el cálculo de predicados:

1. $A(x, y) \vdash^{y} \forall y A(x, y) \vdash \exists x \forall y A(x, y)$ – $\forall$-introd., $\exists$-introd.

2? $\exists x A(x, y) \vdash \exists x \forall y A(x, y)$ – $\exists$-elim., 1. Pero esto es ilegítimo ya que la regla de $\exists$-eliminación (en contraste con la regla de $\forall$-eliminación utilizada en el Paso 2 de *82) es una regla de deducción subsidiaria, que es aquí inaplicable porque en la deducción subsidiaria 1 la variable y es variada con respecto a la fórmula supuesta $A(x, y)$ a descargar (salvo si $A(x, y)$ no contiene a y libre).

No hay modo de sortear esta dificultad, de suerte que la conversa de *82 no será demostrable para una arbitraria $A(x, y)$. En términos de interpretación, la fórmula $\exists x \forall y A(x, y)$ dice que existe un x tal que para todo y, $A(x, y)$; y $\forall y \exists x A(x, y)$ dice meramente que para todo y existe algún x, no necesariamente el mismo x para diferentes y's, tal que $A(x, y)$. La distinción es familiar a los matemáticos por el ejemplo de convergencia uniforme frente a convergencia ordinaria de una secuencia de funciones $a_n(x)$ hacia una función límite $a(x)$ para un intervalo u otro rango $X$ de $x$. Utilizando el presente simbolismo lógico, y fluctuando las variables $p$, $n$ y $N$ sobre los números naturales, y $x$ sobre $X$, las propiedades de convergencia uniforme y convergencia ordinaria se expresan respectivamente por

$$\text{(i)} \qquad \forall p \exists N \forall x \forall n \quad (n > N \supset |a_n(x) - a(x)| < 1/2^p),$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall p \forall x \exists N \forall n \quad (n > N \supset |a_n(x) - a(x)| < 1/2^p).$$

Así pues, *82 dice que la convergencia uniforme implica la convergencia ordinaria; pero la conversa no es generalmente verdadera. (Similarmente en lo que respecta a continuidad uniforme y ordinaria).

Una demostración metamatemática de que $\forall b \exists a \mathcal{A}(a, b) \supset \exists a \forall b \mathcal{A}(a, b)$ es indemostrable en el cálculo de predicados, se dará en el Ejemplo 2 § 36.

*83. 1. $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash \neg A(x)$ – $\forall$-elim.

2. $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash A(x)$.

3. $A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ – $\neg$-introd., 1, 2 [ninguna variable de $\forall x \neg A(x)$ es variada en 1 ó 2].

4. $\exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ – $\exists$-elim., 3 [$\neg \forall x \neg A(x)$ no contiene a x libre, y ninguna variable es variada en 3].

5. $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ – $\supset$-introd., 4 [ninguna variable es variada en 4].

6. $\neg \exists x A(x), A(x) \vdash \exists x A(x)$ – $\exists$-introd.

7. $\neg \exists x A(x), A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$.

8. $\neg\, \exists x A(x) \vdash \neg\, A(x) \vdash^{x} \forall x \neg A(x)$ – $\neg$-introd., 6, 7 [ninguna variable es variada en 6, 7], $\forall$-introd.
9. $\vdash \neg\, \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$ – $\supset$-introd., 8 [x no ocurre libre en la fórmula supuesta $\neg\, \exists x A(x)$ de 8 que aquí se descarga].
10. $\vdash \neg\, \forall x \neg A(x) \supset \exists x A(x)$ – contraposición (*14), 9.
11. $\vdash \exists x A(x) \sim \neg\, \forall x \neg A(x)$ – &-introd. (*16), 5, 10.

*84. Véase Ejemplo 1 § 34.

*87. 1. $A(x), B(x) \vdash A(x) \,\&\, B(x) \vdash^{x} \forall x (A(x) \,\&\, B(x))$ – &-introd., $\forall$-introd.

2. $\forall x A(x), \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \,\&\, B(x))$ – $\forall$-elim. dos veces, 1.
3. $\forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \,\&\, B(x))$ – &-elim., 2.
4. $\vdash \forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \,\&\, B(x))$ – $\supset$-introd., 3 [ninguna variable es variada en 3, puesto que x (cfr. 1) no ocurre libre en $\forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x)$].
5. $A(x) \,\&\, B(x) \vdash A(x) \vdash^{x} \forall x A(x)$ – &-elim., $\forall$-introd.
6. $A(x) \,\&\, B(x) \vdash B(x) \vdash^{x} \forall x B(x)$ – &-elim., $\forall$-introd.
7. $A(x) \,\&\, B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x)$ – &-introd., 5, 6.
8. $\forall x (A(x) \,\&\, B(x)) \vdash \forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x)$ – $\forall$-elim., 7.
9. $\vdash \forall x (A(x) \,\&\, B(x)) \supset \forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x)$ – $\supset$-introd., 8 [ninguna variable es variada en 8, ya que x (cfr. 7) no ocurre libre en $\forall x (A(x) \,\&\, B(x))$].
10. $\vdash \forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x) \sim \forall x (A(x) \,\&\, B(x))$ – &-introd., 4, 9.

*89, *91, *93. Si leemos en lo que precede "A" por "A (x)" y "$\forall x A(x)$" , omitiendo una $\forall$-eliminación en el Paso 2 y la $\forall$-introducción en el Paso 5, resulta una demostración de *89. Sustituyendo entonces del principio al fin $\forall$ por $\exists$, obtenemos una demostración de *91. El lector puede introducir estas modificaciones y verificar que se satisfacen las condiciones relativas a las $\exists$-eliminaciones. Pero la sustitución de $\forall$ por $\exists$ en la demostración de *87 no es procedente. ¿Por qué? Por tanto se obtiene sólo *93 pero no la conversa.

A título de ulterior ejercicio, el lector puede acometer el intento de suministrar una demostración correspondiente de *92, y comprobar la frustración del mismo debido a la restricción sobre las deducciones subsidiarias. El resultado *92, que inferiremos a partir de *91 una vez que hayamos obtenido la dualidad, es interesante como ejemplo de una fórmula que no contiene $\neg$ pero que no se deja demostrar sin el Postulado 8.

En vista de *49b § 27, puede haber a lo sumo 18 (= 3 · 2 · 3) fórmulas no-equivalentes intuicionistamente, formadas a partir de A (x) por cuantificación de x y posible aplicación de la negación. (Primero usamos bien 0, 1 ó 2 $\neg$, luego o bien $\forall x$ ó $\exists x$, y luego de nuevo o bien 0, 1 ó 2 $\neg$).

COROLARIO. *Cada una de las cuatro tablas* I–IV *comprende fórmulas equivalentes entre sí en el cálculo de predicados clásico. Para cada tabla, en el sistema*

*intuicionista*: *Cada dos fórmulas no separadas por una línea son equivalentes. Cada fórmula implica cualquier fórmula bajo ella, esto es, la implicación que va de la una a la otra es demostrable. La doble negación de la implicación que va de cada fórmula a cualquier fórmula que no esté separada de ella por una doble línea es demostrable* (*y por tanto*, usando *49a y *25, *la doble negación de la equivalencia*). (Heyting 1946).

| I | | II | |
|---|---|---|---|
| a. | $\forall x A(x)$ | a. | $\exists x A(x)$ |
| b. | $\neg\neg\forall x A(x)$ | b. | $\exists x \neg\neg A(x)$ |
| $c_1$. | $\forall x \neg\neg A(x)$ | $c_1$. | $\neg\neg\exists x A(x)$ |
| $c_2$. | $\neg\neg\forall x \neg\neg A(x)$ | $c_2$. | $\neg\neg\exists x \neg\neg A(x)$ |
| $c_3$. | $\neg\exists x \neg A(x)$ | $c_3$. | $\neg\forall x \neg A(x)$ |

| III | | IV | |
|---|---|---|---|
| a. | $\exists x \neg A(x)$ | $a_1$. | $\forall x \neg A(x)$ |
| $b_1$. | $\neg\neg\exists x \neg A(x)$ | $a_2$. | $\neg\neg\forall x \neg A(x)$ |
| $b_2$. | $\neg\forall x \neg\neg A(x)$ | $a_3$. | $\neg\exists x \neg\neg A(x)$ |
| c. | $\neg\forall x A(x)$ | $a_4$. | $\neg\exists x A(x)$ |

DEMOSTRACIONES para la Tabla II, en el sistema intuicionista. $\vdash$ IIa $\supset$ IIb [*49a, *70]. $\vdash$ IIb $\supset$ $IIc_3$ [*85a]. $\vdash$ $IIc_3 \sim IIc_1$ [*86]. $\vdash$ $IIc_3 \sim \forall x \neg\neg\neg A(x)$ [*49b] $\sim IIc_2$ [*86]. $\vdash \neg\neg(IIc_2 \supset IIb)$ [*51b]. Igualmente, $\vdash \neg\neg(IIc_1 \supset IIa)$. De aquí $\vdash \neg\neg(IIb \supset IIa)$, por *24 con $\vdash$ IIb $\supset IIc_1$ y *49a.

TEOREMA 18°. *Sea* D *una fórmula de letras predicativas construida a partir de las distintas letras predicativas* $P_1(a_1, ..., a_{n_1}), ..., P_m(a_1, ..., a_{n_m})$ *y sus negaciones* $\neg P_1(a_1, ..., a_{n_1}), ..., \neg P_m(a_1, ..., a_{n_m})$ *utilizando únicamente los operadores* &, $\vee$, $\forall x$ *y* $\exists x$ (*para cualquier variable* x). *Entonces se obtiene una fórmula* $D^\dagger$ *equivalente a la negación* $\neg$ D *de* D *intercambiando, a todo lo largo de* D, & *por* $\vee$, $\forall$ *por* $\exists$, *y cada letra por su negación.*

*En otras palabras, si* D *es una tal fórmula de letras predicativas, y* $D^\dagger$ *es el resultado del intercambio descrito, realizado sobre* D: $\vdash \neg D \sim D^\dagger$.

EJEMPLO 1°. $\vdash \neg \exists a(\forall b \neg \mathcal{A}(b) \,\&\, (\neg \mathcal{B} \vee \exists c \quad C(a, c, b))) \sim$
$\forall a(\exists b \quad \mathcal{A}(b) \vee (\quad \mathcal{B} \,\&\, \forall c \neg C(a, c, b)))$.

La demostración se efectúa conforme al mismo método que en el Teorema 8 (§ 27), utilizando *85 y *86 para tratar los dos nuevos casos que surgen ahora bajo el paso inductivo. El teorema, como antes, admite una segunda versión.

COROLARIO°. *Una equivalencia entre dos fórmulas literales* E *y* F *del tipo descrito en el teorema se mantiene intercambiando a todo lo largo de* E *y de* F, & *por* $\vee$, *y* $\forall$ *por* $\exists$.

*En otras palabras, si* E *y* F *son dos fórmulas tales de letras predicativas, y* E′ *y* F′ *son los resultados del intercambio descrito, realizado sobre* E *y* F, *respectivamente: Si* $\vdash$ E $\sim$ F, *entonces* $\vdash$ E′ $\sim$ F′. (Principio de dualidad). *Además, si* $\vdash$ E $\supset$ F, *entonces* $\vdash$ E′ $\supset$ F′. (Relación converso-dual).

El corolario se sigue del teorema al igual que antes.

EJEMPLO 2°. Por *91, $\vdash \mathcal{A} \,\&\, \exists a \mathcal{B}(a) \sim \exists a (\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}(a))$. De ahí por dualidad, $\vdash \mathcal{A} \vee \forall a \mathcal{B}(a) \sim \forall a (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(a))$. De ahí *92, como en el Ejemplo 7 § 34.

Similarmente, obtenemos *76, *78, *88, *90, como duales de *75, *77, *87, *89 y *80, *94 como converso-duales de *79, *93, respectivamente. (Obsérvese que tanto *81 como *82 son auto-converso-duales).

TEOREMA 19°. *Dada cualquier fórmula* C, *puede hallarse una fórmula* D (llamada *forma prenexa de* C) *con las dos propiedades siguientes. La fórmula* C *es equivalente a* D, *esto es,* $\vdash$ C $\sim$ D. *En* D, *todos los cuantificadores (si los hay) están al frente, esto es, todos los demás símbolos lógicos* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ *(si los hay) están dentro del alcance de todo cuantificador* (decimos que una tal fórmula es *prenexa*).

DEMOSTRACION. Para reducir una fórmula C a forma prenexa, podemos sacar paso por paso, mediante aplicaciones de *85, *86, *89–*92, *95–*98, todos los cuantificadores fuera de los alcances de los símbolos lógicos $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, observando lo siguiente. En caso de que la fórmula a la que se hayan de aplicar *89–*92, *95–*98 no satisfaga la condición de que la A o la B no contengan a x libre, puede hacerse un cambio de las variables ligadas por *73 o *74. En el caso de que la A relativa a *89–*92 no esté en el lado que convenga de & o de $\vee$, puede usarse *33 o *34. (Este procedimiento de reducción a forma prenexa no requiere el uso de *87, *88, ni *99; pero en cualquier punto donde uno de ellos pueda ser aplicado, el uso del mismo ahorrará pasos y conducirá a una forma prenexa más corta)

Para demostrar que el procedimiento llega a término, podemos utilizar como número de inducción el número de instancias en que se encuentre un cuantificador dentro del alcance de un $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, esto es, el número total de pares, uno de cuyos miembros sea un $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, y siendo el otro un cuantificador que esté dentro del alcance de aquel miembro. Si este número no es 0, ha de haber algún caso donde no haya ningún símbolo lógico de alcance intermedio. Entonces se lleva a cabo un paso que remueve esta instancia, dejando las restantes inalteradas, de modo que el número de inducción se reduzca en uno. (Si se usan *87, *88, o *99, el número de inducción se reduce en dos o más).

EJEMPLO 3°. Las fórmulas numeradas que siguen son sucesivamente equivalentes, cada una a la siguiente, por reemplazos basados en las equivalencias citadas a la derecha. La última fórmula es una forma prenexa de la primera, o incluso de cualquier fórmula de la lista.

1. $[\neg \exists a \mathcal{A}(a) \vee \forall a \mathcal{B}(a)] \,\&\, [C \supset \forall a \mathcal{D}(a)]$.
2. $[\forall a \neg \mathcal{A}(a) \vee \forall a \mathcal{B}(a)] \,\&\, \forall a [C \supset \mathcal{D}(a)]$ – *86, *95.

3. $\forall a\,[\forall a \neg \mathcal{A}(a) \vee B(a)] \& \forall a\,[C \supset D(a)]$ – *92.
4. $\forall a\,[\forall b \neg \mathcal{A}(b) \vee B(a)] \& \forall a\,[C \supset D(a)]$ – *73.
5. $\forall a \forall b\,[\neg \mathcal{A}(b) \vee B(a)] \& \forall a\,[C \supset D(a)]$ – *34, *92.
6. $\forall a\,\{\forall b\,[\neg \mathcal{A}(b) \vee B(a)] \& [C \supset D(a)]\}$ – *87.
7. $\forall a \forall b\,\{[\neg \mathcal{A}(b) \vee B(a)] \& [C \supset D(a)]\}$ – *33, *89.

§ 36. **Evaluación, consistencia.** El cálculo de predicados pretende ser una formalización de principios de lógica de predicados que valgan independientemente del número de elementos en el dominio objeto, siempre que haya por lo menos un elemento (§ 31). Por lo tanto, si especificamos que el número es $k$, donde $k$ es cualquier número entero $\geq 1$, las fórmulas demostrables deberán ser todas verdaderas. Se puede combinar esta idea con la utilizada en § 28, donde abstraíamos a partir de proposiciones verdaderas y falsas para obtener dos objetos aritméticos t y f. Esto hace pensar en un procedimiento de evaluación finitista, que nos permitirá establecer metamatemáticamente la consistencia del cálculo de predicados.

En el procedimiento de evaluación, una fórmula de letras predicativas se considera como representante de una función de las variables libres individuales y de las letras predicativas (incluyendo las letras proposicionales) que contiene, o posiblemente de esas y también de otras variables libres y letras predicativas. Entonces cuando definamos la noción que haya de corresponder a la verdad idéntica en el cálculo proposicional, exigiremos que las fórmulas demostrables en el cálculo sean verdaderas sea cual sea el predicado que cada letra predicativa represente, y también, en vista de la interpretación de la generalidad de las variables individuales libres (§ 32), sea cual sea el objeto del dominio de objetos que cada variable individual libre represente.

Después de elegir un determinado entero positivo $k$ como el número de objetos distintos en el dominio de objetos, es irrelevante para el procedimiento de evaluación lo que los objetos mismos sean. Es conveniente el tomarlos (o llamarlos) por los números 1, ..., $k$. Estos números van a ser los valores que tomen las variables individuales.

Como anteriormente (§ 28), las letras proposicionales (esto es, letras para predicados de 0 variables) toman los valores t, f.

Considérense ahora las letras predicativas. Para cualquier entero dado $n > 0$, una letra predicativa con $n$ variables anejas difiere de una letra proposicional, bajo la interpretación lógica del sistema, en que representa no una proposición sino una función proposicional de $n$ variables, es decir, una función que toma a una proposición como valor para cada conjunto de valores de las variables anejas (§ 31). Los valores que en nuestro procedimiento de evaluación damos a una letra predicativa con $n$ variables anejas, cuando las proposiciones son reemplazadas por t y f, no serán en consecuencia t, o f, sino más bien funciones de $n$ variables cada una sobre el dominio $\{1, ..., k\}$ que toman valores en el dominio $\{t, f\}$. Hay exactamente $2^{k^n}$ diferentes funciones tales. Las llamamos las *funciones lógicas* de $n$ variables sobre el dominio de $k$ objetos. Los valores de verdad t, f, que utilizamos en el caso de que $n = 0$, pueden ser considerados como las 2 $(= 2^{k^0})$ funciones lógicas de 0 variables.

Como anteriormente, interpretamos $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ como funciones fijas sobre el dominio de dos objetos $\{t, f\}$ que toman valores en el mismo dominio, definido

por las tablas previamente dadas (§ 28). Ahora interpretamos $\forall$ y $\exists$ como funciones fijas sobre las funciones lógicas de una variable que toman valores del dominio $\{t, f\}$, donde la variable x en $\forall x$ o $\exists x$ indica de qué variable individual ha de considerarse el operando como función lógica. Estas dos funciones lógicas fijas se definen del siguiente modo. Para una función lógica dada A (x), el valor de $\forall x A(x)$ es t, si A (x) tiene el valor t para cada valor de x en el dominio $\{1, ..., k\}$; de otro modo, el valor es f. El valor de $\exists x A(x)$ es t, si A (x) tiene el valor de t para algún valor de x en el dominio $\{1, ..., k\}$; y de otro modo el valor es f.

Dada una fórmula de letras predicativas, estamos ahora en posición de computar una tabla que exprese los valores, que la fórmula representa, de la función, de las distintas variables individuales libres y letras predicativas que en ella ocurren (o de esas y de otras variables y letras). Para la tabulación, será conveniente primero alistar en algún orden determinado las funciones lógicas que se requerirán como valores de las letras predicativas, y el introducir símbolos que las representen.

EJEMPLO 1. Para $k = 2$, construyamos la tabla para la fórmula de letras predicativas $\forall a(\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a)) \vee (\neg \mathcal{A}(b) \,\&\, \mathcal{B})$, exactamente con respecto a las variables libres y letras predicativas contenidas en ella. Esta fórmula representa entonces una función de tres variables, esto es $b$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}(a)$ donde $a$ es la variable aneja de la forma nominal usada para $\mathcal{A}$, siendo ésta una letra predicativa con una variable (cfr. § 31). Antes de construir la tabla para la fórmula, introduciremos notaciones para las funciones lógicas de una variable, que serán empleadas como valores de la variable $\mathcal{A}(a)$. Puesto que $k=2$, hay 4 $(=2^{2^1})$ de ellas, $I_1(a)$, $I_2(a)$, $I_3(a)$, $I_4(a)$, definidas por la siguiente tabla de sus valores.

FUNCIONES LOGICAS DE UNA VARIABLE EN UN DOMINIO DE DOS OBJETOS

| Valor de la variable independiente | Correspondiente valor de la función respectiva | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $I_1(a)$ | $I_2(a)$ | $I_3(a)$ | $I_4(a)$ |
| 1 | t | t | f | f |
| 2 | t | f | t | f |

La tabla para la fórmula dada es tal como se muestra ahora (seguirá la computación de una entrada simple).

| Valor de la respectiva variable independiente | | | Correspondiente valor de la función |
|---|---|---|---|
| $b$ | $\mathcal{B}$ | $\mathcal{A}(a)$ | $\forall a(\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a)) \vee (\neg \mathcal{A}(b) \,\&\, \mathcal{B})$ |
| 1 | t | $I_1(a)$ | t |
| 1 | t | $I_2(a)$ | f |
| 1 | t | $I_3(a)$ | t |
| 1 | t | $I_4(a)$ | t |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | f | $I_1(a)$ | t |
| 1 | f | $I_2(a)$ | t |
| 1 | f | $I_3(a)$ | t |
| 1 | f | $I_4(a)$ | t |
| 2 | t | $I_1(a)$ | t |
| 2 | t | $I_2(a)$ | t |
| 2 | t | $I_3(a)$ | f |
| 2 | t | $I_4(a)$ | t |
| 2 | f | $I_1(a)$ | t |
| 2 | f | $I_2(a)$ | t |
| 2 | f | $I_3(a)$ | t |
| 2 | f | $I_4(a)$ | t |

Damos ahora la computación para el segundo valor (línea 2 de la tabla). A este fin cuando lleguemos a la $\forall$-operación, necesitaremos que en la tabla de $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a)$, $\mathcal{B}$ tenga el valor de t y $\mathcal{A}(a)$ el valor de $I_2(a)$. Damos primero esta tabla (a continuación su computación).

| Valor de la variable independiente $a$ | Correspondiente valor de la función $t \supset I_2(a)$ |
|---|---|
| 1 | t |
| 2 | f |

En esta tabla subsidiaria las computaciones de los dos valores, utilizando la tabla dada al principio para $I_2(a)$ y la tabla para $\supset$ de § 28, son los siguientes:

$$\begin{array}{l} t \supset I_2(a) \\ t \supset I_2(1) \\ t \supset \ t \\ \quad t \end{array} \qquad \begin{array}{l} t \supset I_2(a) \\ t \supset I_2(2) \\ t \supset \ f \\ \quad f \end{array}$$

Volvemos ahora a la cuestión original de computar la entrada para la segunda línea de la tabla de $\forall a\,(\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a)) \vee (\neg \mathcal{A}(b) \,\&\, \mathcal{B})$, es decir, el valor de esta fórmula cuando $b$ tiene el valor 1, $\mathcal{B}$ el valor t y $\mathcal{A}(a)$ el valor $I_2(a)$. Empezamos así.

$$\forall a\,(\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a)) \vee (\neg\ \mathcal{A}(b) \,\&\, \mathcal{B})$$
$$\forall a\,(t \supset I_2(a)) \vee (\neg\ I_2(1) \,\&\, t)$$

Puesto que la columna de valores de la tabla para $t \supset I_2(a)$ no tiene sólo t, podemos reemplazar $\forall a\,(t \supset I_2(a))$ por f bajo la interpretación dada para $\forall$, y también podemos reemplazar $I_2(1)$ por su valor t de la tabla para $I_2(a)$, así.

$$\begin{array}{l} \mathfrak{f} \vee (\neg \mathfrak{t} \,\&\, \mathfrak{t}) \\ \mathfrak{f} \vee (\mathfrak{f} \,\&\, \mathfrak{t}) \\ \mathfrak{f} \vee \quad \mathfrak{f} \\ \quad \mathfrak{f} \end{array}$$

El lector puede comprobar que entiende el procedimiento calculando otras entradas, en nuestra tabla para $\forall a\,(\mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a)) \vee (\neg\, \mathcal{A}(b) \,\&\, \mathcal{B})$. Obviamente, lo usual es recurrir a atajos que pueden ser utilizados para determinar la tabla de una fórmula, de manera que no sea necesario efectuar todo el procedimiento de cálculo por separado para cada entrada de la tabla (p. ej. aquí podemos reconocer al punto que las ocho entradas para las cuales $\mathcal{B}$ es $\mathfrak{f}$ son $\mathfrak{t}$ ). Pero este cálculo ilustra la definición, que está a la base, de la función representada por una fórmula de letras predicativas para un entero positivo dado $k$.

Si, para un $k$ dado, la columna de valores de la tabla para una fórmula de letras predicativas –tal como una función de determinadas variables libres y letras predicativas que incluyen todo lo contenido en ellas–, contiene solamente $\mathfrak{t}$, decimos que la fórmula es *k-idéntica* o *válida en un dominio de k objetos.* Si contiene algunas $\mathfrak{t}$, se dice que la fórmula es *satisfacible en un dominio de k objetos.*

Como anteriormente (§28), si es $k$-idéntica (o satisfacible en un dominio de $k$ objetos) para la lista mínima de variables libres y letras predicativas, entonces lo es para cualquier otra lista, e inversamente. Por lo tanto puede omitirse de nuevo la referencia a la lista.

Si las columnas de valores de las tablas para dos fórmulas de letras predicativas consideradas como funciones de justamente aquellas variables libres y letras predicativas contenidas en cualquiera de las dos (o también de cualesquiera otras) son iguales, se dice que esas dos fórmulas son *k-iguales.*

TEOREMA 20. *Para cada entero fijo* $k$ $(k \geq 1)$: *Una condición necesaria para que una fórmula de letras predicativas* E *sea demostrable* (*o deducible a partir de fórmulas* $\Gamma$ *k-idénticas*) *en el cálculo de predicados es que* E *sea k-idéntica.*

DEMOSTRACION. El teorema se sigue de dos lemas, que se corresponden con los del Teorema 9, pero que ahora se refieren a la lista de postulados del cálculo de predicados, fórmulas de letras predicativas y la $k$-identidad. El razonamiento ya dado en cuanto a los postulados del Grupo A1 se aplica también en lo esencial a la presente situación, y con respecto a los cuatro postulados del Grupo A2, mostramos el tratamiento de dos.

ESQUEMA AXIOMATICO 10. Un axioma por este esquema es $\forall x A(x) \supset A(t)$, donde el término t, en cuanto al cálculo de predicados puro, es simplemente una variable, y esta variable t está libre con respecto a x en A(x).

La variable t puede ser la misma o distinta de x, y x puede ocurrir libre o no en A(x).

Hemos de mostrar que $\forall x A(x) \supset A(t)$ toma el valor $\mathfrak{t}$, para cada asignación de funciones lógicas como valores de las letras predicativas, y de los objetos $1, \ldots, k$ como valores de las variables libres contenidas en $\forall x A(x) \supset A(t)$.

Considérese una asignación particular tal. Si los valores asignados son dados a las letras predicativas y variables libres de A(x), excepto a la variable x (si x ocurre

libre en A(x)), entonces A(x) representa una función lógica de la variable x (tanto si x ocurre libre en A(x) como si no).

Puesto que t está libre con respecto a x en A(x), en la secuencia de símbolos A(t) las ocurrencias libres de t ocupan las posiciones que en A(x) son ocupadas por ocurrencias libres de t o de x. Por lo tanto el valor de la función lógica representada por A(x), cuando x toma como valor el valor asignado de t, es el valor de A(t) para la asignación particular bajo consideración.

Se presentan ahora dos casos:

CASO 1: la función lógica representada por A(x) tiene solamente t como valores. Entonces el valor de A(t), que es uno de esos valores, es t. Por lo tanto, a partir de la tabla de evaluación para $\supset$ (§ 28), $\forall x A(x) \supset A(t)$ tiene el valor t.

CASO 2: la función lógica representada por A(x) tiene algunas f en su columna de valores. Entonces, por la definición del proceso de evaluación para $\forall$, la fórmula $\forall x A(x)$ tiene el valor f; y de nuevo $\forall x A(x) \supset A(t)$ tiene el valor t.

REGLA 12. La premisa es $A(x) \supset C$, y la conclusión es $\exists x A(x) \supset C$, donde C no contiene a x libre.

Tenemos como hipótesis que $A(x) \supset C$ toma el valor t para cada asignación de funciones lógicas como valores de las letras predicativas y de los objetos $1, \ldots, k$ como valores de las variables libres, contenidas en $A(x) \supset C$. Hemos de mostrar ahora lo mismo respecto a $\exists x A(x) \supset C$.

Considérese una asignación particular para $\exists x A(x) \supset C$, únicamente en cuanto a las letras predicativas y variables libres que contiene. Puesto que $\exists x A(x) \supset C$ no contiene a x libre, no incluye una asignación para x.

Si se dan ahora los valores asignados a las letras predicativas y variables libres de A(x), excepto a x (si x ocurre libre en A(x)), entonces A(x) representa una función lógica de la variable x.

CASO 1: La función lógica representada por A(x) tiene algunas t en su columna de valores. Elíjase un valor de x que corresponda a una de esas t; y considérese la asignación dada para $\exists x A(x) \supset C$, junto con este valor de x, como una asignación para $A(x) \supset C$. Entonces A(x) tiene el valor t; por hipótesis $A(x) \supset C$ tiene el valor t; y por lo tanto, por la tabla de evaluación para $\supset$, C tiene el valor t. Puesto que C no contiene a x libre, este valor de C está a la base de la asignación dada para $\exists x A(x) \supset C$, independientemente del valor de x. Por tanto, por la tabla de evaluación de $\supset$, $\exists x A(x) \supset C$ toma el valor t respecto a la asignación dada.

CASO 2: La función lógica representada por A(x) tiene solamente f como valores. Entonces $\exists x A(x)$ tiene el valor f; y por lo tanto $\exists x A(x) \supset C$ tiene el valor t.

EJEMPLO 1 (conclusión). $\forall a (B \supset \mathcal{A}(a)) \vee (\neg \mathcal{A}(b) \,\&\, B)$ no es $k$-idéntica, puesto que su columna de valores contiene f, y por lo tanto es indemostrable en el cálculo de predicados.

EJEMPLO 2. Para $k = 2$, cuando $\mathscr{A}(a, b)$ toma como valor la función lógica $\mathfrak{l}(a, b)$ tal que $\mathfrak{l}(1, 1) = \mathfrak{l}(2, 2) = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}(1, 2) = \mathfrak{l}(2, 1) = \mathfrak{f}$, la fórmula $\forall b \exists a \mathscr{A}(a, b) \supset \exists a \forall b \mathscr{A}(a, b)$ toma el valor $\mathfrak{f}$, y por lo tanto es indemostrable.

COROLARIO 1. *Para cada número entero* $k \geq 1$, *una condición necesaria para que dos fórmulas de letras predicativas* E *y* F *sean equivalentes, es que sean k-iguales, esto es, si* $\vdash$ E $\sim$ F, *entonces* E *y* F *son k-iguales.*

EJEMPLO 3. Para $k = 2$, con $\mathfrak{l}_1(a)$, $\mathfrak{l}_2(a)$, $\mathfrak{l}_3(a)$, $\mathfrak{l}_4(a)$ como en el Ejemplo 1, tenemos las siguientes tablas para las fórmulas que encabezan I–IV en el Corolario del Teorema 17 escritas con una variable y letra predicativa particular. De ahí que no haya dos entre las cuatro que sean equivalentes.

| $\mathscr{A}(a)$ | $\forall a \mathscr{A}(a)$ | $\exists a \mathscr{A}(a)$ | $\exists a \neg \mathscr{A}(a)$ | $\forall a \neg \mathscr{A}(a)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{l}_1(a)$ | $\mathfrak{t}$ | $\mathfrak{t}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ |
| $\mathfrak{l}_2(a)$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{t}$ | $\mathfrak{t}$ | $\mathfrak{f}$ |
| $\mathfrak{l}_3(a)$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{t}$ | $\mathfrak{t}$ | $\mathfrak{f}$ |
| $\mathfrak{l}_4(a)$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{t}$ | $\mathfrak{t}$ |

COROLARIO 2. *El cálculo de predicados es (simplemente) consistente, es decir, para ninguna fórmula* A, *a la vez* $\vdash$ A *y* $\vdash \neg$ A.

DEMOSTRACION. Si A es una fórmula de letras predicativas, entonces, para cada $k$, A y $\neg$ A no pueden ser las dos $k$-idénticas. (Aquí hubiera bastado haber demostrado el teorema para cualquier $k$ fijo. En la demostración original de Hilbert y Ackermann 1928, $k = 1$). En cuanto al otro sentido de fórmula, la consistencia se sigue por la conversa de la regla de sustitución (Teorema 16 § 34).

* § 37. **Lógica de predicados de teoría de conjuntos, *k*-transformaciones.** Las funciones lógicas utilizadas en el procedimiento de evaluación para un $k$ finito dado son objetos finitos, en el sentido de que cada uno está representado por una tabla que tiene un número finito de entradas.

Similarmente puede establecerse la noción de una función lógica de $n$ variables para el caso en que el dominio de objetos tenga un número infinito de elementos, pero con la diferencia de que las funciones no pueden ser descritas con tablas finitas. Por consiguiente podemos definir las nociones de *validez* y de *satisfacibilidad*, en un dominio de objetos dado no-vacío. Claramente, sólo el número cardinal del dominio de objetos es lo que importa para tal fin, y no lo que los elementos mismos sean.

Entonces, por medio de un razonamiento igual que en la demostración del Teorema 20, podemos mostrar que toda fórmula de letras predicativas demostrable es válida en todo dominio de objetos no vacío. En la demostración de ello para el caso de un dominio infinito, el razonamiento empleado no es ya finitista. Aparece un paso no-finitista, por ejemplo, en el tratamiento del Esquema Axiomático 10, donde distinguimos dos casos según que todos los valores de una cierta función sean $\mathfrak{t}$ o algunos sean $\mathfrak{f}$, cayendo ahora bajo consideración un número infinito de valores. Lo cual constituye una aplicación de la ley de tercio excluso respecto a un conjunto infinito (§ 13). De hecho, la noción misma de validez, para el caso

de un dominio infinito y una fórmula que contenga una letra predicativa con $n > 0$ variables anejas, no es finitista. Porque requiere que el valor de una función sea t para todas las funciones lógicas de $n$ variables como valores de esa letra predicativa; y la clase de esas funciones lógicas es no-enumerable, y por tanto sólo concebible (como usualmente pensamos) en términos del infinito completo.

El resultado de que toda fórmula literal demostrable del cálculo de predicados es válida en todo dominio de objetos no-vacío, no pertenece por tanto a la metamatemática (cfr. § 15). Pertenece más bien a lo que puede ser llamado *lógica de predicados de teoría de conjuntos* (Hilbert-Bernays 1934 pág. 125), que tiene de común con la metamatemática que hace objeto de estudio al formalismo lógico, pero difiere de ella en no restringirse en el estudio a métodos finitistas. Aun cuando nuestro principal cometido es la metamatemática, las concepciones extrametamatemáticas y resultados de lógica de predicados de teoría de conjuntos pueden tener valor heurístico, esto es, pueden sugerirnos qué es lo que podemos esperar descubrir en la metamatemática.

Nuestro éxito en la demostración de la consistencia del cálculo de predicados (Teorema 20 Corolario 2) proviene del hecho de que era posible adecuar una interpretación finitista a las fórmulas del cálculo, a saber, la interpretación de la validez en un dominio finito determinado (es decir, $k$-identidad). Pero ello no corresponde a la interpretación usual del cálculo, al cual más bien corresponde la validez en un dominio no-vacío arbitrario.

Sobre la base del resultado de la teoría de conjuntos de que toda fórmula demostrable es válida en todo dominio no-vacío, veremos ahora heurísticamente que la totalidad de las condiciones necesarias dadas por el Teorema 20, o sea, la propiedad de ser $k$-idéntica para todo $k$ finito, es insuficiente en lo que respecta a la demostrabilidad.

Ello será una consecuencia del hecho de que un sistema axiomático formal (cfr. § 8) acerca de un conjunto $D$ de elementos que requiere que $D$ sea infinito, puede ser expresado por una fórmula de letras predicativas. Para facilitar la idea, daremos primero los axiomas como tres fórmulas en nuestro simbolismo lógico, pero utilizando el símbolo de predicado $<$ para sugerir que son axiomas respecto a una relación de orden:

$$\neg\, a < a, \qquad a < b \,\&\, b < c \supset a < c, \qquad \exists b\,(a < b).$$

Estas son propiedades de orden que se satisfacen (en el viejo sentido intuitivo (§8)) cuando el dominio de elementos es el conjunto de los números naturales, y $<$ es la relación usual de orden para ellos. Fácilmente se ve que no pueden ser satisfechos en cualquier dominio finito no-vacío de elementos. (Los detalles se dejan al lector).

Expresemos ahora el sistema axiomático como una fórmula de letras predicativas, utilizando $\mathcal{A}(a, b)$ en lugar de $a < b$, y además utilizando solamente variables ligadas:

$$\forall a \neg\, \mathcal{A}(a, a) \,\&\, \forall a \forall b \forall c\, [\mathcal{A}(a, b) \,\&\, \mathcal{A}(b, c) \supset \mathcal{A}(a, c)] \,\&\, \forall a \exists b \mathcal{A}(a, b).$$

Esta fórmula, llámese "F", no es satisfacible (en el nuevo sentido de la teoría de conjuntos) en un dominio de $k$ objetos, para ningún $k > 0$ finito, pero es satisfacible en el dominio enumerable de los números naturales. Su negación, $\neg$ F es entonces válida en un dominio de $k$ objetos para todo $k$ finito, es decir, es $k$-idéntica para todo $k$ finito, pero no es válida en el dominio enumerable. Así $\neg$ F cumple

la totalidad de las condiciones necesarias del Teorema 20, pero no puede ser demostrable en el cálculo de predicados, debido al resultado de la teoría de conjuntos de que toda fórmula demostrable es válida en todo dominio no-vacío. Este ejemplo $\neg$ F y otros son dados en Hilbert-Bernays 1934, págs. 123-124.

En términos de la interpretación de la teoría de conjuntos, la completud del cálculo de predicados debería significar que toda fórmula de letras predicativas que es válida en todo dominio no vacío, debería ser demostrable. Esta interpretación no es finitista, a diferencia de la interpretación correspondiente para el cálculo proposicional (§§ 28, 29), y así el correspondiente problema de completud no pertenece a la metamatemática. Estas observaciones sugieren que la situación, cuando llegamos a la cuestión de completud y al problema de decisión, no es tan simple como la del cálculo proposicional. Volveremos a estos problemas en un capítulo posterior sobre el cálculo de predicados, donde serán presentados diversos resultados, en parte metamatemáticos, y en parte extraídos, variadamente, de la teoría de conjuntos (Capítulo XIV).

Para ulterior referencia, resumimos nuestras conclusiones actuales en un teorema y corolario, que marcamos con la letra "c" para mostrar que no pertenecen a nuestra secuencia de teoremas metamatemáticos, sino que se establecen aquí sólo mediante el uso de métodos clásicos no finitistas. Aunque estamos utilizando "teoría de conjuntos" para el presente tipo de lógica de predicados, algunos de los resultados lo son sólo en el nivel de la teoría de números clásica; p. ej. mientras que el Teorema 21 en su total generalidad envuelve conjuntos de números cardinales arbitrariamente altos, el corolario puede ser inferido también a partir de una especialización del Teorema 21 relativa al dominio enumerable de los números naturales y la clase enumerable de las funciones lógicas que son expresables por el uso del simbolismo lógico aplicado a $<$ (donde $a < b$ es t o f, según que $a$ sea un número natural menor que $b$ o no).

TEOREMA 21$^c$. *En todo dominio de objetos no vacío: Toda fórmula de letras predicativas que es demostrable (o deducible a partir de fórmulas válidas) en el cálculo de predicados, es válida.*

COROLARIO$^c$. *Para que una fórmula de letras predicativas sea demostrable en el cálculo de predicados, no es suficiente (en general) que la fórmula sea k-idéntica para todo entero positivo k.*

ANALOGIA ENTRE $\forall$, $\exists$ Y &, $\vee$. Cuando es interpretada en un dominio finito de $k$ objetos 1, ..., $k$, la fórmula $\forall x A(x)$ es sinónima de A (1) & ... & A ($\boldsymbol{k}$), y $\exists x A(x)$ de A (1) $\vee$ ... $\vee$ A ($\boldsymbol{k}$), donde 1, ..., $\boldsymbol{k}$ son nombres de los objetos en el sistema formal. Esto sugiere un acercamiento ligeramente distinto a los resultados de la sección anterior, a partir del cual obtendremos un resultado metamatemático intermedio de cierto interés en sí mismo. (Para el caso de $k = 2$, cfr. Hilbert-Ackermann 1928, págs. 66-68).

Consideraremos que 1, 2, ..., $\boldsymbol{k}$ son las expresiones formales $0'$, $0''$, ..., $0'\cdots'$ (teniendo la última $\boldsymbol{k}$ acentos) a las que llamamos *numerales de* 1 *a* $\boldsymbol{k}$. (Igualmente bien cumpliría, sin embargo, nuestro propósito la utilización de $k$ símbolos individuales).

Definimos una *fórmula de letras predicativas con k individuos*, o brevemente una *fórmula literal k-predicativa*, permitiendo que los términos de la Cláusula 1

de la definición de fórmula de letras predicativas en § 31, incluyan ahora, además de las variables, los numerales de 1 a $\boldsymbol{k}$; al cálculo de predicados con esta noción de fórmula lo denominamos *cálculo de predicados con k individuos*, o brevemente, *el cálculo k-predicativo*.

Entonces definimos una *fórmula literal k-proposicional* o bien como una fórmula literal *k*-predicativa que no contiene ninguna variable libre o ligada (y por tanto ningún cuantificador), o equivalentemente, permitiendo que las fórmulas de la Cláusula 1 de la definición de fórmula de letras proposicionales (§ 25) incluyan no sólo las letras proposicionales, sino, ahora también, las expresiones que resultan de las letras predicativas al sustituir cada una de sus variables anejas por los numerales de 1 a $\boldsymbol{k}$, p. ej. para $k=2$, $\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(2), B(1), \mathcal{A}(1,1), \mathcal{A}(1,2), \mathcal{A}(2,1)$.

Una conveniente forma abreviada de escribir esto último, por igual orden, es la siguiente, "$\mathcal{A}_1$", "$\mathcal{A}_2$", "$B_1$", "$\mathcal{A}_{11}$", "$\mathcal{A}_{12}$", "$\mathcal{A}_{21}$", de modo que en realidad solamente aumentamos la lista original de letras proposicionales añadiéndole las mismas letras alfabéticas con números finitos de enteros positivos $\leq k$ suscritos. Nuestra teoría original para el cálculo proposicional puro, será obviamente, aplicable sin cambio alguno, si ahora se tratan como letras proposicionales distintas las letras que difieran o bien alfabéticamente, o en sus suscritos.

Dada cualquier fórmula literal *k*-predicativa cerrada, definimos sus *k-transformaciones* como la fórmula literal *k*-proposicional que resulta de ella al reemplazar sucesivamente cada parte de la forma $\forall x A(x)$ donde $A(x)$ es una fórmula literal *k*-predicativa por $A(1) \,\&\, \ldots \,\&\, A(\boldsymbol{k})$, y de igual modo cada parte $\exists x A(x)$ por $A(1) \vee \ldots \vee A(\boldsymbol{k})$, hasta que todos los cuantificadores sean eliminados. Es fácil ver que el orden de los reemplazos no afecta el resultado.

EJEMPLO 1. La 2-transformación de $\forall b \exists a \mathcal{A}(a,b) \supset \exists a \forall b \mathcal{A}(a,b)$ es $(\mathcal{A}(1,1) \vee \mathcal{A}(2,1)) \,\&\, (\mathcal{A}(1,2) \vee \mathcal{A}(2,2)) \supset (\mathcal{A}(1,1) \,\&\, \mathcal{A}(1,2)) \vee (\mathcal{A}(2,1) \,\&\, \mathcal{A}(2,2))$, o brevemente

$$(\mathcal{A}_{11} \vee \mathcal{A}_{21}) \,\&\, (\mathcal{A}_{12} \vee \mathcal{A}_{22}) \supset (\mathcal{A}_{11} \,\&\, \mathcal{A}_{12}) \vee (\mathcal{A}_{21} \,\&\, \mathcal{A}_{22}).$$

Dada una fórmula literal *k*-predicativa $A(x_1, \ldots, x_n)$ que contenga exactamente las distintas variables libres $x_1, \ldots, x_n$, el conjunto de sus *k-transformaciones* será las *k*-transformaciones de las $k^n$ fórmulas literales *k*-predicativas cerradas, obtenidas a partir de $A(x_1, \ldots, x_n)$ al sustituir $x_1, \ldots, x_n$, por cada uno de los $k^n$ *n*-tuplos diferentes de los numerales de 1 a $\boldsymbol{k}$.

EJEMPLO 2. Las 2-transformaciones de $\forall a \mathcal{A}(a,c) \supset \mathcal{A}(b,c)$ son $\mathcal{A}_{11} \,\&\, \mathcal{A}_{21} \supset \mathcal{A}_{11}$, $\mathcal{A}_{12} \,\&\, \mathcal{A}_{22} \supset \mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{11} \,\&\, \mathcal{A}_{21} \supset \mathcal{A}_{21}$, $\mathcal{A}_{12} \,\&\, \mathcal{A}_{22} \supset \mathcal{A}_{22}$.

TEOREMA 22. *Para todo* $k \geq 1$: *Si una fórmula* E *es demostrable* (*deducible a partir de fórmulas* $\Gamma$) *en el cálculo puro o k-predicativo, entonces todas las k-transformaciones de* E *son demostrables* (*deducibles a partir de las k-transformaciones de las fórmulas* $\Gamma$) *en el cálculo de predicados.* (Hilbert-Bernays 1934, págs. 119 y siguientes).

Se deja la demostración al lector.

Fácilmente se ve que una fórmula de letras predicativas es *k*-idéntica, si, y sólo si, todas sus *k*-transformaciones son idénticamente verdaderas (§ 28). De este modo, utilizando el Teorema 9, el Teorema 20 se convierte en un Corolario del Teorema 22.

EJEMPLO 1 (conclusión). La fórmula
$(\mathscr{A}_{11} \vee \mathscr{A}_{21}) \,\&\, (\mathscr{A}_{12} \vee \mathscr{A}_{22}) \supset (\mathscr{A}_{11} \,\&\, \mathscr{A}_{12}) \vee (\mathscr{A}_{21} \,\&\, \mathscr{A}_{22})$ no es demostrable en el cálculo proposicional ya que toma el valor f cuando $\mathscr{A}_{11}$, $\mathscr{A}_{12}, \mathscr{A}_{21}, \mathscr{A}_{22}$, toman respectivamente los valores t, f, f, t. Por tanto, $\forall b \exists a \mathscr{A}(a, b) \supset \exists a \forall b \mathscr{A}(a, b)$ es indemostrable en el cálculo de predicados. Comparando esos valores de $\mathscr{A}_{11}$, $\mathscr{A}_{12}$, $\mathscr{A}_{21}$, $\mathscr{A}_{22}$ con la tabla de $I(a, b)$ del Ejemplo 2 § 36, vemos que ésta es básicamente la misma refutación que allí se presentó.

EJEMPLO 3. ¿Es demostrable en el cálculo de predicados intuicionista $\neg\,\neg\,\exists a \mathscr{A}(a) \supset \exists a \neg\,\neg\,\mathscr{A}(a)$ (que es de la forma de $\mathrm{IIc}_1 \supset$ IIb del Corolario del Teorema 17)? Por el Teorema 22 (con $k = 2$) lo es sólo si $\neg\,\neg\,(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2) \supset \neg\,\neg\,\mathscr{A}_1 \vee \neg\,\neg\,\mathscr{A}_2$ es demostrable en el cálculo proposicional intuicionista (resultado que se utilizará en § 80).

Al estudiar el cálculo de predicados, a menudo es heurísticamente útil el pensar en $\forall x A(x)$ como una conjunción que se extiende sobre todos los miembros del dominio de objetos, y similarmente en $\exists x A(x)$ como una disyunción, aunque sólo en el caso de un dominio finito con un número $k$ dado de miembros, es posible construir expresiones formales sinónimas sobre tal base. Considerando esta analogía entre $\forall$ y & y entre $\exists$ y $\vee$, y la noción de & como análoga a $\cdot$ y la de $\vee$ a $+$ (§29 final), algunos autores escriben $\forall x A(x)$ como "$\Pi_x A(x)$" y $\exists x A(x)$ como "$\Sigma_x A(x)$". (Compárense también las definiciones del producto y la suma de un conjunto de conjuntos, § 5).

Retrospectivamente, se puede ver cómo los postulados 3–6 para & y $\vee$ sugieren los de $\forall$ y $\exists$. Los postulados actuales del Grupo A2 cumplen las exigencias de la analogía, teniendo en cuenta ciertas diferencias de detalle. La analogía se muestra con claridad en las correspondientes reglas derivadas del Teorema 2. De los resultados numerados, p. ej., *75, *76, *83, *84, *91, *92 son análogos respectivamente a *37, *38, *56, *57, *35, *36.

CALCULO DE PREDICADOS CON UNA REGLA DE SUSTITUCION POSTULADA. Como en el caso del cálculo proposicional (§ 30), usualmente se formula el cálculo de predicados con una regla de sustitución postulada en lugar de una regla de sustitución derivada, es decir, en la notación del Teorema 15 § 34 y bajo el Requisito (A):

$$\frac{E}{E^*}.$$

A las letras predicativas se las denomina entonces *variables predicativas*; generalmente se construye la regla para aplicarse cada vez a una sola variable; como anteriormente, estas variables han de mantenerse constantes en deducciones subsidiarias respecto de las fórmulas supuestas que hayan de ser descargadas. (La primera formulación correcta de la regla de sustitución parece ser la de Hilbert-Bernays 1939 págs. 377-378, o 1934 pág. 98, entendiendo que la restricción sobre "Einsetzung" se aplica también a "Umbenennung").

CALCULOS DE PREDICADOS DE $n$-VALORES. Cfr. Rosser y Turquette 1948–51, 1952.

CALCULOS DE PREDICADOS DE DOMINIOS DIVERSOS. Como se dio a entender en § 31, se puede estudiar el cálculo de predicados comprendiendo varios dominios de objetos, especificando que algunas de las variables tienen su rango sobre uno de esos dominios, otras en otro, etc. Si se consideran estos dominios de objetos distintos simplemente como diferentes categorías primarias de objetos, la única característica nueva a tener en cuenta es que no se debe realizar ninguna operación que sustituya un término o variable de una especie, esto es, referente a uno de los dominios, por uno de otro dominio. Por ejemplo, *79 será válido sólo cuando x e y sean variables de la misma especie. Cada una de las variables anejas a una forma nominal deberá ser de una especie especificada. (Cfr. Herbrand 1930, Schmidt 1938, Wang 1952 y el Ejemplo 13 § 74).

CALCULOS SUPERIORES DE PREDICADOS. Sin embargo, también se pueden obtener cálculos de predicados con varios tipos de variables empezando primero con un cálculo de predicados que tenga un único dominio primario de objetos denominado *individuos*; después con un dominio de objetos adicional que conste de predicados sobre el primer dominio de objetos, admitiendo así cuantificadores $\forall P$ y $\exists P$ donde $P(a_1, ..., a_n)$ es una variable predicativa del primer sistema; y así sucesivamente. Cuando se considera una jerarquía de cálculos de predicados construida según este plan, al primero se le denomina *cálculo restringido de predicados*, o *cálculo de predicados de primer orden*, y a los otros, *cálculos de predicados de segundo orden*, *tercer orden*, etc., o generalmente *cálculos superiores de predicados*. Al considerar jerarquías de sistemas de esta especie, surgen multitud de cuestiones, que son investigadas por la escuela logicista (§ 12). Proporciona una breve introducción el Capítulo IV de la 2ª (1938) o 3ª (1949) edición de Hilbert-Ackermann 1928. Se trata este tema en Church 1952-3 Capítulos V (vol. I) y VI (vol. II).

## CAPITULO VIII

## TEORIA FORMAL DE NUMEROS

§ 38. **Inducción, igualdad, reemplazo.** En este capítulo volvemos al estudio del sistema formal total del Capítulo IV.

Ahora estableceremos nuestros resultados principalmente con variables formales particulares, tal como fueron establecidos los postulados del Grupo B (tras 13), de modo que las fórmulas demostrables se lean como teoremas particulares de teoría de números formalizada en el simbolismo del sistema. Los resultados de la forma $\vdash A$, establecidos con variables libres particulares, pueden ser aplicados sustituyendo aquellas variables por términos, según la regla de sustitución para variables individuales (§ 23 y *66 § 32).

Del postulado 13 (usando $\supset$-introd., $\forall$-introd., &-introd. y $\supset$-elim.) obtenemos la siguiente regla formal de inducción matemática. Por supuesto las inducciones formales efectuadas mediante esta regla distan mucho de las inducciones informales matemáticas, usadas al demostrar teoremas metamatemáticos.

REGLA DE INDUCCION. *Sea* x *una variable, sea* $A(x)$ *una fórmula, y sea* $\Gamma$ *una lista de fórmulas que no contenga* x *libre. Si* $\Gamma \vdash A(0)$, *y* $\Gamma, A(x) \vdash A(x')$, *manteniéndose constante en* $A(x)$ *las variables libres, entonces* $\Gamma \vdash A(x)$.

Comenzando con las demostraciones del teorema próximo, frecuentemente adoptaremos una presentación más informal de pruebas de demostrabilidad o deducibilidad formales. El uso anterior del método de cadena en el manejo de equivalencias (§ 36) fue un paso en esta dirección. Ahora vamos más lejos, omitiendo el símbolo "$\vdash$" en muchas situaciones. Así, diremos "supóngase A", significando que deseamos tomar A como una fórmula supuesta en la construcción de una deducción. Desde luego, propiamente hablando, no estamos suponiendo nada, sino indicando que las fórmulas que siguen han de ser formalmente deducibles de A (y de cualesquiera otras fórmulas supuestas que hayamos introducido), hasta que la descarga de la fórmula supuesta A esté indicada o implicada por el contexto. En cada etapa de tal presentación informal, las fórmulas dadas han de ser entendidas como deducibles de todas las fórmulas supuestas que no hayan sido descargadas todavía.

EJEMPLO 1. Lo que sigue es una demostración en esta presentación de que $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ (Cfr. la primera mitad de la demostración de *83 §35).

Como preparación para $\supset$-introd., supongamos $\exists x A(x)$. Con vistas a $\exists$-elim., a partir de ésta, supongamos $A(x)$. Deduciremos $\neg \forall x \neg A(x)$ por reductio ad absurdum (i. e. $\neg$-introd.). Con este fin supongamos $\forall x \neg A(x)$. Entonces por $\forall$-elim. obtenemos $\neg A(x)$, que contradice $A(x)$. [Entonces, por la $\neg$-introd. obtenemos $\neg \forall x \neg A(x)$, que descarga el supuesto $\forall x \neg A(x)$. Ya que $\neg \forall x \neg A(x)$ no contiene x libre, la $\exists$-elim. puede completarse ahora, descargando $A(x)$. Finalmente obtenemos $\exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ por $\supset$-introd., descargando $\exists x A(x)$]. Los pasos encerrados entre corchetes se omitirán a menudo.

Para analizar esto, alistamos las fórmulas mostrando mediante una flecha hasta dónde alcanza la vigencia de cada supuesto.

1. $\exists x A(x)$ – supuesto.
2. $A(x)$ – supuesto.
3. $\forall x \neg A(x)$ – supuesto.
4. $\neg A(x)$ – $\forall$-elim., 3.
5. $\neg \forall x \neg A(x)$ – $\neg$-introd., 2, 4.
6. $\neg \forall x \neg A(x)$ – $\exists$-elim., 5.
7. $\exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ – $\supset$-introd., 6.

Cada fórmula es deducible de las fórmulas supuestas cuyas flechas le aparezcan opuestas, p. ej., la Línea 5 significa que $\neg \forall x \neg A(x)$ es deducible de $\exists x A(x)$ (Línea 1) y $A(x)$ (Línea 2). Estableciendo estos hechos en la $\vdash$-notación, nuestra demostración revestirá el anterior estilo.

1. $\exists x A(x) \vdash \exists x A(x)$.
2. $A(x), \exists x A(x) \vdash A(x)$.
3. $\forall x \neg A(x), A(x), \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
4. $\forall x \neg A(x), A(x), \exists x A(x) \vdash \neg A(x)$ – $\forall$-elim., 3.
5. $A(x), \exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ – $\exists$-introd., 2, 4.
6. $\exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ – $\exists$-elim., 5.
7. $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ – $\supset$-introd., 6.

Obsérvese que las columnas de fórmulas supuestas ocupan el lugar de las flechas. Para el paso 5 podemos proporcionar $\forall x \neg A(x)$ como un supuesto adicional en 2 por las propiedades generales de $\vdash$. En el paso 6, $\exists$-elim. da $\exists x A(x), \exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$, y el suplemento $\exists x A(x)$ es omitido por propiedades generales de $\vdash$. Realmente carece de importancia si $\exists x A(x)$ es o no es considerada como una fórmula supuesta, para 2–5.

Las aplicaciones de la regla de $\forall$-eliminación se describirán frecuentemente en el lenguaje de "casos" (cfr. § 23). Las aplicaciones de la regla de inducción formal se presentarán a menudo del modo siguiente, usando la misma terminología que en inducciones informales (§ 7): Base: ... $A(0)$. Paso de inducción. Supóngase $A(x)$ (la hipótesis de la inducción). Entonces ... $A(x')$. [En este punto se completa el paso de inducción, y $A(x)$ deja de ser una fórmula supuesta]. De aquí, $A(x)$. [Otras fórmulas $\Gamma$ pueden haber sido usadas como fórmulas supuestas. De esta demostración de que $\vdash A(x)$, o de que $\Gamma \vdash A(x)$, decimos que es "por inducción (formal) sobre x"; $A(x)$ es la "fórmula de inducción".]

Esta presentación informal es conveniente en situaciones en las que el desarrollo formal discurre en estrecho paralelo con los razonamientos intuitivos. Ahorra espacio y, en apariencia, acerca todavía más nuestros procedimientos para la prueba de los hechos sobre demostrabilidad y deducibilidad formal a los métodos de la matemática informal (cfr. § 20).

El lector deberá saber en todo momento cómo imprimir un mayor rigor a los

procedimientos por aplicación de nuestras reglas derivadas, establecidas en términos del símbolo "$\vdash$". La notación-$\vdash$ se ha usado para proporcionar enunciados concisos y exactos de nuestras reglas derivadas, mostrando claramente su estructura. Seguimos usándola cuando hemos de establecer nuevas reglas, y en otros pasajes en los que ayuda a subrayar la forma de las relaciones de deducibilidad o el hecho de que estemos hablando de (y no en) las fórmulas del sistema.

En adelante abreviaremos comúnmente $a.b$ por "$ab$".

TEOREMA 23. (Propiedades de la igualdad).

*100. $\vdash a=a.$ *101. $\vdash a=b \supset b=a.$

*102. $\vdash a=b \,\&\, b=c \supset a=c.$

(Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

*103. (Axioma 17). $\vdash a=b \supset a'=b'$

*104. $\vdash a=b \supset a+c=b+c.$ *105. $\vdash a=b \supset c+a=c+b.$

*106. $\vdash a=b \supset ac=bc.$ *107. $\vdash a=b \supset ca=cb.$

(Propiedades especiales de reemplazo de los símbolos funcionales $'$, $+$, $\cdot$).

*108. (Axioma 16) $\vdash a=b \supset (a=c \supset b=c).$

*109. $\vdash a=b \supset (c=a \supset c=b).$

(Propiedades especiales de reemplazo del símbolo predicativo $=$).

DEMOSTRACIONES. *100. Como Ejemplo 1 § 19 expusimos una demostración de esta fórmula a partir de los postulados. Valiéndonos de las reglas derivadas establecidas entre tanto, podemos resumirla ahora del modo siguiente. A partir del Axioma 16, por sustitución (*66 § 32), $a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)$. De aquí, por el Axioma 18 (usando $\supset$-elim. dos veces), $a=a$.

*101. Usando la presentación informal, supóngase $a = b$. Por Axioma 16, $a=c \supset b=c$. Sustituyendo $c$ por $a$, $a=a \supset b=a$. De aquí por *100, $b=a$.

*104. Se efectuará su demostración mediante la regla de inducción formal. Tanto en la base como en el paso de inducción se usará el método de una cadena de igualdades (cfr. final de § 26). Nuestro uso de este método depende de tener ya establecidos *100–*102. Ya que no tenemos todavía la propiedad general de reemplazo (Teorema 24 (a)), cualquier paso, que implique el reemplazo de un término por otro que le sea igual, tendrá que justificarse mediante un resultado de reemplazo especial que convenga a la ocasión. Con este fin usaremos aquí el Axioma 17 (*103). No se mencionará explícitamente la sustitución efectuada en un axioma o fórmula previamente establecida. Supóngase $a = b$. Deducimos $a+c=b+c$ por inducción sobre $c$. BASE. $a+0=a$ [Axioma 18] $=b$ [supuesto] $=b+0$ [Axioma 18]. PASO INDUCTIVO. Supóngase, como hipótesis de la inducción, $a+c=b+c$. Entonces $a+c'=(a+c)'$ [Axioma 19] $=(b+c)'$ [hipótesis de la inducción, Axioma 17] $=b+c'$ [Axioma 19].

*105. Abréviese $a = b \supset c + a = c + b$ por "A $(a, b)$". Demostraremos $\forall b$A $(a, b)$ por inducción sobre $a$. Efectuamos el paso de inducción, dejando que la base sea hecha similarmente por el lector. PASO INDUC. Supóngase $\forall b$A $(a, b)$.

Por $\forall$-elim., A $(a, b)$. Ahora deducimos A $(a', b)$ por inducción sobre $b$. BASE. Supóngase $a' = 0$. Pero, por Axioma 15, $\neg a' = 0$. De aquí, por $\neg$-elim. débil (§ 23), $c + a' = c + 0$. PASO INDUC. (No necesitamos usar la hipótesis de la inducción sobre $b$). Supóngase $a' = b'$. Entonces por Ax. 14, $a = b$; y, usando A $(a, b)$, $c + a = c + b$. Ahora bien $c + a' = (c + a)'$ [Ax. 19] $= (c + b)'$ [usando $c + a = c + b$ con Ax. 17] $= c + b'$ [Ax. 19] (¿Por qué tomamos $\forall b$A $(a, b)$ en lugar de A $(a, b)$ como la fórmula de la inducción para la inducción sobre $a$? Cfr. el enunciado de la regla de inducción. Para la inducción sobre $b$ dentro del paso de inducción de la inducción sobre $a$, $\Gamma$ es $\forall b$ A $(a, b)$.

Otro modo de tratar *105 es demostrar *118 y *119 primero, tras lo cual *105 puede inferirse de *104.

*106 y *107. Similares a *104 y *105. Para justificar el reemplazo de $ac$ por $bc$ en $ac + a$, tras haber supuesto $ac = bc$, debemos usar *104; etc.

REEMPLAZO. TEOREMA 24 (a). *Si* $u_r$ *es un término que contiene una ocurrenrrencia especificada de un término* r *y* $u_s$ *es el resultado de reemplazar esta ocurrencia por un término* s, *entonces*

$$r = s \vdash u_r = u_s.$$

(b) *Si* $C_r$ *es una fórmula que contiene una ocurrencia especificada de un término* r (*que no sea la variable de un cuantificador*), *y* $C_s$ *es el resultado de reemplazar esta ocurrencia por un término* s, *entonces*

$$r = s \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_r \sim C_s$$

*donde* $x_1, \ldots, x_n$ *son las variables de* r *o* s *pertenecientes a un cuantificador de* $C_r$ *que tiene la ocurrencia especificada de* r *dentro de su alcance* (Teorema de Reemplazo).

Sigue un ejemplo. La prueba se realiza con el mismo método anterior (§§ 26, 33), usando siete lemas adicionales.

LEMAS ADICIONALES PARA EL REEMPLAZO. *Si* r *y* s *son términos*:

$$*110. \quad r = s \vdash r' = s'.$$

$$*111. \quad r = s \vdash r + t = s + t. \qquad *112. \quad r = s \vdash t + r = t + s.$$

$$*113. \quad r = s \vdash rt = st. \qquad *114. \quad r = s \vdash tr = ts.$$

$$*115. \quad r = s \vdash r = t \sim s = t. \qquad *116. \quad r = s \vdash t = r \sim t = s.$$

DEMOSTRACIONES. De estos lemas, los cinco primeros se siguen de *103–*107, respectivamente, por sustitución (*66) y $\supset$-elim. Los dos últimos se siguen de *108 y *109 con *66, *101, $\supset$-elim. y *16.

EJEMPLO 2. r sea $b$, s sea $a$ y $C_r$ sea $\exists d(d' + b = c)$. Las construcciones paralelas de $C_r$ a partir de r y de $C_s$ a partir de s son las siguientes, siendo 3 su profundidad.

| | |
|---|---|
| $b$ | $a$ |
| $d' + b$ | $d' + a$ |
| $d' + b = c$ | $d' + a = c$ |
| $\exists d(d' + b = c)$ | $\exists d(d' + a = c)$ |

Escríbase $=$ entre las expresiones que aparecen en cada una de las dos líneas iniciales, y $\sim$ entre las que ocupan el final. Las fórmulas resultantes son deducibles, cada una a partir de la anterior, usando sucesivamente *112, *115, *72 (variando $d$). Usando la abreviatura "$<$" (§ 17), el resultado puede escribirse $b=a \vdash b<c \sim a<c$. (¿Por qué no varía $d$ en el resultado? ).

COROLARIO 1. *Bajo las condiciones del teorema*: *si* $\vdash \mathrm{r}=\mathrm{s}$, *entonces*

$$\vdash \mathrm{u_r}=\mathrm{u_s} \text{ y } \vdash \mathrm{C_r} \sim \mathrm{C_s}.$$

COROLARIO 2. *Bajo las condiciones del teorema* $\mathrm{r}=\mathrm{s}, \mathrm{C_r} \vdash^{x_1 \ldots x_n} \mathrm{C_s}$ *con* $x_1, \ldots, x_n$ *variados sólo en la primera fórmula supuesta. Si* $\vdash \mathrm{r}=\mathrm{s}$, *entonces* $\mathrm{C_r} \vdash \mathrm{C_s}$. (Propiedad de Reemplazo de la Igualdad).

EJEMPLO 2 (conclusión). Usando también *101: $a=b, b<c \vdash a<c$.

Como antes, un reemplazo puede ser precedido por una sustitución de variables individuales (cfr. § 33, Ejemplo 4, y § 34 justo encima de la Observación 2).

§ 39. **Adición, multiplicación, orden.** El Grupo B de Postulados (§ 19) puede describirse del modo siguiente. Los postulados 14, 15 y 13 expresan formalmente los tres últimos axiomas de Peano (§ 6). (Los dos primeros entran en el sistema presente, que tiene sólo variables de números naturales, por las Cláusulas 1 y 5 de la definición de término, § 17). Los Axiomas 16 y 17 dan propiedades de la igualdad (incluyendo, al igual que 17, la univalencia de la función sucesor $'$, que estaba implícita en la formulación de Peano). Los Axiomas 18 y 19 son lo que puede ser llamado "ecuaciones de recursión" que definen la función $+$, y los Axiomas 20 y 21 son los semejantes para la función $\cdot$.

Para nuestras abreviaturas "$a \neq b$" y "1", "2", "3", ..., véase § 17.

TEOREMA 25. (Leyes aritméticas).

*117. $\vdash (a+b)+c=a+(b+c)$. *121. $\vdash (ab)\,c=a\,(bc)$.

*118. $\vdash a'+b=(a+b)'$. *122. $\vdash a'b=ab+b$.

*119. $\vdash a+b=b+a$. *123. $\vdash ab=ba$.

*120. $\vdash a(b+c)=ab+ac$.

(Leyes asociativa, conmutativa y distributiva para $+$ y $\cdot$, con lemas usados en la demostración de leyes conmutativas).

*124. (Axioma 18). $\vdash a+0=a$. *125. (Axioma 20). $\vdash a \cdot 0=0$.

*126. $\vdash a+1=a'$. *127. $\vdash a \cdot 1=a$.

(Leyes directas para 0 y 1).

*128. $\vdash a+b=0 \supset a=0 \,\&\, b=0$. *129. $\vdash ab=0 \supset a=0 \vee b=0$.

*130. $\vdash a+b=1 \supset a=1 \vee b=1$. *131. $\vdash ab=1 \supset a=1 \,\&\, b=1$.

(Leyes inversas para 0 y 1).

*132. $\vdash a+c=b+c \supset a=b$. *133. $\vdash c\neq 0 \supset (ac=bc \supset a=b)$.

(Leyes inversas para $+$ y $\cdot$).

DEMOSTRACIONES. En estas demostraciones, ya que ahora tenemos el Teorema 24 (a) no necesitamos invocar sus casos especiales *103–*107, como hicimos en las demostraciones del Teorema 23.

*117 y *118. Por inducción sobre $c$ y $b$, respectivamente.

*119. Por inducción sobre $a$, usando inducción sobre $b$ en la base.

*122. Por inducción sobre $b$. PASO INDUC. Supóngase $a'b = ab + b$. Entonces $a'b' = a'b + a'$ [Ax. 21] $= (ab + b) + a'$ [hip. de induc.] $= ((ab + b) + a)'$ [Ax. 19] $= (ab + (b + a))'$ [*117] $= (ab + (a + b))'$ [*119] $= ((ab + a) + b)'$ [*117] $= (ab' + b)'$ [Ax. 21] $= ab' + b'$ [Ax. 19].

*128. *Si* $\vdash$ A (0) *y* $\vdash$ A (x'), *entonces* $\vdash$ A (x). Porque a partir de $\vdash$ A (x') por propiedades generales de $\vdash$, A (x) $\vdash$ A (x'), y así se aplica la inducción sobre x. Denominamos a esta regla *casos de inducción* (*sobre* x). En *128 llamamos "A $(a, b)$" a la fórmula que ha de ser demostrada. Para demostrar A $(a, b)$ por casos de inducción sobre $a$, bastará demostrar A $(0, b)$ y A $(a', b)$. Para demostrar estas dos, por casos de inducción sobre $b$, bastará demostrar las cuatro fórmulas A $(0, 0)$, A $(0, b')$, A $(a', 0)$, A $(a', b')$, esto es, las fórmulas

$$0+0=0 \supset 0=0 \,\&\, 0=0, \quad 0+b'=0 \supset 0=0 \,\&\, b'=0,$$
$$a'+0=0 \supset a'=0 \,\&\, 0=0, \quad a'+b'=0 \supset a'=0 \,\&\, b'=0.$$

Las demostraciones de estas cuatro son fáciles, ya que, en cada paso, podemos o bien refutar la premisa de implicación (usando Axioma 15) o demostrar la conclusión (cfr. *10a y *11 § 26).

*130. Es establecido de modo similar, pero con una repetición del argumento por casos, de modo que, para demostrar A (x'), demostramos A (0') y A(x''). En conjunto, para demostrar A$(a, b)$, basta entonces demostrar las nueve fórmulas:

$$\text{A}(0,0),\ \text{A}(0,1),\ \text{A}(0,b''),\ \text{A}(1,0),\ \text{A}(1,1),$$
$$\text{A}(1,b''),\ \text{A}(a'',0),\ \text{A}(a'',1),\ \text{A}(a'',b'').$$

El tratamiento de cada una de las nueve es rutinario (usando los Axiomas 14 y 15).

*132. Inducción sobre $c$, usando el Axioma 14.

*133. Abréviese $ac=bc \supset a=b$ por "A $(a, b)$". Supóngase $c \neq 0$. Deducimos $\forall a \text{A}(a, b)$ por inducción sobre $b$ de la manera siguiente. (Cfr. *95). BASE. Supóngase $ac=0c$. Por *125 (y *123), $ac=0$. Pero $c\neq 0$. De aquí, por *129 y el cálculo proposicional, $a=0$. PASO INDUC. Supóngase $\forall a \text{A}(a, b)$. Por $\forall$-elim., A $(a,b)$. Deduciremos A $(a, b')$ por inducción sobre $a$. BASE. Supóngase $0c=b'c$. Por *125 (y *123, *101), $b'c=0$; y por *129, $b'=0 \vee c=0$. Pero $b'\neq 0$ por Ax. 15, y $c\neq 0$ por hipótesis; de aquí, $\neg (b'=0 \vee c=0)$. A partir de esta contradicción, por $\neg$-elim. débil (§ 23), $0=b'$. PASO INDUC. Supóngase $a'c=b'c$. Por *122, $ac+c=bc+c$. Por *132, $ac=bc$. De aquí, por A $(a, b)$, $a=b$; y por *103, $a'=b'$.

Otro modo de tratar *133 es esperar a que haya sido establecido *139, tras lo cual puede ser demostrado de modo similar a *146b.

Ahora usamos la abreviatura "$a < b$" para $\exists c\,(c' + a = b)$ bajo las convenciones discutidas en §§ 17, 33; y leemos "$a > b$" como abreviatura de $b < a$; "$a \leq b$" para $a < b \vee a = b$; "$a \geq b$" para $b \leq a$; "$a < b < c$" para $a < b \,\&\, b < c$ (cfr. final de § 26); etc.

TEOREMA 26. (Propiedades de Orden).

*134a. $\vdash a < b < c \supset a < c.$ *134b. $\vdash a \leq b < c \supset a < c.$

*134c. $\vdash a < b \leq c \supset a < c.$ *134d. $\vdash a \leq b \leq c \supset a \leq c.$

(Leyes Transitivas).

*135a. $\vdash a < a'.$ *135b. $\vdash 0 < a'.$ *136. $\vdash 0 \leq a.$

*137 (=*$137_0$). $\vdash a = 0 \vee \exists b(a = b').$ *$137_1$. $\vdash a = 0 \vee a = 1 \vee \exists b\,(a = b'').$

*$137_2$. $\vdash a = 0 \vee a = 1 \vee a = 2 \vee \exists b\,(a = b''').$ ...

*138a. $\vdash a \leq b \sim a < b'.$ *138b. $\vdash a > b \sim a \geq b'.$

(Propiedades de orden para 0 y $'$).

*139. $\vdash a < b \vee a = b \vee a > b.$

*140. $\vdash \neg\, a < a.$ *141. $\vdash a < b \supset \neg\, a > b.$

(Conexividad, irreflexividad, asimetría).

*142a. $\vdash a + b \geq a.$ *143a. $\vdash b \neq 0 \supset ab \geq a.$

*142b. $\vdash b \neq 0 \supset a + b > a.$ *143b. $\vdash a \neq 0 \,\&\, b > 1 \supset ab > a.$

*143c. $\vdash b \neq 0 \supset a'b > a$; de aquí, $\vdash b \neq 0 \supset \exists c\,(cb > a).$

*144a. $\vdash a < b \sim a + c < b + c.$ *145a. $\vdash c \neq 0 \supset (a < b \sim ac < bc).$

*144b. $\vdash a \leq b \sim a + c \leq b + c.$ *145b. $\vdash c \neq 0 \supset (a \leq b \sim ac \leq bc).$

(Desigualdades bajo adición y multiplicación).

*146a. $\vdash b \neq 0 \supset \exists q\, \exists r(a = bq + r \,\&\, r < b).$

*146b. $\vdash a = bq_1 + r_1 \,\&\, r_1 < b \,\&\, a = bq_2 + r_2 \,\&\, r_2 < b \supset q_1 = q_2 \,\&\, r_1 = r_2.$

(Existencia y unicidad de cociente y resto).

DEMOSTRACIONES. *134a. Supóngase $a < b < c$, esto es, $a < b \;\&\; b < c$, es decir, $\exists d\,(d' + a = b) \;\&\; \exists e\,(e' + b = c)$. Preparatoriamente a la $\exists$-elim. y &-elim., supóngase $d' + a = b$ y $e' + b = c$. Entonces $e' + (d' + a) = c$, que puede reasociarse en la forma $(e' + d')' + a = c$. Por $\exists$-introd., $\exists f(f' + a = c)$, o sea, $a < c$.

*134b. A partir de *134a, con la ayuda de la demostración por casos (§ 23). (Cfr. Ejemplo 2 § 38).

*136. Por casos de inducción sobre $a$, usando *135b.

*137, $*137_k$. Por uso repetido de casos de inducción; o así: La fórmula de *136 es equivalente a la de *137, usando Ax. 18 y propiedades de $=$ (Cfr. Ejemplo 4 § 33); y $*137_1$, $*137_2$, ... se siguen sucesivamente.

*138a. Usando $\exists$-elim. y $\forall$-elim. e introd. con *137, $\vdash a<b' \sim 0'+a=b' \sim \exists c\,(c''+a=b')$. Usando *119 y Axs. 19, 17, 14 y 18, $\vdash 0'+a=b' \sim a=b$. Usando *119 y Axs. 19, 17 y 14 con *72 (o $\exists$-elim. e introd.), $\vdash \exists c\,(c''+a=b') \sim a<b$.

*139. Por inducción sobre $b$, usando *136 en la base, y *138a, b en el paso de inducción.

*140. Supóngase $a<a$, esto es, $\exists b\,(b'+a=a)$. Para $\exists$-elim., supóngase $b'+a=a$. Entonces por *131 con *124 y *119, $b'=0$, lo que contradice Ax. 15. OBSERVACION. Puesto que las fórmulas contradictorias $b'=0$ y $b'\neq 0$ contienen $b$ libre, no puede efectuarse inmediatamente la $\exists$-elim. Pero por $\neg$-elim. débil (§ 23), podemos deducir, primero, un par de fórmulas contradictorias que no contengan $b$ libre, p. ej. $0=0$ y $0\neq 0$.

Por *140, $\vdash a=b \supset \neg\, a<b$.

*143b. Supóngase $a\neq 0$ & $b>1$. Por $a\neq 0$ con *137, $\exists c\,(a=c')$; y por $b>1$ con *140, *141 y *135a, $b\neq 0$ & $b\neq 1$, y de aquí con $*137_1$, $\exists d\,(b=d'')$ Supóngase (preparatoriamente a las $\exists$-eliminaciones) $a=c'$ y $b=d''$.

*144a. A partir de *104, *132, *117 y *72.

*145a. Supóngase $c\neq 0$. PARTE 1: deducir $a<b \supset ac<bc$. (Se deja al lector). PARTE 2: deducir $ac<bc \supset a<b$. Supóngase $ac<bc$. Para deducir $a<b$, bastará obtener por casos ($\forall$-elim.) a partir de *139 $a<b$ bajo cada una de las tres hipótesis de caso. CASO 1: $a<b$. CASO 2: $a=b$. Entonces, $ac=bc$. Esto, con *140, da $\neg\, ac<bc$, contradiciendo nuestro supuesto $ac<bc$. Por $\neg$-elim. débil, $a<b$. CASO 3: $a>b$, es decir, $b<a$. Entonces por el resultado de la Parte 1, $bc<ac$, es decir, $ac>bc$. De aquí por *141, $\neg\, ac<bc$.

*146a. Usese inducción sobre $a$ (tras suponer $b\neq 0$). (La demostración puede basarse también en *143c y *149).

*146b. Supóngase $a=bq_1+r_1$ & $r_1<b$ & $a=bq_2+r_2$ & $r_2<b$. Para deducir $q_1=q_2$, bastará deducir una contradicción a partir de $q_1<q_2$ y, a su vez, a partir de $q_1>q_2$ mediante *139, usando casos y $\neg$-elim. débil. Supóngase $q_1<q_2$. Para $\exists$-elim. a partir de esto, supóngase $e'+q_1=q_2$. Ahora, $bq_1+r_1=a=bq_2+r_2=b(e'+q_1)+r_2=bq_1+(be'+r_2)$. Así $r_1=be'+r_2$ [*132] $\geq be'$ [*142a] $\geq b$ [*143a]. Esto contradice $r_1<b$, por *140 y *141. El otro caso es similar. Habiendo deducido $q_1=q_2$, obtenemos $a=bq_1+r_1=bq_1+r_2$, de donde $r_1=r_2$ por *132.

***§ 40. El desarrollo ulterior de la teoría de números.** Nuestro sistema formal de teoría de números difiere de la teoría informal en que se explicita la lógica. Nuestro trato con la lógica nos ha elevado a un punto en que el desarrollo ulterior de la teoría de números en el sistema formal discurrirá acercándose mucho a líneas de la teoría informal que ya nos son familiares. No continuaremos sistemática-

mente con este desarrollo, sino que tan sólo repararemos en ciertos aspectos suyos, antes de volver a cuestiones metamatemáticas generales sobre el sistema.

Para esta sección, *sea* x *una variable*, A (x) *una fórmula*, *e* y *y* z *variables distintas de* x *y entre sí que sean libres para* x *en* A (x) *y no ocurran libres en* A (x).

El *principio de mínimo número* (o *buena-ordenación* de los números naturales) dice que, si hay un número natural $x$ tal que $A(x)$, entonces hay un mínimo $x$ tal, digamos $y$. La propiedad de $y$ puede ser expresada en el simbolismo formal por $A(y) \,\&\, \forall z\,(z < y \supset \neg A(z))$, o en una forma equivalente usando:

*147. $\vdash z < y \supset \neg A(z) \sim A(z) \supset y \leq z$.

(Por *13, *139). Establecemos primero:

*148°. $\vdash \exists y\,[y < x \,\&\, A(y) \,\&\, \forall z\,(z < y \supset \neg A(z))] \vee \forall y\,[y < x \supset \neg A(y)]$.

(Ley de tercio excluso, y principio de mínimo número, para un segmento inicial de los números naturales).

*148a. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \exists y\,[y < x \,\&\, A(y) \,\&\, \forall z\,(z < y \supset \neg A(z))] \vee \forall y\,[y < x \supset \neg A(y)]$.

*148b. $\vdash \neg\neg\,\{\exists y\,[y < x \,\&\, A(y) \,\&\, \forall z\,(z < y \supset \neg A(z))] \vee \forall y\,[y < x \supset \neg A(y)]\}$.

(Versiones intuicionistas de lo mismo).

DEMOSTRACIONES. *148. Por inducción sobre x, del modo que sigue. Sea abreviada la fórmula de *148 por "P (x) ∨ Q (x)". BASE. A partir de *136, *140, *141 y *10a, $\vdash Q(0)$, de donde $\vdash P(0) \vee Q(0)$. PASO INDUC. Supóngase $P(x) \vee Q(x)$. Deducimos $P(x') \vee Q(x')$ de allí por casos (∨-elim.). Para el Caso 1, $P(x) \vdash P(x') \vdash P(x') \vee Q(x')$, usando *135a, *134a. Para el Caso 2, usamos subcasos a partir de $A(x) \vee \neg A(x)$ (*51). Para el Subcaso 2a, $Q(x), A(x) \vdash P(x') \vdash P(x') \vee Q(x')$, usando *135a. Para el Subcaso 2b, $Q(x), \neg A(x) \vdash Q(x') \vdash P(x') \vee Q(x')$, usando *138a.

*148a. Ya que de *51 no se puede disponer en el sistema intuicionista, usamos ahora $\forall x\,(A(x) \vee \neg A(x))$ como una fórmula supuesta $\Gamma$ para la inducción.

*148b. A partir del Esquema Axiomático 6, por ⊃-elim. y contraposición dos veces (*13, *12), $A \supset \neg\neg C, B \supset \neg\neg C \vdash A \vee B \supset \neg\neg C \vdash \neg\neg(A \vee B) \supset \neg\neg C$. De aquí por ⊃-reglas: *Si* $\Gamma, A \vdash \neg\neg C$ *y* $\Gamma, B \vdash \neg\neg C$ (*manteniéndose constantes para* A *y* B *las variables libres*, *respectivamente*), *entonces* $\Gamma, \neg\neg(A \vee B) \vdash \neg\neg C$. Así justificamos una modificación de la prueba por casos, en la que la fórmula de casos $A \vee B$ y la conclusión C están doblemente negadas. De aquí que, si reemplazamos la fórmula de inducción en la prueba de *148 por $\neg\neg(P(x) \vee Q(x))$, y la otra fórmula de casos por $\neg\neg(A(x) \vee \neg A(x))$ (que es demostrable intuicionistamente por *51a), la inducción vuelva a funcionar (usando *49a), y nos dé *148b.

Ahora podemos inferir el principio de mínimo número.

*149°. $\vdash \exists x A(x) \supset \exists y\,[A(y) \,\&\, \forall z\,(z < y \supset \neg A(z))]$.

(Principio de mínimo número).

*149a. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \supset \exists y\,[A(y) \,\&\, \forall z\,(z < y \supset \neg A(z))]$.

*149b. $\vdash \neg\neg \{\exists x A(x) \supset \exists y [A(y) \& \forall z (z < y \supset \neg A(z))]\}$.

(Versiones intuicionistas del principio de mínimo número).

DEMOSTRACIONES. *149 (o *149a). Supóngase $\exists x A(x)$; y para $\exists$-elim., $A(x)$. Sustitúyase x por $x'$ en *148 (o en la conclusión de *148a) para obtener $P(x') \vee Q(x')$. CASO 1: $P(x')$. De aquí, $\exists y [A(y) \& \forall z (z < y \supset \neg A(z))]$. CASO 2: $Q(x')$. De aquí con *135a, $\neg A(x)$, contradiciendo $A(x)$. Por $\neg$-elim. débil, $\exists y [A(y) \& \forall z (z < y \supset \neg A(z))]$.

*149b. Usando en lugar de *148b y la modificación de la prueba por casos, $\exists x A(x) \supset \neg\neg \exists y [A(y) \& \forall z (z < y \supset \neg A(z))]$. Ahora, úsese *60h, g.

Otras consecuencias de *148a son:

*150. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^x \exists y [y < x \& A(y)] \vee \neg \exists y [y < x \& A(y)]$.

*151. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^x \forall y [y < x \supset A(y)] \vee \neg\forall y [y < x \supset A(y)]$.

(De interés para el sistema intuicionista).

DEMOSTRACIONES. *150. A partir de *148a, $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^x \exists y [y < x \& A(y)] \vee \forall y [y < x \supset \neg A(y)]$. Pero $\vdash \forall y [y < x \supset \neg A(y)] \sim \forall y \neg [y < x \& A(y)]$ [*58b] $\sim \neg \exists y [y < x \& A(y)]$ [*86].

*151. Similarmente, aplicando *148a a $\neg A(x)$, y reemplazando $\neg\neg A(x)$ por $A(x)$ (ya que por *49c, $A(x) \vee \neg A(x) \vdash \neg\neg A(x) \sim A(x)$).

Como ejemplo de un teorema de teoría de números que requiere algunos conceptos ulteriores, trataremos el teorema de Euclides de que existe un número infinito de números primos. Puede expresarse esto diciendo que, para cualquier número $a$, hay un primo mayor que $a$. En efecto, debe haber un primo entre $a + 1$ y $a! + 1$, ambos inclusive, por el razonamiento que sigue. Todo entero positivo $n \leq a$ divide $a!$ De aquí que ninguno de ellos excepto 1 divida $a! + 1$. Pero $a! + 1 > 1$; de modo que es, o tiene como factor, un primo. Este primo está entre $a + 1$ y $a! + 1$, ambos inclusive.

Los dos casos pueden ser combinados si se repara en que el mínimo divisor de $a! + 1$ mayor que 1 es un primo mayor que $a$. Asimismo el razonamiento sigue siendo válido si se usa en lugar de $a!$ cualquier común múltiplo de 1, ..., $a$.

Preparando el camino para el tratamiento formal del teorema de Euclides, introducimos ahora "$a \mid b$" (léase "$a$ divide $b$" o "$a$ es un factor (divisor) de $b$") como abreviatura de $\exists c\,(ac = b)$. Podemos demostrar:

*152. $\vdash a \mid ab$. *153. $\vdash a \mid a$. *154. $\vdash a \mid b \,\&\, b \mid c \supset a \mid c$.

*155. $\vdash a > 1 \supset \neg(a \mid b \,\&\, a \mid b')$. *156. $\vdash b \neq 0 \supset (a \mid b \supset 0 < a \leq b)$.

(Propiedades de $\mid$.)

(SUGERENCIAS: Para *155, úsese $*137_1$, *145a (con *135a), *132, Ax. 15. Para *156, úsese *143a). A continuación introducimos "Pr($a$)" ("$a$ es primo") como abreviatura de $a > 1 \,\&\, \neg \exists c\,(1 < c < a \,\&\, c \mid a)$. Entonces el teorema de Euclides es expresado en el sistema formal por la fórmula $\exists b\,(\mathrm{Pr}\,(b) \,\&\, b > a)$.

Una dificultad para formalizar la demostración precedente es que el sistema no

tiene ningún término con que expresar la función $a$! Evitamos esto estableciendo:

*157. $\vdash \exists d\,[d>0 \,\&\, \forall b\,(0<b\leq a \supset b|d)]$.

(Existencia de comunes múltiplos de $1, \ldots, a$).

(DEMOSTRACION por inducción sobre $a$. Llámese a la fórmula "$\exists d\,A\,(a, d)$". Para la base, $\vdash A\,(0, 1)$. Para el paso induc. (preparatoriamente a $\exists$-elim.), $A\,(a, d) \vdash A\,(a', da')$.). Supóngase ahora, preparando $\exists$-elim.,

(1) $$d>0 \,\&\, \forall b\,(0<b\leq a \supset b|d).$$

La variable $d$ gobernada por esta fórmula tiene entonces el papel de $a!$; con mayor precisión, puede representar bajo la interpretación cualquier común múltiplo de $1, \ldots, a$.

Por (1), *144a y *153, $d'>1 \,\&\, d'|d'$. De aquí que $\exists e\,(e>1 \,\&\, e|d')$. Por el principio de mínimo número (*149),
$\exists b[b>1 \,\&\, b|d' \,\&\, \forall c\,(c<b \supset \neg\,(c>1 \,\&\, c|d'))]$. Supóngase, para $\exists$-elim.,

(2) $$b>1 \,\&\, b|d' \,\&\, \forall c\,(c<b \supset \neg\,(c>1 \,\&\, c|d')).$$

Supóngase $1<c<b \,\&\, c|b$. De $c<b$ por (2), $\neg\,(c>1 \,\&\, c|d')$; pero a partir de $1<c$, $c|b$, $b|d'$ (mediante (2)) y *154, $c>1 \,\&\, c|d'$. Por $\neg$- y $\forall$-introd., $\forall c \neg\,(1<c<b \,\&\, c|b)$; de donde por *86, $\neg\,\exists c\,(1<c<b \,\&\, c|b)$. Usando asimismo $b>1$ a partir de (2), Pr $(b)$.

Por (2), $b>1 \,\&\, b|d'$. De aquí por *155, $\neg\, b|d$. De aquí por (1), $b>a$.

Por &- y $\exists$-introd., $\exists b\,(\mathrm{Pr}\,(b) \,\&\, b>a)$. Ya que esta fórmula no contiene $b$ o $d$ libres, por $\exists$-elim. los supuestos (2) y (1) son descargados. Esto completa la demostración del teorema de Euclides en el sistema clásico.

Para demostrarlo en el sistema intuicionista, usando *149a en lugar de *149, queda por establecer $(e>1 \,\&\, e|d') \vee \neg\,(e>1 \,\&\, e|d')$. Con este fin, establecemos, primero:

*158. $\vdash a=b \vee \neg\, a=b$. *159. $\vdash a<b \vee \neg\, a<b$.

*160. $\vdash a|b \sim \exists c\,(c\leq b \,\&\, ac=b)$.

(Para ser usados en el tratamiento intuicionista del teorema de Euclides).

(Demuéstrese *158 y *159 por *139–*141; *160 similarmente a *156). Entonces demostramos sucesivamente $e>1 \vee \neg\, e>1$ (por *159), $e|d' \vee \neg\, e|d'$ (por *160, *138a, *150, *158), y $(e>1 \,\&\, e|d') \vee \neg\,(e>1 \,\&\, e|d')$ (de aquí por Observación 1(b) § 29 y Teorema 3 § 25). Así, tanto intuicionista como clásicamente:

*161. $\vdash \exists b\,(\mathrm{Pr}\,(b) \,\&\, b>a)$. (Teorema de Euclides).

El proceso de reconocer que las demostraciones en una teoría informal pueden ser formalizadas en un sistema formal dado es de análisis y estereotipia continua de argumentos que recurren en la teoría informal, hasta atemperar nuestros pasos, a medida que la teoría se desarrolle, con la condensación creciente del razonamiento informal. Intentamos reconocer sucesivamente como formalizables esos tipos de argumentos informales, y podemos registrar los resultados así obtenidos como reglas derivadas para el sistema formal. Esto es muy similar al proceso semi-formal de desarrollar una teoría informal a partir de postulados explícitamente establecidos; pero aquí hemos ido más lejos al postular tanto los principios lógicos como los metamatemáticos (en el sentido ordinario).

Informalmente, hemos usado la inducción matemática no sólo en la forma simple (u ordinaria), sino asimismo en una modificación llamada 'inducción de curso-de-valores' (cfr. § 7 incluyendo el Ejemplo 2, la prueba del Teorema 1 § 21, etc.). Es interesante reconocer ahora que en el sistema formal esta modificación puede ser derivada de la forma simple de inducción que es postulada para el sistema. La estableceremos como un esquema de teorema; el método de formular una regla sobre la base del esquema ha sido ilustrado suficientemente con respecto a la inducción simple (cfr. Esquema Axiomático 13 en § 19 con la regla de inducción en § 38).

En el primer esquema *162a, las expresiones A (0) y
$\forall x\,[\forall y\,(y \leq x \supset A(y)) \supset A(x')]$ formalizan la base y el paso de inducción, respectivamente; en la forma más compacta *162b, ambas son reunidas en la expresión singular $\forall x\,[\forall y\,(y < x \supset A(y))] \supset A(x)$.

*162a. $\vdash A(0) \,\&\, \forall x\,[\forall y\,(y \leq x \supset A(y)) \supset A(x')] \supset A(x)$.

*162b. $\vdash \forall x\,[\forall y\,(y < x \supset A(y)) \supset A(x)] \supset A(x)$.

(Inducción de curso-de-valores).

DEMOSTRACIONES. *162a. Supóngase $A(0) \,\&\, \forall x\,[\forall y\,(y \leq x \supset A(y)) \supset A(x')]$, dedúzcase $\forall y\,(y \leq x \,\&\, A(y))$ por inducción simple sobre x, e infiérase A (x) por $\forall$-elim.

Algunas veces las inducciones requieren una *base doble*; es decir, establecemos como la base $A(0)$ y $A(1)$, y luego para el paso de inducción inferimos $A(x'')$ de los dos casos precedentes $A(x)$ y $A(x')$. Esto puede ser tratado formalmente como una inducción de curso-de-valores, usando casos según $x' = 1$ o $x' > 1$ bajo el paso de inducción; o podemos hacerlo en una inducción simple usando $A(x) \,\&\, A(x')$ como la fórmula de inducción. Este recurso de usar una conjunción como la proposición de inducción se aplica similarmente a la *inducción a partir de una base k-doble* para cualquier $k \geq 2$ fijado, y asimismo a la *demostración inductiva de ciertas proposiciones simultáneamente.*

Los argumentos inductivos se presentan a veces en la forma de una *inducción descendente* o demostración por el *método de descenso infinito.* Este consiste en establecer que $A(x)$ es falso para todo $x$, demostrando que si $A(x)$ es verdadero para cualquier $x$, hay un número menor para el que es asimismo verdadero.

*163. $\vdash \forall x\,[A(x) \supset \exists y\,(y < x \,\&\, A(y))] \supset \neg A(x)$.

(Método de descenso infinito).

*163a. $\vdash \forall x\,[A(x) \supset \neg\neg \exists y\,(y < x \,\&\, A(y))] \supset \neg A(x)$.

(Versión adicional de interés para el sistema intuicionista).

DEMOSTRACIONES. Suponiendo la premisa de *163 o *163a, $\neg A(x)$ se sigue por una inducción de curso-de-valores.

OTRO METODO. Tomando $\neg A(x)$ como el A (x) de *162b, el resultado es equivalente a *163a por los pasos siguientes.
$\vdash \forall y\,(y < x \supset \neg A(y)) \supset \neg A(x) \sim \neg\,[\forall y \neg (y < x \,\&\, A(y)) \,\&\, A(x)]$ [*58b dos veces] $\sim A(x) \supset \neg \forall y \neg (y < x \,\&\, A(y))$ [*33, *58b] $\sim$
$A(x) \supset \neg\neg \exists y\,(y < x \,\&\, A(y))$ [*86]. Entonces *163 se sigue de *163a.

Demostraciones de *163a y *163 pueden asimismo obtenerse por reductio ad

absurdum a partir de *149 o de *149b; e inversamente *149b puede ser demostrado por reductio ad absurdum a partir de *163a (usando *60h, g). (En cada caso, la fórmula de una es deducible de la de la otra en el cálculo de predicados intuicionista).

Estos ejemplos sugieren que las formas de argumentación ordinariamente encontradas en una teoría elemental e informal de números volverán a ser formalizables en nuestro sistema formal. La carencia de funciones tales como $a!$ queda como un motivo de duda (aunque giramos en torno a ella al demostrar el teorema de Euclides). Se prestará atención a esta cuestión concerniente a funciones en §§ 41, 49, 59, 74, 82.

En §42 abordaremos la cuestión de la completud del sistema formal. Desde el punto de vista de la interpretación, esta cuestión incluye la de si todos los razonamientos posibles de la teoría elemental de números (no simplemente los comúnmente encontrados) son formalizables en el sistema, por lo menos en tanto que contribuyan a la demostración de proposiciones expresables en el sistema. Asimismo consideraremos una noción más específica, estrictamente metamatemática, de completud.

§ 41. **Calculación Formal.** Se dice que una fórmula A es (*formalmente*) *refutable*, si $\neg$ A es demostrable.

Una fórmula cerrada (final de § 32) es (*formalmente*) *decidible*, si A es o demostrable o refutable, es decir, si o $\vdash$ A o $\vdash \neg$ A.

El sistema formal de teoría de números (o un sistema con reglas de formación de tipo semejante) se dice que es (*simplemente*) *completo*, si toda fórmula cerrada A es formalmente decidible; (*simplemente*) *incompleto*, en el caso contrario de que haya una fórmula cerrada formalmente indecidible.

La restricción de que A sea cerrada es esencial aquí, a fin de que la noción metamatemática de completud simple tenga el significado pretendido. En caso contrario, bajo la interpretación de generalidad de las variables libres en A y $\neg$ A, la segunda fórmula no expresaría la negación de la proposición expresada por la primera (§32).

EJEMPLO 1. La fórmula $2 \mid a$ (esto es, $\exists c\,(0'' \cdot c = a)$ expresa: todo número $a$ es par; y $\neg\, 2 \mid a$ expresa: todo número $a$ es no par, es decir, todo número $a$ es impar. Ninguna de ambas proposiciones es verdadera; y, cosa que esperamos, ninguna de ambas fórmulas es demostrable. Pero $\forall a\, 2 \mid a$ expresa: todo número $a$ es par; y $\neg\, \forall a 2 \mid a$ expresa: no todo número $a$ es par. Por la ley clásica del tercio excluso, una de las dos proposiciones sería verdadera. En efecto, la segunda lo es; y la fórmula $\neg\, \forall a\, 2 \mid a$ es demostrable.

No aplicábamos la noción de simple completud a los cálculos de proposiciones y de predicados, porque las letras de proposición y de predicado desempeñan el papel de variables libres para la interpretación (§§28, 29, 36, 37). La simple completud es otro ejemplo de una noción de completud con un criterio positivo (§ 29).

Denominamos *numerales* a los términos $0$, $0'$, $0''$, ..., que representan los números naturales particulares bajo la interpretación del sistema, y los abreviamos por los mismos símbolos "0", "1", "2", ..., respectivamente, que usamos para los números naturales intuitivamente (como en §§ 17, 37). Además, siempre que hayamos introducido una letra itálica, tal como "$x$", para designar un número natural intuitivo, la correspondiente letra itálica en negrita "$\mathbf{x}$" designará el numeral correspondiente $0^{(x)}$, es decir $0'\cdots'$ con $x$ acentos ($x \geq 0$) (como en § 37). En

este contexto, podemos asimismo usar "$\mathbf{x}-1$" para designar el numeral con $x-1$ acentos (para $x>0$); no hay ambigüedad alguna, ya que no tenemos ningún "$-$" formal. Pero "$\mathbf{x}+1$" designa $0^{(x)}+0'$.

Sea $P(x_1, ..., x_n)$ un predicado de teoría de números intuitiva. Decimos que $P(x_1, ..., x_n)$ es *expresable numeralmente* en el sistema formal, si hay una fórmula $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$ con ninguna variable libre fuera de las variables distintas $x_1, ..., x_n$ tal que, para cada $n$-tuplo particular de números naturales $x_1, ..., x_n$,

(i) si $P(x_1, ..., x_n)$ es verdadero, entonces $\vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$, y

(ii) si $P(x_1, ..., x_n)$ es falso, entonces $\vdash \neg \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$.

En este caso, la fórmula $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$ *expresa numeralmente* el predicado $P(x_1, ..., x_n)$ (con las variables formales $\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n$ correspondientes a las variables intuitivas respectivas $x_1, ..., x_n$).

Nuestro uso metamatemático de esta noción será confinado a casos en que haya un procedimiento de decisión para el predicado $P(x_1, ..., x_n)$ (§ 30), de modo que para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$.

(iii) $P(x_1, ..., x_n)$ es verdadero, o $P(x_1, ..., x_n)$ es falso.

Usando (iii) con (i) y (ii),

(iv) $\vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ o $\vdash \neg \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$;

así $\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ es decidible para cada $x_1, ..., x_n$, o como diremos $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$ es *numeralmente decidible*. La fórmula $\neg\, \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$ expresa numeralmente, entonces, el predicado no-$P(x_1, ..., x_n)$.

La noción de expresabilidad numeral da sólo uno de los sentidos en que una fórmula $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$ puede expresar un predicado $P(x_1, ..., x_n)$. Requiere más aparato deductivo del sistema del simplemente necesitado para que $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$ exprese $P(x_1, ..., x_n)$ bajo la interpretación del simbolismo (con la interpretación de la forma nominal para $\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n$, § 31), que, después de todo, no requiere nada deductivamente. No requiere que se puedan demostrar formalmente fórmulas que expresen diversas propiedades generales del predicado.

EJEMPLO 2. Cada una de las fórmulas $\exists c\,(c'+a=b)$ y $\exists c\,(a+c'=b)$ expresa $a<b$ (con $a$, $b$ correspondiendo a $a$, $b$) bajo los significados de los símbolos formales, como podíamos ver en § 17 antes de conocer cosa alguna sobre reglas deductivas.

La primera fórmula $\exists c\,(c'+a=b)$ (que es la que abreviamos permanentemente por "$a<b$", §§ 17, 39) expresa numeralmente $a<b$ en el sistema formal de teoría de números, e incluso en el sistema sin el esquema de inducción (o Axiomas 20 y 21), como establecemos ahora.

Para (i), debemos mostrar que, si $a$ y $b$ son dos números naturales cualesquiera tales que $a<b$, entonces $\vdash \exists c\,(c'+\mathbf{a}=\mathbf{b})$. Como ilustración de lo dicho, sea $a=3$, $b=5$. Ahora $\vdash 0''+0'''=(0''+0'')'$ [Ax. 19] $=(0''+0')''$ [Ax. 19, Ax. 17] $=(0''+0)'''$ [Ax. 19, Ax. 17 dos veces] $=0''''$ [Ax. 18, Ax. 17 tres veces]. Así (usando tácitamente *102), $\vdash 0''+0'''=0''''$. Por $\exists$-introd. $\vdash c(c'+0'''+0'''')$, esto es, $\vdash \exists c\,(c'+3=5)$. Una serie de pasos similar nos dará $\vdash \exists c\,(c'+\mathbf{a}=\mathbf{b})$ para cualesquiera $a$ y $b$ tales que $a<b$. Para demostrar en general esto, podemos

establecer primero como un lema por inducción informal sobre $k$ que para cualquier término t, y usando Axs. 17–19 (y *102), $\vdash t + 0^{(k)} = t^{(k)}$.

Para (ii) debemos mostrar que, si $a$ y $b$ son cualesquiera dos números naturales tales que $a$ no es $< b$, entonces $\vdash \neg\ \exists c\,(c' + \mathbf{a} = \mathbf{b})$. Si no $a < b$, entonces $a \geq b$. Como ilustración de lo dicho, sea $a = 3$, $b = 2$. Por aplicaciones de Axs. 17–19, exactamente como arriba excepto en que $c'$ reemplaza $0''$ (o tomando $c'$ en lugar de $0''$ como el t del lema), $\vdash c' + 0''' = c''''$. De aquí $c' + 0''' = 0'' \vdash c'''' = 0''$ $\vdash c'' = 0$ [usando Ax. 14 dos veces]. Pero por Ax. 15, $\vdash \neg\, c'' = 0$. Por reductio ad absurdum ($\neg$-introd.), $\vdash \neg\ c' + 0''' = 0''$; de donde por $\forall$-introd. y *86 § 35, $\vdash \neg\ \exists c\,(c' + 0''' = 0'')$, esto es, $\vdash \neg\ \exists c\,(c' + 3 = 2)$. Similarmente para otros $a$ y $b$ cualesquiera tales que $a \geq b$, $\vdash \neg\ \exists c\,(c' + \mathbf{a} = \mathbf{b})$.

Así $\exists c\,(c' + a = b)$ expresa numeralmente $a < b$ en el sistema formal sin el Esquema Axiomático 13. Pero no podemos esperar que en este sistema fórmulas, que expresen propiedades generales de $<$, como lo son las de *134a–146b (con "$a < b$" como abreviatura de $\exists c\,(c' + a = b)$), sean demostrables, excepto en unos pocos casos (p. ej., *135b).

La otra fórmula $\exists c\,(a + c' = b)$ (que por *119 es equivalente a $\exists c\,(c' + a = b)$ en el sistema total con el Esquema Axiomático 13), al parecer, no expresa numeralmente $a < b$ en el sistema sin el Esquema Axiomático 13. Por supuesto, lo hace en el sistema total (o incluso sin el Esquema Axiomático 13, si se procura que *118 o *119 esté suministrado como un axioma).

Los resultados numerados de esta sección (comenzando con *(164)) se refieren en primer lugar al sistema de teoría de números total (como a lo largo de todo este capítulo). Pero de hecho para ellos no necesitamos ninguna nueva aplicación de la regla de inducción formal (o Esquema Axiomático 13), si se procura que podamos disponer de ciertas fórmulas particulares previamente demostradas mediante ella. Con más precisión, podemos manejarnos aquí con el cálculo de predicados, los axiomas de teoría de números particulares 14–21, la propiedad de reemplazo de la igualdad que depende de tener, además, únicamente *104–*107 § 38, y *137 (o *136) § 39, excepto en unos pocos casos que rastrearemos y listaremos al final de esta sección. (Este subsistema del sistema total fue singularizado en un resumen* de Raphael Robinson, 1950, en un contexto que ha de discutirse en § 76).

*Los predicados*

*(164) $a = b$, *(165) $a < b$

*son expresados numeralmente por las fórmulas respectivas* $a = b$ *y* $a < b$, *esto es,* $\exists c\,(c' + a = b)$.

DEMOSTRACIONES. *(165). Por Ejemplo 2; o (en el sistema de teoría de números total) usando *135a, *134a, *140, *141.

*Si* x *es una variable,* A (x) *y* B (x) *son fórmulas, k es un número natural, y es una variable distinta de* x *y libre para* x *en* A (x) *y que no ocurra libre en* A (x), *y* t *es un término que no contenga* x *y sea libre para* x *en* A (x):

*166. $A(0), A(1), \ldots, A(\mathbf{k} - 1) \vdash \forall x\,(x < \mathbf{k} \supset A(x))$.

*166a. $A(0), A(1), \ldots, A(\mathbf{k}) \vdash \forall x\,(x < \mathbf{k} \supset A(x))$.

*167. $\forall x\,(x < \boldsymbol{k} \supset A(x)) \vdash A(\boldsymbol{i})$, para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

*167a. $\forall x\,(x \leq \boldsymbol{k} \supset A(x)) \vdash A(\boldsymbol{i})$, para $i = 0, 1, \ldots, k$.

*168. $A(t) \vdash \forall x\,[x \geq t \supset \exists y\,(y \leq x \,\&\, A(y))]$.

*169. $\forall x\,[x < t \supset A(x)], \forall x\,[x \geq t \supset B(x)] \vdash \forall x\,[A(x) \vee B(x)]$.

Cuando $k = 0$, la lista A (0), A (1), ..., A ($\boldsymbol{k} - 1$) de supuestos para *166 es vacía, y no hay ningún A ($\boldsymbol{i}$) para *167.

DEMOSTRACIONES. *166. Si podemos demostrar que A(0), A(1), ..., A ($\boldsymbol{k} - 1$), $x < \boldsymbol{k} \vdash A(x)$, entonces *166 se seguirá por $\supset$- y $\forall$-introd. Por $*137_k$ (o por su prueba, a partir de *137 o *136), $\vdash x=0 \vee x=1 \vee \ldots \vee x=\boldsymbol{k}-1 \vee x=\boldsymbol{k} \vee \exists y(x=y^{(k+1)})$. En conformidad con ello, por $\vee$-elim. con $\neg$-elim. débil y $\exists$-elim., bastará deducir o bien A (x) o una contradicción a partir de A (0), A (1), ..., A ($\boldsymbol{k} - 1$), $x < \boldsymbol{k}$ con cada uno de los $x = 0$, $x = 1$, ..., $x = \boldsymbol{k} - 1$, $x = \boldsymbol{k}$, $x = y^{(k+1)}$ a su vez. Pero (usando ahora la presentación informal, al comienzo de § 38), a partir de cada uno de los $x = 0$, $x = 1$, ..., $x = \boldsymbol{k} - 1$ con el correspondiente A (0), A (1), ..., A ($\boldsymbol{k} - 1$), obtenemos A (x) por reemplazo (Corolario 2 Teorema 24 § 38). A partir de $x = \boldsymbol{k}$ con $x < \boldsymbol{k} - 1$ por reemplazo, $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{k}$, contradiciendo $\neg\, \boldsymbol{k} < \boldsymbol{k}$ que se puede demostrar por *(165). A partir de $x = y^{(k+1)}$ y $x < \boldsymbol{k}$ por reemplazo, $y^{(k+1)} < \boldsymbol{k}$, esto es, $\exists z\,(z' + y^{(k+1)} = \boldsymbol{k})$. Supóngase (para $\exists$-elim.) $z' + y^{(k+1)} = \boldsymbol{k}$. De ahí por $k+1$ aplicaciones del Ax. 19 (con algunas aplicaciones del Ax. 17), $(z' + y)^{(k+1)} = \boldsymbol{k}$; de donde por $k$ aplicaciones del Ax. 14, $(z' + y)' = 0$, contradiciendo Ax. 15. (Cfr. la Observación de la demostración de *140 § 39).

*167. Ya que $i < k$, por *(165) $\vdash \boldsymbol{i} < \boldsymbol{k}$.

*169. Usando casos a partir de *139. OBSERVACION. Requerimos *139 con $b$ sustituido por t. Cuando t es un numeral $\boldsymbol{k}$, la fórmula $a < \boldsymbol{k} \vee a = \boldsymbol{k} \vee a > \boldsymbol{k}$ puede ser demostrada a partir de *137 o *136 similarmente a *166. (Usese *(165) en los primeros $k$ casos. Para el caso $k+2$, $a = b^{(k+1)} = (b')^{(k)} = (b' + 0)^{(k)}$ [Axs. 18, 17] $= b' + \boldsymbol{k}$ [Axs. 19, 17]).

Aunque cada una de las fórmulas $a < 0 \vee a = 0 \vee a > 0$, $a < 1 \vee a = 1 \vee a > 1$, $a < 2 \vee a = 2 \vee a > 2$, ... es demostrable en el sistema carente del Esquema Axiomático 13 (e incluso Axs. 14, 15, 20, 21), pero que tenga la fórmula de *137 o *136 como un axioma adicional, no tenemos ninguna razón para creer que la fórmula $a < b \vee a = b \vee a > b$ de *139 sea demostrable en este sistema.

El resto de esta sección puede ser pospuesto, si el lector lo prefiere, justo hasta antes de § 49.

Bajo la interpretación del simbolismo formal, una función de teoría de números $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es expresada por un término $t(x_1, \ldots, x_n)$.

EJEMPLO 3. La función $(a+1)^2$ es expresada bajo la interpretación por los términos $(a') \cdot (a')$, $aa + (2a + 1)$, etc.

Las únicas funciones de teoría de números que pueden ser expresadas directamente de este modo son los polinomios. No obstante, encontraremos que es posible parafrasear muchas proposiciones en que ocurran otras funciones de teoría de números, de modo que aquellas proposiciones resulten expresables en el simbolismo formal a pesar de la carencia de términos que expresen las funciones mismas.

Así pues, sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una función de teoría de números, y sea $P(x_1, \ldots, x_n, w)$ el predicado $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$, que llamamos el *predicado representante*

de la función $\varphi(x_1, ..., x_n)$. Si el predicado $P(x_1, ..., x_n, w)$ es expresado en el sistema por una fórmula $P(x_1, ..., x_n, w)$, y $C(x)$ es un predicado expresado por $C(x)$, entonces $C(\varphi(x_1, ..., x_n))$ es expresado por $\exists w (P(x_1, ..., x_n, w) \& C(w))$ (y asimismo por $\forall w (P(x_1, ..., x_n, w) \supset C(w))$).

Esto sugiere que, si el predicado representante de una función puede expresarse en el sistema, hay la posibilidad de poder expresar y desarrollar la teoría de la función en el sistema siempre y cuando se pueda disponer de un término para la función misma. Una investigación metamatemática para confirmar esta conjetura será abordada más tarde (§ 74).

Ahora (y en § 49) buscamos alguna información sobre la cuestión de qué funciones pueden expresarse mediante predicados representantes, o brevemente, qué funciones son 'representables'. Hasta aquí, hemos estado hablando sólo de la interpretación del simbolismo, pero ahora introduciremos una noción para la representación de funciones, análoga a la 'expresabilidad numeral' para la expresión de predicados.

La condición necesaria y suficiente para que un predicado $P(x_1, ..., x_n, w)$ sea el predicado representante de alguna función (de valor único) $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es que para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ exista un único $w$ tal que $P(x_1, ..., x_n, w)$. Cuando esta condición se da, la función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ representada puede ser definida 'descriptivamente' a partir del predicado $P(x_1, ..., x_n, w)$ *como el w tal que* $P(x_1, ..., x_n, w)$.

Ahora introducimos "$\exists!xA(x)$" bajo las estipulaciones usuales sobre las letras (comienzo de § 40 y final de § 33) como abreviatura de $\exists x [A(x) \& \forall y (A(y) \supset x = y)]$ (léase "Hay un único x tal que A(x)"). Entonces, si $P(x_1, ..., x_n, w)$ es expresado por la fórmula $P(x_1, ..., x_n, w)$, la condición de que $P(x_1, ..., x_n, w)$ sea un predicado representante es expresada por la fórmula $\forall x_1 ... \forall x_n \exists! wP(x_1, ..., x_n, w)$, o simplemente por $\exists! wP(x_1, ..., \Delta_n, w)$ cuando $x_1, ..., x_n$ tienen la interpretación de generalidad (§ 32).

*Si* x, y *y* z *son variables distintas*, A(x) *es una fórmula*, t, r *y* s *son términos*, $\Gamma$ *son fórmulas que no contengan* x *libre*, y, z, r, s *y* t *son libres para* x *en* A(x), z *y* x *no ocurren en* t, *e* y *y* z *no ocurren libres en* A(x):

*170. *Si* $\Gamma$, A(t), A(x) $\vdash$ t = x, *manteniendo en* A(x) *constantes las variables libres, entonces* $\Gamma$, A(t) $\vdash \exists! xA(x)$.

*171. $\vdash \exists! x (t = x)$.

*172. $A(r), A(s), \exists! xA(x) \vdash r = s$.

*173. $r \neq s, A(r), \exists! xA(x) \vdash \neg A(s)$.

(Propiedades de $\exists!$).

*174a. $A(t) \& \forall z (z < t \supset \neg A(z)) \vdash \exists! y [A(y) \& \forall z (z < y \supset \neg A(z))]$.

*174b. $\vdash \exists y [A(y) \& \forall z (z < y \supset \neg A(z))] \sim \exists! y [A(y) \& \forall z (z < y \supset \neg A(z))]$.

(Unicidad del mínimo x tal que A(x)).

DEMOSTRACIONES. *174a. Usando *170, *139. Cfr. la Observación en la demostración de *169.

Se dice que una función de teoría de números intuitiva $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es *representable numeralmente* en el sistema formal, si hay una fórmula $P(x_1, ..., x_n, w)$ sin variables libres fuera de las variables distintas $x_1, ..., x_n, w$, tal que para cada $n$-tuplo particular de números naturales $x_1, ..., x_n$.

(v) si $\varphi(x_1, ..., x_n) = w$, entonces $\vdash P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$, y

(vi) $\vdash \exists!\, wP(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, w)$.

En este caso, la fórmula $P(x_1, ..., x_n, w)$ *representa numeralmente* la función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ (con la correspondencia obvia de variables).

Nuestro uso finitista (esto es, intuicionista) de esta noción será confinado a casos en que haya un procedimiento de cálculo para la función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ (§ 30), de modo que el $w$ de (v) pueda ser hallado para cualquier $x_1, ..., x_n$ dado (o tácitamente se hará de ello una hipótesis).

Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es representada numeralmente por $P(x_1, ..., x_n, w)$, esta última expresa numeralmente el predicado representante $P(x_1, ..., x_n, w)$ de $\varphi$. Así pues, de (v) y (vi) podemos inferir que para todo $w$,

(vii) si $\varphi(x_1, ..., x_n) \neq w$, entonces $\vdash \neg P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$,

como sigue. Tómese el $\boldsymbol{w}$ de (v) como el r y el $\boldsymbol{w}$ de (vii) como el s para *173. Usese *(164) para llegar a demostrar $r \neq s$.

No tenemos ninguna razón para creer que, inversamente, (vii) para todo $w$, junto con (v), necesariamente implique (vi).

Hemos usado la $\exists!$-notación para establecer (vi) compactamente. $\exists!\, xA(x)$ es equivalente a $\exists x A(x) \;\&\; \forall x \forall y (A(x) \;\&\; A(y) \supset x = y)$, en la que la primera parte expresa existencia y la segunda unicidad. La parte de la existencia de (vi) se sigue ya de (v); de modo que lo que (vi) añade es la unicidad.

En la representabilidad numeral de funciones (al igual que en la expresabilidad numeral de predicados), nos estamos limitando a la consideración de los valores para argumentos particulares, con contraste con las propiedades generales. Las cuestiones consideradas son, de este modo, análogas a cuestiones computacionales en aritmética informal.

Por ejemplo, no hemos necesitado al definir la 'representabilidad numeral' que la fórmula $\exists!\, wP(x_1, ..., x_n, w)$ fuese demostrable con $x_1, ..., x_n$ como variables formales. Esto sería más fuerte que nuestra exigencia de que (vi) valga para todo $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ con $x_1, ..., x_n$ como variables intuitivas, que se seguiría de ello por sustitución (*66 § 32 con $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ como los $t_1, ..., t_n$). Esta condición más fuerte (sin (v)) será el prerrequisito de la teoría que ha de desarrollarse en § 74. Para las seis funciones, que consideraremos ahora, lo obtenemos también fácilmente.

*Las funciones*

*(175) $a'$, *(176) $a + b$, *(177) $ab$

*son representadas numeralmente por las fórmulas respectivas* $a' = b$, $a + b = c$, $ab = c$.

DEMOSTRACIONES. *(176). Por *171 y la forma de la fórmula representante $a + b = c$, (vi) es inmediato (e incluso $\vdash \exists!\, c(a + b = c)$). Para (v), debemos mostrar que para cada par $a$, $b$ de números naturales; si $c = a + b$, entonces $\vdash \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 3$ (entonces $c = 5$), tenemos $\vdash \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ (esto es, $\vdash 0'' + 0''' = 0'''''$) como para (i) en Ejemplo 2.

*177 Similarmente. La demostración de (v) puede ser realizada convenientemente como una inducción sobre $b$. PASO INDUC. Dígase $c = ab$, $d = ab'$ ($= ab + a = c + a$). Entonces $\vdash \boldsymbol{ab' = ab + a}$ [Ax. 21] $= \boldsymbol{c + a}$ [hip. ind., *104] $= \boldsymbol{d}$ [por (v) para *(176)].

Algunos principios generales iluminarán nuestro tratamiento de los ejemplos siguientes. Una fórmula *prima* es aquélla que no contiene ningún símbolo lógico, esto es, $s = t$ para algunos términos s y t.

(A) *Cada fórmula prima cerrada* $s = t$ *es formalmente decidible* (*y* $s = t$ *se puede demostrar o refutar según que los términos* s *y* t *expresen los mismos o diferentes números bajo la interpretación usual de* $0, ', +, \cdot$). *Cada fórmula prima es numeralmente decidible.*

DEMOSTRACION. Usese *(176), *(177), Teorema 24 § 38, y *(164).

EJEMPLO 4. $s = t$ sea $0''' \cdot 0'''' + 0' = (0''' \cdot 0'')''$, esto es, abreviado $3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)''$. Ahora, $\vdash 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)'' \sim 12 + 1 = (3 \cdot 2)''$ [ya que por *(177), $\vdash 3 \cdot 4 = 12] \sim 13 = (3 \cdot 2)''$ [ya que por *(176), $\vdash 12 + 1 = 13] \sim 13 = 8$ [ya que por *(177), $\vdash 3 \cdot 2 = 6$; y reparando en que $6''$, esto es, $(0''''')''$, es 8]. Pero por *(164), $\vdash \neg\, 13 = 8$. De aquí que $\vdash \neg\, 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)''$. Hemos usado tácitamente el Teorema 24(b) o su Corolario 1, y *21 § 26, al concluir por la cadena que $\vdash 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)'' \sim 13 = 8$; y *30, *18b, o *20 y el Corolario del Teorema 6, al combinarlo con $\vdash \neg\, 13 = 8$ para inferir que $\vdash \neg\, 3 \cdot 4 + 1 = (3 \cdot 2)''$.

(B) *Sea* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula que contenga libres sólo las variables* $x_1, \ldots, x_n$, *y supóngase que* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *es numeralmente decidible* (*y expresa numeralmente* $P(x_1, \ldots, x_n)$). *Entonces: Si* $t_1, \ldots, t_n$ *son términos que no contienen ninguna variable* (*y, por tanto, expresan números* $t_1, \ldots, t_n$), $P(t_1, \ldots, t_n)$ *es decidible* [*y* $P(t_1, \ldots, t_n)$ *es demostrable o refutable según* $P(t_1, \ldots, t_n)$ *sea verdadera o falsa*]. *Si* $t_1, \ldots, t_n$ *son términos libres para* $x_1, \ldots, x_n$ *en* $P(x_1, \ldots, x_n)$, $P(t_1, \ldots, t_n)$ *es numeralmente decidible.*

Se demuestra al igual que (A), que es el caso especial de (B) para el que $P(x_1, \ldots, x_n)$ es $x_1 = x_2$.

(C) *Una fórmula compuesta de fórmulas cerradas decidibles que usen sólo los operadores* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ *del cálculo proposicional es decidible* (*y el que sea demostrable o refutable puede ser determinado por uso de las tablas de verdad clásicas de* 2 *valores*, § 28, *tomando* t *y* f *como 'demostrable' y 'refutable', respectivamente*).

Por Lema 13 § 29 con Teorema 3 § 25.

(D) *De aquí: Cada fórmula sin variables es decidible. Cada fórmula sin cuantificadores es numeralmente decidible.*

(E) *Sea* $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ *una fórmula numeralmente decidible que contenga libre sólo las variables distintas* $x_1, \ldots, x_n$, y; *y sea* z *una variable distinta de* $x_1, \ldots, x_n$, y. *Entonces* $\forall y\,(y < z \supset A(x_1, \ldots, x_n, y))$ *y* $\exists y(y < z \,\&\, A(x_1, \ldots, x_n, y))$

*son numeralmente decidibles* ($y$ $\forall y\,(y < z \supset A(x_1, \ldots, x_n, y)$ *es demostrable o refutable según que todos los* $A(x_1, \ldots, x_n, 0)$, $A(x_1, \ldots, x_n, 1), \ldots, A(x_1, \ldots, x_n, z-1)$ *sean demostrables o algunos sean refutables*; $\exists y\,(y < z \,\&\, A(x_1, \ldots, x_n, y))$, *según que algunos sean demostrables o todos sean refutables). Similarmente con* $\leq$ *en lugar de* $<$.

DEMOSTRACION (para $<$). Usese *166, *167, *(165) (asimismo *58b §27, *86 § 35).

Considérese la división de dos enteros, $a$ por $b$. Por ejemplo, $13 = 5 \cdot 2 + 3$, donde $3 < 5$. En palabras, cuando 13 es dividido por 5, el cociente es 2 y el resto es 3. Usualmente, el proceso de división, y con ello la función cociente $[a/b]$ y la función resto rs $(a, b)$ son definidas sólo para $b \neq 0$. Para evitar la perturbación de discutir ahora funciones definidas parcialmente, extendemos las definiciones al caso $b = 0$ estableciendo que $[a/0] = 0$, rs $(a, 0) = a$. Esto preserva la ley $a = b\,[a/b] + \text{rs}\,(a, b)$. Entonces $b/a$ ("$b$ divide $a$") si, y sólo si, rs $(a, b) = 0$.

*Las funciones*

*(178) $[a/b]$, *(179) rs $(a, b)$

*son representadas numeralmente por las fórmulas respectivas* $Q(a, b, q)$ *y* $R(a, b, r)$ *tales que, para cualesquiera numerales* $\boldsymbol{q}$ *y* $\boldsymbol{r}$:

*178a. $Q(a, b, \boldsymbol{q}) \vdash \exists!\, q\, Q(a, b, q)$. *179a. $R(a, b, \boldsymbol{r}) \vdash \exists!\, r\, R(a, b, r)$.

DEMOSTRACIONES. *(179) y *179a. Sea $S(a, b, r)$ la fórmula

$$\exists q\,(q \leq a \,\&\, a = bq + r \,\&\, r < b) \vee (b = 0 \,\&\, r = a).$$

Entonces sea $R(a, b, r)$

$$S(a, b, r) \,\&\, \forall e\,(e < r \supset \neg\, S(a, b, e)).$$

Ahora *179a se obtiene inmediatamente a partir de *174a (siendo $\boldsymbol{r}$ el t).

A fin de establecer (v) para *(179), considérese cualquier par de números $a$ y $b$, y sea $r = \text{rs}\,(a, b)$ y $q = [a/b]$. CASO 1: $b \neq 0$. Ahora $a = bq + r$; de aquí por (A), $\vdash \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r}$. Asimismo $r < b$; de aquí por *(165), $\vdash \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$. Por &-introd. (o C)), $\vdash \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r} \,\&\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$. Pero $q \leq a$; así por (E), $\vdash \exists q\,(q \leq \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r} \,\&\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b})$. Por V-introd., $\vdash \exists q\,(q \leq \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r} \,\&\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{b} = 0 \,\&\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a})$, es decir, $\vdash S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$. Ahora sea $e$ cualquier número $< r$. Entonces $e < b$ (de modo que por *(165), $\vdash \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b}$). Para cualquier número $p$, $a \neq bp + e$ (ya que $q$, $r$ es el único par de números con $r < b$ tal que $a = bq + r$); así por (A), $\vdash \neg\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bp} + \boldsymbol{e}$. De allí por (C), $\vdash \neg\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bp} + \boldsymbol{e} \,\&\, \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b})$. En particular esto vale para $p = 0, 1, \ldots, a$; así por (E), $\vdash \neg\, \exists q\,(q \leq \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{e} \,\&\, \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b})$. Pero $b \neq 0$; de aquí por *(164), $\vdash \neg\, \boldsymbol{b} = 0$. Por *(164), o bien $\vdash \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}$ o $\vdash \neg\, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}$. Combinando estos resultados por (C), $\vdash \neg\, \exists q\,(q \leq \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{e} \,\&\, \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{b} = 0 \,\&\, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}))$, esto es, $\vdash \neg\, S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e})$. Esto era para cualquier $e < r$, o sea, vale para $e = 0, 1, \ldots, r - 1$; de modo que por (E), $\vdash \forall e\,(e < \boldsymbol{r} \supset \neg\, S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, e))$. De ahí y $\vdash S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$ por &-introd., $\vdash S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}) \,\&\, \forall e\,(e < \boldsymbol{r} \supset \neg\, S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, e)$, esto es, $\vdash R(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$, como había de demos-

trarse. CASO 2: $b=0$. Similarmente. (Resumiendo: De la forma de R $(a,b,r)$, se sigue por (A), *(165), (C) y (E), que R $(a, b, r)$ es numeralmente decidible. Por pasos formales paralelos a la interpretación, verificamos que R $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$ se puede demostrar más bien que refutar cuando $r=\text{rs}(a, b)$).

Ahora (vi) para *(179) se sigue al sustituir $a$, $b$ por cualesquiera numerales $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en *179a, y usando (v).

*La función*

*(180) $\text{rs}(c, (i' \cdot d)')$

*es representada numeralmente por una fórmula* B (c, d, i, w) *tal que, para cualquier numeral* $\mathbf{w}$:

*180a. $\text{B}(\text{c}, \text{d}, \text{i}, \mathbf{w}) \vdash \exists!\, \text{w}\text{B}(\text{c}, \text{d}, \text{i}, \text{w})$.

DEMOSTRACION. Denoten "c", "d", "i", "v", "w" respectivamente $c, d, i, q, r$, y B (c, d, i, w) sea R $(\text{c}, (\text{i}' \cdot \text{d})', \text{w})$. Usese *179a, sustitución (*66), *(179) y (B).

El tratamiento anterior no suministra la propiedad más fuerte $\vdash \exists!\text{w}\text{P}(\text{x}_1, \ldots, \text{x}_n, \text{w})$ para las fórmulas que representen numeralmente $[a/b]$, rs $(a, b)$ y rs $(c, (i' \cdot d)')$. No obstante usando *146a y *146b (con *123, *140, *141, *142a y *143a) ello puede ser también establecido y pueden ser dadas fórmulas representantes más simples equivalentes a la anterior.

*178b. $\vdash \text{Q}(a, b, q) \sim \exists r(a=bq+r \,\&\, r<b) \vee b=q=0$.

*179b. $\vdash \text{R}(a, b, r) \sim \exists q(a=bq+r \,\&\, r<b) \vee (b=0 \,\&\, r=a)$.

*180b. $\vdash \text{B}(\text{c}, \text{d}, \text{i}, \text{w}) \sim \text{v}(\text{c}=(\text{i}' \cdot \text{d})' \cdot \text{v}+\text{w} \,\&\, \text{w}<(\text{i}' \cdot \text{d})')$.

*178c. $\vdash \exists!\, q\text{Q}(a, b, q)$. *179c. $\vdash \exists!\, r\text{R}(a, b, r)$.

*180c. $\vdash \exists!\, \text{w}\text{B}(\text{c}, \text{d}, \text{i}, \text{w})$.

LEMA 18a. *Los resultados* *(164)–*180c *y* (A)–(E) *de esta sección exceptuando* *169 *y* *174a *cuando* t *no es un numeral*, *174b, *178b, c, *179b, c *y* *180b, c, *valen para el sistema formal carente del Esquema Axiomático* 13, *pero teniendo como axiomas adicionales particulares de teoría de números las fórmulas de* *104–*107 *y de* *137 *o* *136 ("sistema de Robinson").

§ 42. **Teorema de Gödel.** A partir de un resultado de Presburger 1930, cabe aducir pruebas metamatemáticas de consistencia y completud y un procedimiento de decisión para el sistema formal omitiendo la regla de formación y axiomas para · (cfr. Ejemplo 2 § 79). Presburger trabaja con un sistema clásico de la aritmética de los enteros, pero Hilbert y Bernays 1934, págs. 359 ss., adaptan su método esencialmente al sistema clásico presente, y Joan Ross ha comprobado que la adaptación vale asimismo para el sistema intuicionista).

Para el sistema total (o sistemas que esencialmente equivalgan a él) estas cuestiones resultaron ser muy refractarias. Las demostraciones de consistencia de Ackermann 1924-25 y von Neumann 1927 dan como resultado que el sistema es consistente restringiendo el uso del postulado de inducción (Esquema Axiomático 13) al caso en que la variable de inducción x no ocurra libre dentro del alcance de un

cuantificador de la fórmula de inducción A (x). (Cfr. Teorema 55 § 79. La restricción excluye p. ej. nuestras demostraciones de *105, *136 y *148).

Esta situación se iluminó en 1931 con la aparición de dos relevantes teoremas de Gödel "sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathemática y sistemas afines". Designamos al primero de estos teoremas, que implica al otro como corolario, "Teorema de Gödel", aunque es sólo uno de una serie de importantes contribuciones de su autor. Estos dos teoremas, que han pasado a ser los dos más ampliamente considerados en esta materia, influyen en la totalidad del programa y de la filosofía de la metamatemática.

Los resultados metamatemáticos presentados hasta aquí en este libro han sido alcanzados a través de pasos más o menos sugeridos por la interpretación del sistema. Los aludidos resultados de Gödel se obtienen por un tipo de razonamiento metamatemático que penetra más profundamente en la estructura del sistema formal considerado como un sistema de objetos.

Como se ha establecido en § 16, los objetos del sistema formal que estudiamos son diversos símbolos formales, expresiones formales (esto es, secuencias finitas de símbolos formales), y secuencias finitas de expresiones formales. Hay un infinito enumerable de símbolos formales dados al principio. De aquí que, por los métodos de § 1, los objetos formales constituyan una clase enumerable. Especificando una enumeración particular de ellos y refiriendo nuestros enunciados metamatemáticos a los índices de la enumeración en lugar de a los objetos enumerados, la metamatemática se convierte en una rama de la teoría de números. Con esto, surge la posibilidad de que el sistema formal contenga fórmulas que, consideradas a la luz de la enumeración, expresen proposiciones de su propia metamatemática.

Ulterior estudio revelará que esta posibilidad puede ser explotada, y que, con el uso del método de la diagonal de Cantor (§ 2), puede ser hallada una fórmula cerrada A que, interpretada por una persona que conozca esa enumeración, asevere su propia indemostrabilidad.

Esta fórmula A guarda una profunda analogía con la proposición de la paradoja de Epiménides (§ 11). Pero ahora hay un modo de escapar de la paradoja. Por la construcción de A,

(1) A significa que A es indemostrable.

Supongamos, como esperamos que suceda, que las fórmulas que expresen proposiciones falsas sean indemostrables en el sistema, esto es,

(2) las fórmulas falsas son indemostrables.

Ahora bien, la fórmula A no puede ser falsa, porque por (1) ello significaría que no es indemostrable, contradiciendo (2). Pero A puede ser verdadera, supuesto que que sea indemostrable. Realmente, esto es lo que debe suceder. Suponiendo que A sea demostrable, por (1) A es falsa y, en consecuencia, por (2) indemostrable. Por reductio ad absurdum (intuitiva), esto da que A es indemostrable, pero entonces por (1) A es también verdadera. Por tanto el sistema es incompleto en el sentido de que falla en proporcionar una demostración de toda fórmula que sea verdadera bajo la interpretación (si (2) es así, o si al menos la fórmula particular A es indemostrable, si es falsa).

La negación $\neg$ A de la fórmula es también indemostrable, puesto que A es verdadera; de aquí que $\neg$ A sea falsa; y por (2), $\neg$ A es indemostrable. Así es incompleto también el sistema en el sentido simple definido metamatemáticamente

en la última sección (si (2) es así, o si al menos a cada una de las fórmulas particulares A y ¬ A le sucede ser indemostrable, si es falsa).

Lo anterior, por supuesto, es sólo una consideración heurística preliminar del razonamiento de Gödel. Debido a la naturaleza de este argumento intuitivo, que tan de cerca bordea y sin embargo evita una paradoja, es importante que sea apreciada la demostración metamatemática estrictamente finitista del teorema de Gödel. Cuando esta prueba metamatemática es examinada en todo detalle, se ve que es de la naturaleza de la metamatemática ordinaria. En efecto, si decidimos hacer de nuestra metamatemática una parte de la teoría de números (ahora una teoría de números informal más bien que formal) al hablar de los índices en la enumeración, y si ignoramos las interpretaciones del sistema objeto (ahora sistema de números), el teorema se torna en una proposición de la teoría ordinaria elemental de números. Su prueba, aun siendo muy larga y tediosa en estos términos, no está abierta a ninguna objeción que no envuelva igualmente partes de la matemática tradicional consideradas de la mayor seguridad.

Ahora podemos dar la demostración metamatemática rigurosa, adoptando un lema de los resultados de los dos capítulos siguientes. Nuestra numeración de los lemas y teoremas corresponde al orden lógico.

Al hacer uso de la idea de enumerar los objetos formales, consideraciones prácticas aconsejan que los índices de objetos formales sean correlacionados a los objetos por una regla tan simple como sea posible. Podemos modificar (no esencialmente) el argumento heurístico anterior por usar, más bien que una enumeración en el sentido usual, una enumeración con lapsos en los números naturales, esto es, una correlación de números naturales distintos a los distintos objetos formales, sin que sean usados en la correlación todos los números naturales. Llamamos a esta una numeración de Gödel, y al número correlacionado a un objeto formal su número de Gödel. (Algunas veces se establecen numeraciones de Gödel separadas para los símbolos formales, las expresiones formales y las secuencias finitas de expresiones formales. Si se hace así, entonces, cuando se habla de un número como el número de Gödel de un símbolo o de una expresión, o de una secuencia de expresiones, se está haciendo referencia en cada caso a una correlación diferente).

En relación a cualquier numeración específica de Gödel, para cualquier $n$ que sea el número de Gödel de una fórmula, designe "$A_n$" la fórmula. (Para otros $n$ no necesitamos definir $A_n$). Podemos escribir esta fórmula $A_n$ también como "$A_n(a)$", en la que se exhibe la variable libre $a$, de acuerdo con nuestra notación de sustitución (§ 18).

LEMA 21. *Hay una numeración de Gödel de los objetos formales tal que los predicados* $A(a, b)$ *y* $B(a, c)$ *definidos como sigue son expresables numeralmente* (§ 41) *en el sistema formal.*

$A(a, b)$: $a$ es el número de Gödel de una fórmula (a saber, $A_a(a)$), y $b$ es el número de Gödel de una demostración de la fórmula $A_a(\mathbf{a})$.

$B(a, c)$: $a$ es el número de Gödel de una fórmula (a saber, $A_a(a)$), y $c$ es el número de Gödel de una demostración de la fórmula $\neg A_a(\mathbf{a})$.

Sean ahora $A(a, b)$ y $B(a, c)$ fórmulas particulares que expresen numeralmente los predicados $A(a, b)$ y $B(a, c)$, respectivamente, para la numeración de Gödel

dada por el lema. Las dos fórmulas A $(a, b)$ y B $(a, c)$ podrían mostrarse realmente, tras tener la prueba del lema (que será completada en § 52).

Considérese la fórmula $\forall b \neg$ A $(a, b)$ que contiene $a$ y ninguna otra variable libre. Esta fórmula tiene un número de Gödel, llamémosle $p$, y es la misma fórmula que hemos designado "$A_p(a)$". Ahora considérese la fórmula $A_p(\boldsymbol{p})$, es decir,

$A_p(\boldsymbol{p})$: $\qquad \forall b \neg A(\boldsymbol{p}, b)$,

que no contiene ninguna variable libre. Repárese en que hemos usado el método de la diagonal de Cantor al sustituir $a$ por el numeral $\boldsymbol{p}$ en $A_p(a)$ para obtener esta fórmula.

Para relacionar esto con el bosquejo heurístico preliminar, podemos interpretar la fórmula $A_p(\boldsymbol{p})$ desde nuestra perspectiva de la numeración de Gödel como expresando la proposición de que $A_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, esto es, es una fórmula A que asevera su propia indemostrabilidad.

En el argumento metamatemático, serán reemplazados por equivalentes metamatemáticos los supuestos del argumento heurístico de que el sistema no permitiría la demostración de A o de $\neg$ A, siendo la fórmula falsa. Para la indemostrabilidad de A, si es falsa, este equivalente será la consistencia (simple) del sistema (§ 28). Para la indemostrabilidad de A, si es falsa, necesitaremos una condición más fuerte, denominada '$\omega$-consistencia', que ahora definiremos.

El sistema formal (o un sistema con reglas de formación similares) se dice que es *$\omega$-consistente*, si para ninguna variable x y fórmula A(x) son verdaderas todas las siguientes:

$$\vdash A(0), \quad \vdash A(1), \quad \vdash A(2), \ldots; \quad \vdash \neg \forall x A(x)$$

(o en otras palabras si no ambas $\vdash$ A $(\boldsymbol{n})$, para cualquier número natural $n$, y $\vdash \neg \forall x A(x)$. En el caso contrario de que para algún x y A (x) todas las A (0), A (1), A (2), ... y también $\neg \forall x A(x)$ sean demostrables, el sistema es *$\omega$-inconsistente.*

Repárese en que la $\omega$-consistencia implica la consistencia simple. Pues si A es cualquier fórmula demostrable que no contenga ninguna variable libre, escribiéndola como "A (x)" donde x es una variable, todas las A (0), A (1), A (2), ... son demostrables (bajo nuestra notación de sustitución § 18, cada una de ellas es simplemente A); y de aquí que, si el sistema es $\omega$-consistente, $\neg \forall x A(x)$ sea un ejemplo de fórmula indemostrable (cfr. § 28).

TEOREMA 28. *Si el sistema formal de teoría de números es (simplemente) consistente, entonces no* $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$; *y si el sistema es $\omega$-consistente, entonces no* $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$. *Así, si el sistema es $\omega$-consistente, entonces es (simplemente) incompleto, con* $A_p(\boldsymbol{p})$ *como un ejemplo de una fórmula indecidible.* (Teorema de Gödel, en la forma original).

DEMOSTRACION de que, si el sistema es consistente, entonces no $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$. Supóngase (para una reductio ad absurdum intuitiva) que $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$, es decir, supóngase que $A_p(\boldsymbol{p})$ es demostrable. Entonces hay una demostración de ello; sea $k$ el número de Gödel de esta demostración. Entonces $A(p, k)$ es verdadera. De aquí que, ya que A $(a, b)$ fue introducida bajo el lema como una fórmula que expresa numeralmente $A$ $(a, b)$, $\vdash$ A $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$. Por $\exists$-introd., $\vdash \exists b A(\boldsymbol{p}, b)$. De aquí por *83a, $\vdash \neg \forall b \neg A(\boldsymbol{p}, b)$. Pero esto es $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$. Ello, con nuestro supuesto de que $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$, contradice la hipótesis de que el sistema es consistente. Por consiguiente,

por reductio ad absurdum, no $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$, como había que demostrar. (Podíamos haber contradicho asimismo la consistencia usando $\forall$-elim. para inferir $\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$ a partir de $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$).

DEMOSTRACION de que, si el sistema es $\omega$-consistente (y por ello también consistente), entonces no $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$. Por la consistencia y la primera parte del teorema, $A_p(\boldsymbol{p})$ no es demostrable. De aquí que cada uno de los números naturales 0, 1, 2, ... no sea el número de Gödel de una demostración de $A_p(\boldsymbol{p})$; es decir, $A(p, 0)$, $A(p, 1)$, $A(p, 2)$, ... son todas falsas. De aquí que, ya que $A(a, b)$ expresa numeralmente $A(a, b)$, $\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, 0)$, $\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, 1)$, $\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, 2)$, ... Por la $\omega$-consistencia, entonces no $\vdash \neg \forall b \neg A(\boldsymbol{p}, b)$. Pero esto es no $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$, que es lo que había que demostrar.

Hemos dado primero la forma original de Gödel del teorema, por cuanto que la demostración es intuitivamente más simple y sigue el bosquejo heurístico. Rosser 1936 ha mostrado, no obstante, que, usando un ejemplo ligeramente más complicado de una fórmula indecidible, la hipótesis de la $\omega$-consistencia puede ser exluida, y la incompletud demostrada a partir de la mera consistencia (simple). Considérese la fórmula $\forall b [\neg A(a, b) \vee \exists c (c \leq b \,\&\, B(a, c))$. Esta tiene un número de Gödel, llamémosle $q$. Ahora considérese la fórmula $A_q(\boldsymbol{q})$, o sea,

$$A_q(\boldsymbol{q}): \qquad \forall b [\neg A(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c (c \leq b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))].$$

Podemos interpretar la fórmula $A_q(\boldsymbol{q})$ desde nuestra perspectiva de la numeración de Gödel como aseverando que para cualquier demostración de $A_q(\boldsymbol{q})$ existe una demostración de $\neg A_q(\boldsymbol{q})$, con un número de Gödel igual o menor, que bajo la hipótesis de la consistencia simple implica que $A_q(\boldsymbol{q})$ es indemostrable.

TEOREMA 29. *Si el sistema formal de teoría de números es (simplemente) consistente, entonces ni* $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$ *ni* $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$; *esto es, si el sistema es consistente, entonces es (simplemente) incompleto, con* $A_q(\boldsymbol{q})$ *como una fórmula indecidible* (Forma de Rosser del teorema de Gödel).

DEMOSTRACION de que, si el sistema es consistente, entonces no $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$. Supóngase que $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$. Como antes (usando $q$ en lugar de $p$), $\vdash A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$. También, bajo nuestra hipótesis de consistencia, el supuesto de que $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$ implica que no $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$, esto es, $\neg A_q(\boldsymbol{q})$ es indemostrable. De aquí que, en particular, cada una de las $B(q, 0), B(q, 1), \ldots, B(q, k)$ sea falsa. Puesto que $B(a, b)$ expresa numeralmente $B(a, b)$, por tanto $\vdash \neg B(\boldsymbol{q}, 0)$, $\vdash \neg B(\boldsymbol{q}, 1)$, ..., $\vdash \neg B(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$. De aquí por *166a, $\vdash \forall c (c \leq \boldsymbol{k} \supset \neg B(\boldsymbol{q}, c))$. Esto con $\vdash A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$ da por &- y $\exists$-introd., $\vdash \exists b [A(\boldsymbol{q}, b) \,\&\, \forall c (c \leq b \supset \neg B(\boldsymbol{q}, c))]$. De aquí por *58b y *86, $\vdash \exists b [A(\boldsymbol{q}, b) \,\&\, \neg \exists c (c \leq b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. De aquí por *57b (y *70), $\vdash \exists b \neg [\neg A(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c (c \leq b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. De aquí por *85a, $\vdash \neg \forall b [\neg A(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c (c \leq b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. Pero esto es $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$. De aquí, como antes, no $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$, como había que demostrar.

DEMOSTRACION de que, si el sistema es consistente, entonces no $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$. Supóngase que $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$, es decir, que $\neg A_q(\boldsymbol{q})$ es demostrable. Entonces hay una demostración de ello; sea $k$ el número de Gödel de esta demostración. Entonces $B(q, k)$ es verdadera. De aquí $\vdash B(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$. Por *168, $\vdash \forall b [b \geq \boldsymbol{k} \supset$

$\exists c\,(c \leq b \,\&\, \mathrm{B}(\boldsymbol{q}, c))]$. También, como antes (con $q$ en vez de $p$), $\vdash \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{q}, 0)$, $\vdash \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{q}, 1)$, ..., $\vdash \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{q}, k-1)$. Por *166, $\vdash \forall b\,[b < \boldsymbol{k} \supset \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{q}, b)]$. Ahora por *169, $\vdash \forall b\,[\neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c\,(c \leq b \,\&\, \mathrm{B}(\boldsymbol{q}, c))]$. Pero esto es $\vdash \mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$. De aquí que no $\vdash \neg\, \mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ como había que demostrar.

Obsérvese que no hemos demostrado absolutamente que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$, $\neg\, \mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$, $\mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$, $\neg\, \mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ son indemostrables, sino sólo que, si el sistema es (simplemente) consistente, $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$, $\mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$, $\neg\, \mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ son indemostrables, y si el sistema es $\omega$-consistente, $\neg\, \mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable.

Considérese nuestra demostración de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, si el sistema es consistente. Si una demostración de la consistencia del sistema nos fuese suministrada ahora, prefijándola a la anterior se completaría una demostración de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable.

Suponiendo que existe una demostración tal de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, podríamos, usando la representación de los objetos formales por números de Gödel, expresarla como una demostración de la teoría informal de números. Ahora nos planteamos la cuestión de si esta última demostración podría formalizarse en el sistema.

Al formalizarla, la misma fórmula $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ sería el enunciado formalizado de lo que es demostrado, es decir, que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable. Entonces, una demostración formalizada de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable sería una demostración formal de $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$. Por el Teorema 28, una prueba tal no puede existir, si el sistema es consistente.

Así, si tuviéramos una demostración informal de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, la demostración no podría ser formalizada dentro del sistema, si el sistema fuera consistente. La supuesta demostración informal había de constar de dos partes, primero de una supuesta demostración de la consistencia del sistema, y segundo de la demostración, ya dada (para la primera mitad del Teorema 28), de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, si el sistema es consistente.

Habiendo mostrado que la segunda parte puede ser realmente formalizada en el sistema, tenemos un método para mostrar que la primera no puede serlo, si el sistema es consistente. Esto da lugar al teorema siguiente. Recapitularemos este argumento antes de establecer el teorema.

La aserción de que el sistema es (simplemente) consistente puede ser expresada en el sistema formal por medio de la numeración de Gödel de modos diversos. Sea $C(a, b)$ (o $D(a, c)$) el predicado: $a$ es el número de Gödel de una fórmula, a saber: $\mathrm{A}_a$, y $b$ (o $c$) es el número de Gödel de la demostración de $\mathrm{A}_a$ (de $\neg\, \mathrm{A}_a$). Hay fórmulas $\mathrm{C}(a, b)$ y $\mathrm{D}(a, c)$ expresando $C(a, b)$ y $D(a, c)$, respectivamente (§ 52). La definición original de la consistencia en §28 es entonces reproducida directamente en el formalismo por la fórmula $\neg\, \exists a\,[\exists b \mathrm{C}(a, b) \,\&\, \exists c \mathrm{D}(a, c)]$. Por la segunda versión de la definición y el hecho de que $\neg\, 1 = 0$ es demostrable (Ax. 15), el sistema es consistente, si, y sólo si, la fórmula particular $1 = 0$ es indemostrable. Sea $r$ el número de Gödel de esta fórmula. Entonces $\mathrm{A}_r(\boldsymbol{r})$ es la misma fórmula, y la consistencia es expresada por $\neg\, \exists b \mathrm{A}(\boldsymbol{r}, b)$ o $\forall b \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{r}, b)$. Llamemos a una de estas fórmulas, según nuestra preferencia, "Consis".

La aserción de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable es expresada, mediante la numeración de Gödel, por $\forall b \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{p}, b)$, que es $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$.

La demostración intuitiva de la primera mitad del Teorema 28 es una demostración de que

(I) {el sistema es consistente} implica {$\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable}.

Si nos propusiéramos ahora formalizar en el sistema toda la demostración metamatemática de (I), usando la numeración de Gödel, tendríamos entonces

(II) $$\vdash \text{Consis} \supset A_p(\boldsymbol{p}).$$

Supóngase ahora metamatemáticamente que $\vdash$ Consis. Entonces, a partir de (II) tendríamos por $\supset$-elim., $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$. Por el Teorema 28, esto es imposible, si el sistema es consistente. Por reductio ad absurdum metamatemática, ello daría lugar al teorema siguiente. (La prueba podría basarse también en el Teorema 29, ya que $\vdash \forall b \neg A(\boldsymbol{q}, b) \supset A_q(\boldsymbol{q})$).

TEOREMA 30. *Si el sistema formal de teoría de números es (simplemente) consistente, entonces no* $\vdash$ *Consis; es decir, si el sistema es consistente, entonces no hay ninguna demostración de consistencia para él por métodos formalizables en el sistema* (Teorema segundo de Gödel).

Las demostraciones de los Teoremas 28 y 29 se completarán cuando hayamos establecido el Lema 21 en el Capítulo X. Para la demostración del Teorema 30, seguirá persistiendo un hueco a subsanar en el paso de (I) a (II). Es éste un ejercicio de formalización de una demostración dada informalmente de considerable longitud, para la que no tenemos espacio en este libro.

Hilbert y Bernays 1939 la realizan para un cierto sistema formal $Z_\mu$ (cfr. págs. 283 ss., especialmente págs. 306-324), y de allí infieren (págs. 324-328) que el teorema vale también para un sistema $Z$, que difiere de nuestro sistema clásico de teoría de números en respectos inesenciales (principalmente, en el uso de variables de predicado, cfr. final de § 37, y en postulados de igualdad, cfr. § 73). De aquí que el Teorema 30 valga para nuestro sistema clásico; y puede inferirse que vale para nuestro sistema intuicionista (al menos cuando Consis es $\forall b \neg A(\boldsymbol{r}, b)$ o $\neg \exists b A(\boldsymbol{r}, b)$, y $A(a, b)$ es escogido convenientemente) por uso de Gödel 1932-33 (cfr. Teorema 60 (b2) § 81 y Nelson 1947 págs. 326-327).

Puede observarse que este ejercicio se necesita sólo si se va a usar como la fórmula Consis una formalización directa de la definición original de la consistencia (simple) o un equivalente propio. Intuitivamente $A_p(\boldsymbol{p})$ expresa ella misma un equivalente, por medio de la larga demostración intuitiva del teorema de Gödel. Puesto que por el Teorema 28, si el sistema es consistente, $A_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, y por § 28, si $A_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, el sistema es consistente; y la indemostrabilidad de $A_p(\boldsymbol{p})$ es expresada por $A_p(\boldsymbol{p})$.

¿Cuál es el significado de estos resultados para el programa de metamatemática propuesto? Esperamos, ciertamente, que el sistema formal sea consistente. Si es así, entonces por el Teorema 29 es necesariamente incompleto. No hemos tenido éxito al querer formalizar la teoría de números informal de modo completamente explícito, de manera que cada proposición o su negación sea una consecuencia de axiomas explícitamente establecidos obtenida mediante reglas explícitamente establecidas (§ 15).

Tomando el supuesto de la consistencia (simple) en su sentido finitista, esto es, si la consistencia puede ser demostrada metamatemáticamente, entonces el sistema es incompleto asimismo en el sentido de que hay proposiciones en él expresables, que son verdaderas sobre fundamentos finitistas, pero formalmente indemostrables, siendo tres de tales proposiciones expresadas por $A_p(\boldsymbol{p})$, $A_q(\boldsymbol{q})$ y Consis.

Para el problema de demostrar la consistencia metamatemáticamente, el Teore-

ma 30 tiene la consecuencia de que los métodos en que hemos de basarnos en la demostración deben incluir algunos que caigan fuera de la colección de los métodos formalizados en el sistema. Ello no es a priori incompatible con el anterior requisito de que tales métodos no incluyan todo lo que caiga dentro, siendo nuestra sospecha sobre alguno de ellos el motivo para el proyecto formalista de intentar la demostración. Ello desafía al matemático a producir métodos de demostración finitista más poderosos que los comúnmente usados en la teoría elemental de números.

Hay una ulterior implicación para los problemas de completud y consistencia. Supóngase que nuestro sistema es (simplemente) consistente. Entonces, como en la demostración de la segunda mitad del Teorema 28, $A_p(\boldsymbol{p})$ es indemostrable, pero $\vdash A(\boldsymbol{p}, 0)$, $\vdash A(\boldsymbol{p}, 1)$, $\vdash A(\boldsymbol{p}, 2)$, ... De este modo tenemos una fórmula A (x) (a saber $\neg A(\boldsymbol{p}, b)$) tal que $\vdash A(0)$, $\vdash A(1)$, $\vdash A(2)$, ..., pero no $\vdash \forall x A(x)$ (que es $A_p(\boldsymbol{p})$). Tarski 1933a da el nombre de *ω-incompletud* a esta situación. Si dicha situación $\vdash \neg \forall x A(x)$ (que es $\neg A_p(\boldsymbol{p})$), el sistema sería ω-inconsistente. El descubrimiento de que un sistema pueda ser ω-incompleto revela la posibilidad de que pueda ser ω-inconsistente sin ser simplemente inconsistente. Definidamente lo es el sistema obtenido en nuestro sistema tomando $\neg A_p(\boldsymbol{p})$ como un nuevo axioma, bajo el supuesto de que el nuestro es simplemente consistente. Para ver que este sistema es simplemente consistente, observemos que si B y $\neg$ B fueran demostrables en él, entonces en el sistema original B y $\neg$ B serían deducibles de $\neg A_p(\boldsymbol{p})$ (final de § 20); de aquí por $\neg$-introd., $\neg\neg A_p(\boldsymbol{p})$ sería demostrable; y por $\neg$-elim. (o intuicionistamente por $\mathrm{IVa}_2 \supset \mathrm{IVa}_1$, del Corolario del Teorema 17 § 35), $A_p(\boldsymbol{p})$ sería demostrable, contradiciendo el Teorema 28. Aquí son definibles, evidentemente, órdenes todavía más altos de completud y consistencia.

No interesa que nuestro sistema sea ω-inconsistente, aun cuando sea consistente. En particular, si la consistencia simple fuera demostrable metamatemáticamente, entonces la fórmula $\neg A_p(\boldsymbol{p})$ expresaría bajo la interpretación una proposición que contradiría a otra que fuera verdadera sobre bases finitistas; y en caso de que $\neg A_p(\boldsymbol{p})$ fuera demostrada, siguiendo a Hilbert y Bernays (1939 pág. 282) llamaríamos al sistema *externamente inconsistente*, esto es, inconsistente con respecto a la interpretación finitista. De este modo una demostración de mera consistencia simple no aseguraría a la matemática formalizada contra la posibilidad de establecer algo intuitivamente falso. (Esto fue advertido por vez primera por Finsler 1926 en conexión con un sister a que no es formal en nuestro sentido. Cfr. también Gödel 1931-2a).

Supóngase que nuestro sistema es simplemente consistente. Para abreviar, llámese a una fórmula "verdadera" ("falsa") si expresa una proposición verdadera (falsa), bajo la interpretación. Sea B (x) una fórmula que exprese numeralmente un predicado $B(x)$, al que expresará bajo la interpretación. Entonces, para cada número natural $x$, la fórmula $B(\boldsymbol{x})$ es demostrable si, y sólo si, es verdadera. La fórmula $\forall x B(x)$ es verdadera si es demostrable (en vista de $\forall$-elim.); pero no a la inversa en general (p. ej. $A_p(\boldsymbol{p})$). La fórmula $\exists x B(x)$ es demostrable si es verdadera (en vista de $\exists$-introd.); pero no hemos mostrado la metamatemáticamente inversa (p. ej. $\exists b A(\boldsymbol{p}, b)$, a partir de la cual $\neg A_p(\boldsymbol{p})$ se sigue por *83a, y de la que así sabemos que es falsa, aunque no lo sepamos sin suponer asimismo que sea indemostrable la ω-consistencia).

Así (cfr. §14) una demostración de la consistencia (simple) sería suficiente en orden a justificar el uso de nuestro sistema clásico para demostrar enunciados "reales"

intuicionistamente por una digresión a través de los enunciados "ideales", para enunciados "reales" de las formas B (**x**) y ∀xB (x), pero sin llegar tan lejos como hemos mostrado en el caso de los de la forma ∃xB (x).

Supóngase que añadimos al sistema $A_p$ (**p**), $A_q$ (**q**) o Consis como un nuevo axioma, y repetimos el proceso total para obtener una sucesión de sistemas. Puede mostrarse que, si esos sistemas son consistentes, entonces la clase de fórmulas demostrables de la forma ∀xB(x) es sucesivamente ampliada. Gödel 1931-2 establece que eso mismo es verdadero de los sistemas obtenidos admitiendo sucesivamente tipos más altos de variables (por lo menos, suponiendo la $\omega$-consistencia). Excepto que carezcamos de demostraciones de propiedades de consistencia apropiadas, esto muestra (cfr. § 14) que se añaden construcciones teóricas sucesivamente más altas a la clase de enunciados "reales" del tipo original que estén comprendidos. Gödel 1936 establece asimismo que en los sistemas más altos un número infinito de fórmulas previamente demostrables tienen demostraciones mucho más breves.

Hasta aquí tenemos el teorema de Gödel sólo para nuestro sistema formal particular (excepto para las últimas observaciones, que se refieren a una sucesión de sistemas). Se plantea la cuestión de si no puede depender de algunas particularidades de la presente formalización de la lógica, y puede ser evitada en alguna otra. En los capítulos siguientes, además de completar la demostración del lema requerido del teorema de Gödel, alcanzaremos un punto de apoyo desde el cual podremos discutir estas cuestiones para sistemas formales en general, de los cuales el sistema formal estudiado aquí sería un ejemplo (§ § 60, 61).

PARTE III

# FUNCIONES RECURSIVAS

CAPITULO IX

# FUNCIONES RECURSIVAS PRIMITIVAS

§ 43. **Funciones recursivas primitivas.** Para establecer el lema del teorema de Gödel, desarrollaremos una teoría intuitiva acerca de una cierta clase de funciones y predicados de teoría de números, mostrando eventualmente que todo predicado de la clase es expresable numeralmente en el sistema formal (§ 49), y que los dos predicados $A(a, b)$ y $B(a, c)$ del lema, pertenecen a esa clase (§ 52). Esto nos ahorrará buena parte del trabajo que requeriría un desarrollo minucioso dentro del sistema formal.

Exceptuando la aplicación al referido lema, la teoría de esas funciones y predicados será desarrollada independientemente del sistema formal de los capítulos precedentes. En esta teoría, al igual que en metamatemática, utilizaremos solamente métodos finitistas.

Hemos descrito a la serie de los números naturales

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''',\ \ldots,$$

ó 0, 1, 2, 3, ..., como la clase de los objetos generados a partir de un objeto primitivo 0 por medio de una operacion primitiva $'$ ó $+1$. Esto constituye una definición inductiva de la clase de los números naturales (§ 6).

La demostración por inducción, como método de demostración de un teorema $T(y)$ para todo número natural $y$, corresponde inmediatamente a este modo de generar los números (§ 7). La *definición por inducción* (que no debe ser confundida con la 'definición inductiva' §§ 6, 53), asimismo llamada *definición recursiva*, es el método análogo de definir una función $\varphi(y)$ o un predicado $P(y)$ que pertenezcan a la teoría de números. En primer lugar se da $\varphi(0)$ o $P(0)$ (el valor de la función o predicado teniendo a 0 como argumento). Después, para cualquier número natural $y$, se expresa $\varphi(y')$ o $P(y')$ (el valor que sigue inmediatamente al que corresponde a $y$) en términos de $y$ y de $\varphi(y)$ o $P(y)$ (el valor correspondiente a $y$). Análogamente, podemos concluir que bajo tales circunstancias, el valor $\varphi(y)$ o $P(y)$ de la función o predicado está definido para todo número natural $y$. Porque las dos partes de la definición nos capacitan, una vez hayamos generado cualquier número natural $y$, para determinar al mismo tiempo el valor $\varphi(y)$ o $P(y)$.

Para examinar esto con más detalle, escribiremos el par de ecuaciones

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(0) = q. \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)), \end{cases}$$

para expresar la definición de una función $\varphi(y)$ por inducción sobre $y$, donde $q$ es un número natural dado, y $\chi(y, z)$ es una función de teoría de números dada de dos variables.

Entonces, por ejemplo, el valor $\varphi(4)$ se determina así. Para generar 4, generamos sucesivamente 0, 1, 2, 3, 4. Por la primera ecuación, el valor $\varphi(0)$ será el número

dado $q$; entonces, por la segunda ecuación, el valor $\varphi(1)$ será $\chi(0, \varphi(0))$, esto es, (utilizando el valor $\varphi(0)$ ya obtenido), $\chi(0, q)$, el cual (puesto que $\chi(y, z)$ es una función dada) es un número dado; a su vez, el valor $\varphi(2)$ será $\chi(1, \varphi(1))$, esto es, $\chi(1, \chi(0, q))$; el valor $\varphi(3)$ será $\chi(2, \varphi(2))$, esto es, $\chi(2, \chi(1, \chi(0, q)))$; y finalmente, el valor $\varphi(4)$ será $\chi(3, \varphi(3))$, esto es, $\chi(3, \chi(2, \chi(1, \chi(0, q))))$.

Así tenemos un proceso mediante el cual, para cada número natural $y$, sobre la base de la posible generación de $y$ en la secuencia de números naturales, queda determinado un número correspondiente $\varphi(y)$. Y al ser así asociado con $y$ un número $\varphi(y)$, resulta definida, para cada $y$, una función particular de teoría de números $\varphi$ cuyos valores respectivos son los referidos números $\varphi(y)$.

Esta función $\varphi$ satisface las ecuaciones (1), si se considera a éstas como ecuaciones funcionales que contengan una función desconocida $\varphi$, puesto que toda ecuación particular comprendida en (1) (a saber, $\varphi(0) = q$, $\varphi(0') = \chi(0, \varphi(0))$, $\varphi(1') = \chi(1, \varphi(1))$, ...) queda satisfecha a medida que se van seleccionando los sucesivos números $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... También es esta $\varphi$ la única función que satisface a las ecuaciones (1), consideradas en cuanto funcionales, puesto que el proceso por el que determinamos los sucesivos números $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... a partir de las referidas ecuaciones (1), puede ser interpretado como mostrativo de que cualquier función $\varphi$ que satisfaga las ecuaciones, ha de tener los valores seleccionados.

En otras definiciones por inducción, la función definida $\varphi$ depende de variables adicionales $x_2, \ldots, x_n$, llamadas *parámetros*, que tienen valores fijos a todo lo largo de la inducción sobre $y$.

EJEMPLO 1. Considérese intuitivamente las ecuaciones

$$\begin{cases} a + 0 = a, \\ a + b' = (a + b)', \end{cases}$$

a las que hemos encontrado en el simbolismo formal como Axiomas 18 y 19. Estas ecuaciones definen las funciones $a + b$ por inducción sobre $b$, con $a$ como parámetro, y $'$ como una función previamente conocida. Por su parte, las ecuaciones

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0, \\ a \cdot b' = (a \cdot b) + a \end{cases}$$

definen $a \cdot b$ por inducción sobre $b$, con $a + b$ como función conocida; y

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^{b'} = a^b \cdot a \end{cases}$$

definen $a^b$ por inducción sobre $b$, con $a \cdot b$ como función conocida.

Un ejemplo de definición de un predicado por inducción se dará más tarde (Ejemplo 2 § 45).

¿Qué funciones de teoría de números son definibles por inducción? Para plantear esta cuestión con exactitud, hemos de especificar qué funciones han de tomarse como inicialmente conocidas, y qué operaciones, incluyendo las formas de definición por inducción, se van a permitir para definir ulteriores funciones.

Estableceremos ahora unas cuantas precisiones con vistas a la introducción de funciones que sean definibles por inducción de una manera elemental. Estas funciones recibirán el nombre de 'recursivas primitivas'.

Cada una de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones siguientes (I)–(V) define una función de teoría de números $\varphi$, cuando $n$ y $m$ son enteros positivos, $i$ es un entero tal que $1 \leq i \leq n$, $q$ es un número natural, y $\psi, \chi_1, ..., \chi_m, \chi$ son funciones de teoría de números dadas con el indicado número de variables.

(I) $$\varphi(x) = x'.$$

(II) $$\varphi(x_1, ..., x_n) = q.$$

(III) $$\varphi(x_1, ..., x_n) = x_i.$$

(IV) $$\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n)).$$

(Va) $$\begin{cases} \varphi(0) = q, \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)). \end{cases}$$

(Vb) $$\begin{cases} \varphi(0, x_2, ..., x_n) = \psi(x_2, ..., x_n), \\ \varphi(y', x_2, ..., x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n). \end{cases}$$

((Va) constituye el caso de (V) para $n = 1$, y (Vb) para $n > 1$).

Una función es *recursiva primitiva* si es definible por una serie de aplicaciones de estas cinco operaciones de definición.

Esta definición puede darse en forma más detallada, análogamente a la definición de fórmula demostrable para el sistema formal (§ 19), lo cual, utilizando por ejemplo la segunda versión, sería como sigue.

Las antedichas ecuaciones y pares de ecuaciones (I)–(V), serán consideradas por nosotros como esquemas. Su función es análoga a la de los postulados, desempeñando (I)–(III) el papel de esquemas axiomáticos (o más estrictamente, siendo (I) análogo a un axioma particular), y (IV) y (V) el papel de reglas de inferencia.

Una función $\varphi$ es denominada una *función inicial* si $\varphi$ satisface la Ecuación (I), o la Ecuación (II) para unos particulares $n$ y $q$, o la Ecuación (III) para unos particulares $n$ e $i$.

Una función $\varphi$ es denominada una *dependiente inmediata* de otras funciones, si $\varphi$ satisface la Ecuación (IV) para unos particulares $n$ y $m$, siendo $\psi, \chi_1, ..., \chi_m$ las otras funciones, o las Ecuaciones (Va) para un $q$ particular, siendo $\chi$ la otra función, o las Ecuaciones (Vb) para un $n$ particular, siendo $\psi, \chi$ las otras funciones.

Una función $\varphi$ se denomina *recursiva primitiva*, si hay una secuencia finita $\varphi_1, ..., \varphi_k$ $(k \geq 1)$ de (ocurrencias de) funciones (denominada una *descripción recursiva primitiva de* $\varphi$), tal que cada función de la secuencia o es una función inicial, o una dependiente inmediata de funciones precedentes de la secuencia, y la última función $\varphi_k$ es la función $\varphi$.

§ 44. **Definición explícita.** El primer problema de este capítulo es reconocer como recursivas primitivas diversas funciones que nos pueden ser ya conocidas por otros conductos. (De manera análoga, al estudiar el sistema formal deducíamos de los axiomas ulteriores teoremas formales, y reglas derivadas como métodos generales de obtención de nuevos teoremas).

Se han dado formas estereotipadas a los esquemas, a fin de simplificar la defi-

nición de la clase de funciones recursivas primitivas. En lo que resta de la presente sección, aprenderemos a resumir varias aplicaciones de ellos.

El Esquema (I) nos da la *función sucesor* como una de las funciones iniciales. A este respecto, la designaremos por $S$. A las funciones iniciales dadas por el Esquema (II), las llamamos las *funciones constantes*, y las designamos por $C_q^n$. A las funciones dadas por el Esquema (III), las llamamos las *funciones de identidad*, y las designamos por $U_i^n$.

Al Esquema (IV), lo llamamos el esquema de *definición por sustitución.* La expresión para el valor ambiguo de $\varphi$ se obtiene sustituyendo las variables de $\psi$ (cfr. § 10) por expresiones correspondientes a los valores ambiguos de $\chi_1, ..., \chi_m$. Escribimos a veces la función $\varphi$, definida por una aplicación de este esquema, como $\mathbf{S}_m^n(\psi, \chi_1, ..., \chi_m)$.

Una *definición explícita* de una función consiste en dar una expresión correspondiente a su valor ambiguo, construida sintácticamente a partir de sus variables independientes (sin que ninguna otra variable ocurra libre), y símbolos de funciones dadas, constantes, operadores, etc. En particular, decimos que una función $\varphi$ es *definible explícitamente* a partir de (o es *explícita* en) funciones $\psi_1, ..., \psi_l$ y constantes $q_1, ..., q_s$, si puede darse una expresión correspondiente a su valor ambiguo $\varphi(x_1, ..., x_n)$ en términos de las variables $x_1, ..., x_n$, las constantes $q_1, ..., q_s$ y las funciones $\psi_1, ..., \psi_l$ (cfr. Ejemplo 2 § 10). En este caso, $\varphi$ puede ser obtenida a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$ mediante una serie de aplicaciones de los Esquemas (II)–(IV). Pues los Esquemas (II) y (III) introducen cada constante y cada una de las variables $x_1, ..., x_n$ como una función de todas las variables $x_1, ..., x_n$; y entonces las sustituciones empleadas al construir la expresión correspondiente al valor ambiguo $\varphi(x_1, ..., x_n)$ satisfacen todas la forma standard (IV).

EJEMPLO 1. Considérese la definición explícita

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x, z, y) = \zeta(x, \eta(y, \theta(x)), 2).$$

Considerando a $x, y$ y 2 (a la derecha) como siendo cada una una función de $x, z, y$,

$$\varphi(x, z, y) = \zeta(U_1^3(x, z, y), \eta(U_3^3(x, z, y), \theta(U_1^3(x, z, y))), C_2^3(x, z, y)).$$

Vemos, por tanto, que puede ser usada la siguiente serie de aplicaciones de los Esquemas (II)–(IV) para definir $\varphi$ a partir de $\zeta$, $\eta$, $\theta$. Las sucesivas funciones de las que se hace uso, son nombradas o definidas a la izquierda; y las aplicaciones de los esquemas se analizan a la derecha. Por ejemplo, en el Paso 5, se aplica el Esquema (IV) con $n = 3$ y $m = 1$, y con las funciones precedentes de los Pasos 3 y 4 haciendo las veces de $\psi$ y $\chi$ de (IV).

1. $\zeta$ – primera función dada.
2. $\eta$ – segunda función dada.
3. $\theta$ – tercera función dada.
4. $U_1^3(x, z, y) = x$ – (III), $n = 3$, $i = 1$.
5. $\theta_1(x, z, y) = \theta(U_1^3(x, z, y))$ – (IV), $n = 3$, $m = 1; 3, 4$.
6. $U_3^3(x, z, y) = y$ – (III), $n = 3$, $i = 3$.
7. $\psi(x, z, y) = \eta(U_3^3(x, z, y), \theta_1(x, z, y))$ – (IV), $n = 3$, $m = 2; 2, 6, 5$.

8. $C_2^3(x,z,y)=2$ – (II), $n=3$, $q=2$.
9. $\varphi(x,z,y) = \zeta(U_1^3(x,z,y), \psi(x,z,y), C_2^3(x,z,y))$ – (IV), $n=3, m=3;1,4,7,8$.

Nótese que esta definición de $\varphi$ a partir de $\zeta$, $\eta$, $\theta$ puede ser expresada simbólicamente de este modo,

(b) $$\varphi=\mathbf{S}_3^3(\zeta, U_1^3, \mathbf{S}_2^2(\eta, U_3^3, \mathbf{S}_1^3(\theta, U_1^3)), C_2^3).$$

Si $\zeta$, $\eta$, $\theta$ son recursivas primitivas, entonces también lo es $\varphi$; y una descripción recursiva primitiva $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $\varphi$ es entonces $\ldots, \zeta, \ldots, \eta, \ldots, \theta, U_1^3, \theta_1, U_3^3, \psi, C_2^3, \varphi$ donde $\ldots, \zeta; \ldots, \eta; \ldots, \theta$ son descripciones de $\zeta, \eta, \theta$, respectivamente.

Este uso de las funciones de identidad $U_i^n$ en el análisis de la definición explícita es debido a Gödel 1934.

El Esquema (V) es el esquema de *recursión primitiva*, sin parámetros (Va), o con parámetros (Vb). Escribiremos a veces la función $\varphi$ así definida, como $\mathbf{R}_q^i(\chi)$ (para (Va)), o $\mathbf{R}^n(\psi, \chi)$ (para (Vb)). Sin embargo, al hablar de una "recursión primitiva", entenderemos ahora que la aplicación de (V) puede haber incluido consigo algunos pasos de la definición explícita.

EJEMPLO 2. Para analizar la recursión primitiva correspondiente a $a+b$ (Ejemplo 1 § 43), restablezcámosla primero escribiendo $\varphi(b,a)$ por $a+b$,

$$\begin{cases} \varphi(0,a) = a & [=U_1^1(a)], \\ \varphi(b',a) = (\varphi(b,a))' & [=\chi(b,\varphi(b,a),a), \\ & \text{si } \chi(b,c,a)=c'=S(U_1^3(b,c,a))]. \end{cases}$$

Ello satisface el Esquema (Vb) cuando los miembros de la derecha se expresan tal y como aparecen en los corchetes. Así se lleva a cabo la definición del siguiente modo:

1. $S(a)=a'$ – (I).
2. $U_1^1(a)=a$ – (III), $n=1$, $i=1$.
3. $U_2^3(b,c,a)=c$ – (III), $n=3$, $i=2$.
4. $\chi(b,c,a)=S(U_2^3(b,c,a))$ – (IV), $n=3$, $m=1;1,3$.
5. $\begin{cases} \varphi(0,a) = U_1^1(a) \\ \varphi(b',a) = \chi(b,\varphi(b,a),a) \end{cases}$ – (Vb), $n=2;2,4$.

Ello muestra que $a+b$, considerada como $\varphi(b,a)$ (esto es, $\varphi=\lambda ba\, a+b$, cfr. Ejemplo 3 § 10) es recursiva primitiva, con $S$, $U_1^1$, $U_2^3$, $\chi$, $\varphi$ como una descripción recursiva primitiva. Podemos obtener $a+b$ como $\varphi_1(a,b)$ (esto es, $\varphi_1=\lambda ab\, a+b$) mediante tres pasos más. En símbolos,

$$\lambda ba\, a+b = \mathbf{R}^2(U_1^1, \mathbf{S}_1^3(S, U_2^3)),$$
$$\lambda ab\, a+b = \mathbf{S}_2^2(\mathbf{R}^2(U_1^1, \mathbf{S}_1^3(S, U_2^3)), U_2^2, U_1^2).$$

Ello ilustra el método general. Por la propiedad conmutativa de $a+b$,

$\varphi_1(a, b) = \varphi(a, b)$, de suerte que los tres últimos pasos podrían omitirse aquí; mas no, p. ej., al tratar la recursión para $a^b$.

Utilizaremos ahora estas técnicas para establecer la recursividad primitiva de una serie de funciones. Cada una de las funciones enumeradas más abajo a la izquierda, es recursiva primitiva. Para verificarlo, el lector puede advertir, primero, que las definiciones explícitas y las recursiones primitivas expuestas a la derecha, generan funciones recursivas primitivas, y, segundo, que las funciones generadas son las mismas que las definidas o nombradas a la izquierda.

#1. $a+b$ $\quad \begin{cases} a+0=a, \\ a+b'=(a+b)'. \end{cases}$

#2. $a \cdot b$ $\quad \begin{cases} a \cdot 0=0, \\ a \cdot b'=a \cdot b+a \end{cases}$

#3. $a^b$ (escrito también: $a \exp b$). $\quad \begin{cases} a^0=1, \\ a^{b'}=a^b \cdot a. \end{cases}$

#4. $a!$. $\quad \begin{cases} 0!=1, \\ a'!=a! \cdot a'. \end{cases}$

#5. $\operatorname{pd}(a)=\begin{cases} \text{predecesor} \\ \text{de } a \text{ si } a>0, \\ 0 \text{ si } a=0. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \operatorname{pd}(0)=0, \\ \operatorname{pd}(a')=a. \end{cases}$

#6. $a \dot{-} b=\begin{cases} a-b \text{ si } a \geq b, \\ 0 \text{ si } a<b. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a \dot{-} 0=a, \\ a \dot{-} b'=\operatorname{pd}(a \dot{-} b). \end{cases}$

#7. $\min(a, b)$. $\quad \min(a, b)=b \dot{-}(b \dot{-} a).$

#7a. $\min(a_1, \ldots, a_n)$. $\quad \min(a_1, \ldots, a_n)=$ $\min(\ldots \min(\min(a_1, a_2), a_3) \ldots, a_n).$

#8. $\max(a, b)$. $\quad \max(a, b)=(a+b) \dot{-} \min(a, b).$

#8a. $\max(a_1, \ldots, a_n)$. $\quad$ Similarmente a #7a.

#9. $\overline{\operatorname{sg}}(a)=\begin{cases} 1 \text{ si } a=0, \\ 0 \text{ si } a>0. \end{cases}$ $\quad \overline{\operatorname{sg}}(a)=1 \dot{-} a,$ o $\overline{\operatorname{sg}}(a)=0^a,$ o $\begin{cases} \overline{\operatorname{sg}}(0)=1, \\ \overline{\operatorname{sg}}(a')=0. \end{cases}$

#10. $\operatorname{sg}(a)=\begin{cases} 0 \text{ si } a=0, \\ 1 \text{ si } a>0. \end{cases}$ $\quad \operatorname{sg}(a)=\overline{\operatorname{sg}}(\overline{\operatorname{sg}}(a)),$ o $\operatorname{sg}(a)=\min(a, 1),$ o $\begin{cases} \operatorname{sg}(0)=0, \\ \operatorname{sg}(a')=1. \end{cases}$

#11. $|a-b|$. $\quad |a-b|=(a \dot{-} b)+(b \dot{-} a).$

#12. $\operatorname{rs}(a, b)$ (cfr. § 41). $\quad \begin{cases} \operatorname{rs}(0, b)=0, \\ \operatorname{rs}(a', b)=(\operatorname{rs}(a, b))' \cdot \operatorname{sg}|b-(\operatorname{rs}(a, b))'|. \end{cases}$

#13. $[a/b]$. $\quad \begin{cases} [0/b]=0, \\ [a'/b]=[a/b]+\overline{\operatorname{sg}}|b-(\operatorname{rs}(a, b))'|. \end{cases}$

OBSERVACION 1. La lista particular (I)–(V) de esquemas para generar las funciones recursivas primitivas (BASE A) es de fácil manipulación. Si se permiten

constantes como funciones recursivas primitivas de 0 variables, se obtiene una base cambiando (II) por

$$(\mathrm{II}_B) \qquad \varphi = 0,$$

estableciendo $n = 0$ o $m = 0$ en (IV), omitiendo (Va), y estableciendo $n = 1$ en (Vb) (BASE B). Esta base subraya el papel fundamental de 0 y $'$. Las funciones constante $C_q^0$ para $q > 0$, se introducen por aplicaciones sucesivas de (IV) con $n = 0$, $m = 1$, $S$ como $\psi$, y $C_{q-1}^0$ como $\chi$; y $C_q^n$ para $n > 0$, por (IV), con $m = 0$, y $C_q^0$ como $\psi$. Reducciones sustanciales en la base para generar funciones recursivas primitivas, han sido efectuadas por Péter 1934 (véase también David Nelson 1947 Parte II) y Raphael Robinson 1947. (Se entenderá a lo largo del capítulo, dejando aparte la presente observación y la Observación 1 al final de § 47, que estamos usando la Base A).

§ 45. **Predicados, representación por factores primos.** La siguiente noción de recursividad primitiva relativa se introduce naturalmente en nuestra teoría a fin de mostrar cuándo una función es recursiva primitiva, lo mismo que se introdujo la noción de deducibilidad para mostrar cuándo una fórmula es demostrable.

Una función $\varphi$ es *recursiva primitiva* en $\psi_1, \ldots, \psi_l$ (brevemente $\Psi$), si hay una secuencia finita $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de (ocurrencias de) funciones (llamada una *derivación recursiva primitiva de $\varphi$ a partir de $\Psi$*) tal que cada función de la secuencia es o bien una de las funciones $\Psi$ (las *funciones supuestas*) o una función inicial, o una dependiente inmediata de funciones precedentes, y la última función $\varphi_k$ es $\varphi$.

Puesto que esta definición tiene la misma forma que la de deducibilidad, puede establecerse ahora un principio correspondiente para cada una de las propiedades generales de $\vdash$ (§ 20). Por ejemplo, si $\varphi$ es recursiva primitiva en $\Psi$, y algunas de las funciones $\Psi$ son recursivas primitivas, entonces $\varphi$ es recursiva primitiva en el resto de las funciones $\Psi$. Más tarde se dará un ejemplo (con $l = 1$) en el que "si $\psi_1, \ldots, \psi_l$ son recursivas primitivas, entonces $\varphi$ es recursiva primitiva" es verdadera, pero "$\varphi$ es recursiva primitiva en $\psi_1, \ldots, \psi_l$" es falsa (Ejemplo 2 § 55).

EJEMPLO 1. En el Ejemplo 1 § 44, $\varphi$ es recursiva primitiva en $\zeta$, $\eta$, $\theta$, con $\zeta, \eta, \theta, U_1^3, \theta_1, U_3^3, \psi, C_2^3, \varphi$ como una derivación recursiva primitiva.

Nuestro resultado general sobre la definición explícita (§ 44) puede ser ahora enunciado así:

#A. *Una función $\varphi$ definible explícitamente a partir de funciones $\Psi$ y constantes $q_1, \ldots, q_s$ es recursiva primitiva en $\Psi$.*

Entendemos por $\sum_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ la suma de los números $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ para todo número natural $y$ tal que $y < z$ si $z > 0$, y 0, si $z = 0$. Se trata de una función de $x_1, \ldots, x_n, z$ para cualquier función dada $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Por $\prod_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ entendemos, de modo similar, el producto de los números $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ para $y < z$, si $z > 0$; y 1, si $z = 0$.

#B. *La suma finita $\sum_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ y el producto finito $\prod_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ son recursivos primitivos en $\psi$.*

DEMOSTRACION. La suma $\sum_{y<z} \psi(x_1, ..., x_n, y)$ se obtiene a partir de $\psi(x_1, ..., x_n, y)$ mediante la siguiente recursión sobre $z$:

$$\begin{cases} \sum_{y<0} \psi(x_1, ..., x_n, y) = 0, \\ \sum_{y<z'} \psi(x_1, ..., x_n, y) = \psi(x_1, ..., x_n, z) + \sum_{y<z} (x_1, ..., x_n, y). \end{cases}$$

Otras sumas y productos finitos se reducen a éstos por definición explícita;

p. ej. $\sum_{y \leq z} \psi(y) = \sum_{y=0}^{z} \psi(y) = \sum_{y<z'} \psi(y)$, $\sum_{w<y<z} \psi(y) = \sum_{y<z \dot{-} w'} \psi(y + w')$,

$$\sum_{w \leq y \leq z} \psi(y) = \sum_{y=w}^{z} \psi(y) = \sum_{y<z' \dot{-} w} \psi(y + w).$$

Aun cuando en este capítulo estamos desarrollando una teoría intuitiva, y no una teoría formal, desearemos a veces la concisión de expresión que aporta un simbolismo lógico, y en particular necesitaremos de un tal simbolismo al formar notaciones para predicados y funciones. Para estos dos fines, introducimos ahora un nuevo simbolismo lógico. Este simbolismo ha de ser considerado como informal y significativo, en contraste con el del sistema formal considerado como objeto de la metamatemática. Una expresión del nuevo simbolismo intuitivo debe distinguirse de una fórmula en el anterior simbolismo formal por las diferencias en los símbolos, exceptuando "&", y por el contexto. Esta distinción entre dos simbolismos se introduce en el presente libro (y en Gödel 1931) con los propósitos mentados, y no constituye un uso establecido en la literatura. (Nuestro simbolismo lógico intuitivo, exceptuando "≡", "$(E!\ y)$", y los operadores con "$x < y$" etc., es el simbolismo formal de Hilbert y Bernays 1934, 1939; y nuestro simbolismo lógico formal exceptuando "$\sim$" y "$\exists!\ y$" es el de Gentzen 1934-5).

| Símbolos del simbolismo intuitivo. | Palabras del lenguaje castellano. | Símbolos del simbolismo formal. |
|---|---|---|
| $Q \equiv R.$ | $Q$ es equivalente a $R$. | Q ∼ R. |
| $Q \to R.$ | $Q$ implica $R$ (si $Q$, entonces $R$). | Q ⊃ R. |
| $Q \,\&\, R.$ | $Q$ y $R$. | Q & R. |
| $Q \vee R.$ | $Q$ o $R$. | Q ∨ R. |
| $\overline{Q}.$ | no $Q$. | ¬ Q. |
| $(y)R(y).$ | para todo $y$, $R(y)$. | ∀y R(y). |
| $(Ey)R(y).$ | existe un $y$ tal que $R(y)$. | ∃y R(y). |
| $(E!\ y)R(y)$ | existe un único $y$, tal que $R(y)$. | ∃ ! y R(y). |
| $(y)_{y<z}R(y).$ | para todo $y < z$, $R(y)$. | ∀y(y <z ⊃ R(y)). |
| $(Ey)_{y<z}R(y).$ | existe un $y < z$ tal que $R(y)$. | ∃y (y <z & R(y)). |
| $\mu y_{y<z}\, R(y).$ | el mínimo $y < z$ tal que $R(y)$, si $(Ey)_{y<z}\, R(y)$; en otro caso, $z$. | |

Similares notaciones se forman al usar "$(y)$", "$(Ey)$" y "$\mu y$" con las desigualdades "$y \leq z$", "$w < y < z$", "$w < y \leq z$", "$w \leq y < z$", "$w \leq y \leq z$". Cuando el rango indicado de $y$ es vacío, la expresión "$(y)$" es verdadera, y la expresión "$(Ey)$" es falsa. Cuando el rango indicado no contiene ninguna "$y$" tal que $R(y)$, el valor de la expresión "$\mu y$" es el número cardinal del rango.

En la presente teoría hablamos a menudo de los valores de verdad 'verdadero' (brevemente t) y 'falso' (brevemente f) de las proposiciones en lugar de hablar de las proposiciones mismas (El contexto distinguirá este uso de "t" y "f" referido a los valores de verdad de las proposiciones, del uso análogo que de esos símbolos se hace en §§ 28, 36 en un procedimiento de evaluación aplicable a fórmulas). Al hacer tal, tenemos inmediatamente cuatro tipos de funciones. (a) Funciones de {0, 1, 2, ...} a {0, 1, 2, ...} llamadas *funciones de teoría de números* o abreviadamente aquí, *funciones.* (b) Funciones de {0, 1, 2, ...} a { t, f } llamadas *predicados de teoría de números* o abreviadamente aquí *predicados.* (c) Funciones de { t, f } a { t, f } llamadas *funciones de valores de verdad* o *conectivas proposicionales.* Usamos cinco de ellas $\equiv$, $\rightarrow$, &, **V**, $\bar{}$, definidas por las mismas tablas que fueron dadas en § 28 para los respectivos operadores formales $\sim$, $\supset$, &, **V**, $\neg$. (d) Funciones de { t, f } a {0, 1, 2, ...}. La función de este tipo que correlaciona 0 a t y 1 a f se incluye en la definición de 'función representante' que se dará más abajo.

Sin duda, cuando las proposiciones no son identificadas con sus valores de verdad, 'predicado' significa *función proposicional de números naturales* (§ 31). La costumbre de hablar a veces de los valores de verdad t, f, en lugar de hablar de las proposiciones requiere comentario. De hecho es irrelevante en muchos contextos el que nos representemos a los valores de los predicados como proposiciones o como valores de verdad t, f. Esto es debido a que el significado matemático esencial de las proposiciones procede de la definición de los predicados que las toman como valores. Por ejemplo, considérense las dos proposiciones $3 < 5$ y $3 \leq 5$. Son proposiciones distintas que difieren en significado. A primera vista algo parece haberse perdido si identificamos a ambas con el único objeto t. Sin embargo, si identificamos la proposición $3 < 5$ con t, y establecemos al mismo tiempo que tal es el valor del predicado $<$ para 3 y 5 como argumentos, expresamos todo el significado de la proposición original. En otras palabras, la proposición $3 < 5$ es sinónima de la proposición que dice que el predicado $<$, interpretado como poseyendo sus valores en el dominio { t, f } toma el valor t para 3 y 5 como argumentos respectivos (Por lo demás, aquí es indiferente el que "t" y "f" signifiquen "verdadero" y "falso" como establecimos antes, o sean simplemente dos objetos distintos cualesquiera como en §§ 28, 36. Los predicados son isomórficos bajo las dos interpretaciones, de modo que el contenido matemático abstracto de la proposición que dice que el valor de $3 < 5$ es t, es el mismo).

Al tratar íntimamente con funciones necesitamos tener presentes los dos significados de la común notación funcional, que señalamos en § 10. Con respecto a los predicados, hay tres significados posibles (o seis si distinguimos entre proposiciones y valores de verdad).

| Significados de "$P(x_1, \ldots, x_n)$". | Notaciones alternativas. |
|---|---|
| 1. El predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$. | $P$, o $\lambda x_1 \ldots x_n P(x_1, \ldots, x_n)$. |

| Significados de "$P(x_1, ..., x_n)$". | Notaciones alternativas. |
|---|---|
| 2. El valor del predicado $P$ para $x_1, ..., x_n$ como argumentos (el valor ambiguo). | Sin notación alternativa. |
| 3. La proposición que afirma que $P(x_1, ..., x_n)$ es verdadera para todo $x_1, ..., x_n$. | $(x_1)...(x_n)\, P\ (x_1, ..., x_n)$. |

Estos tres sentidos corresponden, respectivamente, a las interpretaciones de forma nominal (§ 31), condicional (§ 32), y de generalidad (§ 32), de las variables libres $x_1, ..., x_n$ en una fórmula $P(x_1, ..., x_n)$ del sistema formal.

EJEMPLO 2. Los dos enunciados

$$\begin{cases} E(0)\ (\text{o}\ E(0) \equiv \mathfrak{t}), \\ E(a') \equiv \overline{E}(a), \end{cases}$$

definen el predicado $E(a)$ ($\equiv$ {$a$ es par}) por recursión.— Podemos definir una función $\epsilon(a)$ mediante la recursión primitiva

$$\begin{cases} \epsilon(0) = 0, \\ \epsilon(a') = \overline{\text{sg}}\ (\epsilon(a)) \end{cases}$$

(cfr. # ' § 44). Entonces $E(a) \equiv \epsilon(a) = 0$.

Decimos que una función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es la *función representante* de un predicado $P(x_1, ..., x_n)$ si $\varphi$ toma solamente 0 y 1 como valores y satisface la equivalencia

$$P(x_1, ..., x_n) \equiv \varphi(x_1, ..., x_n) = 0;$$

o, con otras palabras, y siendo $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{f}$ los valores de $P$, si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es 0 cuando $P(x_1, ..., x_n)$ es $\mathfrak{t}$, y $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es 1 cuando $P(x_1, ..., x_n)$ es $\mathfrak{f}$.

Decimos que un predicado $P(x_1, ..., x_n)$ es *recursivo primitivo*, si su función representante $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es recursiva primitiva (p. ej.: $E(a)$ en el Ejemplo 2). Esta definición sigue a Gödel 1931.

A título de nuevo ejemplo, consignamos el predicado igualdad, mostrando a la derecha su función representante (cfr. # # 10, 11).

| | |
|---|---|
| #14. $a = b$. | $\text{sg}\,\lvert a - b \rvert$. |

Diremos, además, que una función $\varphi$ o predicado $P$ es *recursivo primitivo en* predicados y funciones $\Psi$, si resulta válido el enunciado correspondiente después de reemplazar los predicados que figuren en $P$, $\Psi$, por sus funciones representantes.

Gödel 1931 dio algunos teoremas concernientes a funciones y predicados recursivos primitivos que nosotros enunciamos como sigue (# # C–E). Estos hechos habían sido obtenidos también por Skolem 1923.

#C. *Un predicado $P$ obtenido sustituyendo por las funciones $\chi_1, ..., \chi_m$ las variables respectivas de un predicado $Q$ es recursivo primitivo en $\chi_1, ..., \chi_m, Q$.*

DEMOSTRACION. Si el predicado dado es $Q(y_1, ..., y_m)$ con la función representante $\psi(y_1, ..., y_m)$, y las funciones sustituidas son $\chi_1(x_1, ..., x_n)$, ... $\chi_m(x_1, ..., x_n)$ la función representante del nuevo predicado $Q(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n))$ es $\psi(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n))$. Esta función es recursiva primitiva en $\psi, \chi_1, ..., \chi_m$ por el Esquema (IV). Sabemos por § 44 que no hay pérdida de generalidad por considerar la sustitución según esta forma particular; y similarmente en #D:

#D. *El predicado* $\overline{Q}(x_1, ..., x_n)$ *es recursivo primitivo en el predicado* $Q$. *Los predicados* $Q(x_1, ..., x_n) \vee R(x_1, ..., x_n)$, $Q(x_1, ..., x_n) \,\&\, R(x_1, ..., x_n)$, $Q(x_1, ..., x_n) \rightarrow R(x_1, ..., x_n)$, *y* $Q(x_1, ..., x_n) \equiv R(x_1, ..., x_n)$ *son recursivos primitivos en* $Q$ *y* $R$.

DEMOSTRACION. Sean $\psi(x_1, ..., x_n)$ y $\chi(x_1, ..., x_n)$ las funciones representantes de $Q(x_1, ..., x_n)$ y $R(x_1, ..., x_n)$, respectivamente. Entonces la función representante de $\overline{Q}(x_1, ..., x_n)$ es $\overline{sg}(\psi(x_1, ..., x_n))$ (# 9), la cual es recursiva primitiva en $\psi$. La función representante de $Q(x_1, ..., x_n) \vee R(x_1, ..., x_n)$ es $\psi(x_1, ..., x_n) \cdot \chi(x_1, ..., x_n)$, que es recursiva primitiva en $\psi$ y $\chi$. El resto del teorema se sigue por las ya conocidas equivalencias correspondientes a &, $\rightarrow$, $\equiv$ en términos de $\overline{\ }$ y $\vee$ (cfr. Capítulo VI, salvando las diferencias del simbolismo).

#E. *Los predicados* $(Ey)_{y<z} R(x_1, ..., x_n, y)$ *y* $(y)_{y<z} R(x_1, ..., x_n, y)$ *y la función* $\mu y_{y<z} R(x_1, ..., x_n, y)$ *son recursivos primitivos en el predicado* $R$.

DEMOSTRACION. Sea $\chi(x_1, ..., x_n, y)$ la función representante de $R(x_1, ..., x_n, y)$. Entonces $\prod_{y<z} \chi(x_1, ..., x_n, y)$ es la función representante de $(Ey)_{y<z} R(x_1, ..., x_n, y)$. Esta función es recursiva primitiva en $\chi$ por # B. Asimismo, $sg(\sum_{y<z} \chi(x_1, ..., x_n, y))$ es la función representante de $(y)_{y<z} R(x_1, ..., x_n, y)$ (# 10). Ilustramos la demostración correspondiente a $\mu y_{y<z} R(x_1, ..., x_n, y)$ con un ejemplo. Fijemos los valores de $x_1, ..., x_n$, y escribamos simplemente "$\chi(y)$" por $\chi(x_1, ..., x_n, y)$ con los valores fijos de $x_1, ..., x_n$. Supongamos que $z = 7$, y que para $y = 0, 1, ..., 6$ (primera fila a continuación) $\chi(y)$ toma los valores que se indican en la segunda fila.

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $7 = z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi(y)$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| $\pi(y) = \prod_{s<y} \chi(s)$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\sigma(y) = \sum_{t<y} \pi(t)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

El número deseado $\mu y_{y<z} R(y)$ es el mínimo $y$ (primera fila) $< z$ para el que $R(y)$ es verdadero, esto es, para el que aparece un 0 en la segunda fila, si hay un tal $y$. En nuestro ejemplo lo hay, y el mínimo es 3. Este número aparece asimismo como el último número $\sigma(z)$ en la cuarta fila. El procedimiento ilustrado será evidentemente válido en cualquier caso. Por cambiar de ejemplo, si

$(\overline{Ey})_{y<_z R(y)}$, de modo que no ocurra 0 alguno en la segunda fila, entonces $\sigma(z)$ será $z$, que es como se habría definido a $\mu y_{y<_z R(y)}$ en este caso. La función $\sigma(z)$ escrita sin abreviaturas es $\sum_{t<z} \prod_{s\leq t} \chi(x_1, ..., x_n, s)$. Por #8 esta función es recursiva primitiva en $\chi$.

Al usar estos teoremas podemos combinar varias aplicaciones en un solo paso. En virtud de # 14 con # C, $\psi(x_1, ..., x_n) = \chi(x_1, ..., x_n)$ es recursiva primitiva en $\psi$, $\chi$; p. ej. usando § 44, $c' + a = b$ es recursiva primitiva. En virtud de ##E, C y § 44, $(Ey)_{y<_{\psi(x_1, ..., x_n)} R(x_1, ..., x_n, y)}$ es recursivo primitivo en $\psi, R$; p.ej. usando de nuevo § 44, las siguientes expresiones son recursivas primitivas.

#15. $a<b$. $\qquad a<b \equiv (Ec)_{c<_b}[c' + a = b]$, o $\operatorname{sg}(a' \dot{-} b)$.

La desigualdad "$y<z$" en #E puede ser cambiada a "$y\leq z$", "$w<y<z$", "$w<y\leq z$", "$w\leq y<z$" o "$w\leq y\leq z$"; por ejemplo,
$(y)_{w\leq y\leq z} R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (y)_{y<z'\dot{-}w} R(x_1, ..., x_n, y + w)$.

Un conjunto de predicados $Q_1, ..., Q_m$ es *mutuamente exclusivo,* si para cada conjunto de argumentos no hay más de uno de ellos que sea verdadero (cfr. § 3).

#F. *La función definida así*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_n) \text{ si } Q_1(x_1, ..., x_n), \\ \qquad \cdots \\ \varphi_m(x_1, ..., x_n) \text{ si } Q_m(x_1, ..., x_n), \\ \varphi_{m+1}(x_1, ..., x_n), \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

*donde $Q_1, ..., Q_m$ son predicados mutuamente exclusivos (o $\varphi(x_1, ..., x_n)$ tendrá el valor dado por la primera cláusula que proceda) es recursiva primitiva en $\varphi_1, ..., \varphi_{m+1}, Q_1, ..., Q_m$.* (Definición por casos).

DEMOSTRACION, para $Q_1, ..., Q_m$ mutuamente exclusivos. PRIMER METODO. Sean $\psi_1, ..., \psi_m$ las funciones representantes de $Q_1, ..., Q_m$. Entonces (omitiendo "$(x_1, ..., x_n)$" para ahorrar espacio)

$$\varphi = \overline{\operatorname{sg}}(\psi_1) \cdot \varphi_1 + ... + \overline{\operatorname{sg}}(\psi_m) \cdot \varphi_m + \psi_1 \cdot ... \cdot \psi_m \cdot \varphi_{m+1}.$$

SEGUNDO METODO.

$$\varphi = \mu y_{y \leq \varphi_1 + ... + \varphi_{m+1}} (Q_1 \,\&\, y = \varphi_1) \vee ... \vee (Q_m \,\&\, y = \varphi_m) \vee (\overline{Q}_1 \,\&\, ... \,\&\, \overline{Q}_m \,\&\, y = \varphi_{m+1}).$$

REPRESENTACION POR FACTORES PRIMOS. Sean los números primos, en orden de magnitud $p_0, p_1, p_2, ..., p_i, ...$ (es decir $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, ...$). El teorema fundamental de la aritmética (Gauss 1801) establece que un entero positivo dado $a$ puede ser descompuesto en un producto de factores primos que es único según el orden de los factores. Así tenemos una única representación de $a$ de la forma

(1) $$a = p_0^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_i^{a_i} ... \qquad (a \neq 0),$$

donde $a_i$ es el número de veces que $p_i$ ocurre en $a$ como factor (0 si $p_i$ no es un factor de $a$). Podemos considerar el producto (1) como extendiéndose indefinidamente, siendo 0 todos los exponentes salvo un número finito de ellos.

Aumentamos ahora nuestra lista de funciones y predicados recursivos primitivos particulares con

#16. $a|b \equiv a$ divide a $b$. $\quad a|b \equiv (Ec)_{c \leq b}[ac = b]$, o sg rs$(b, a)$.

#17. $\mathrm{Pr}(a) \equiv a$ es un número primo. $\quad \mathrm{Pr}(a) \equiv a > 1 \;\&\; (\overline{Ec})_{1 < c < a}[c|a]$.

#18. $p_i =$ el $i+1$-ésimo número primo. $\quad p_0 = 2$, $\quad p_i = \mu x_{p_i < x \leq p_i! + 1}\, \mathrm{Pr}(x)$,

donde la cota superior $p_i! + 1$ para $x$ viene dada por la demostración de Euclides de que para cualquier $p$ existe un primo $> p$ y $\leq p! + 1$ (§ 40). La combinación de una aplicación de # E con una recursión primitiva es legítima, por cuanto se limita a condensar lo que podría realizarse introduciendo primero $\chi(c) = \mu x_{c < x \leq c! + 1}\, \mathrm{Pr}(x)$, y escribiendo luego la segunda ecuación de recursión como $p_i = \chi(p_i)$.

#19. $(a)_i = \begin{cases} \text{el exponente } a_i \text{ de } p_i \\ \text{en (1), si } a \neq 0; \\ 0, \text{ si } a = 0. \end{cases}$ $\quad (a)_i = \mu x_{x < a}\, [p_i^x | a \;\&\; \overline{p_i^{x'} | a}]$.

Podemos escribir $((a)_i)_j$ como $(a)_{i,j}$ $(((a)_i)_j)_k$ como $(a)_{i,j,k}$ etc.

$$\begin{cases} \text{el número de exponentes} \\ \text{no evanescentes} \\ \text{en (1), si } a \neq 0; \\ 0, \text{ si } a = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{lg}(0, a) = 0, \\ \mathrm{lg}(i', a) = \begin{cases} \mathrm{lg}(i, a) + 1 \text{ si } p_i | a, \\ \mathrm{lg}(i, a) \text{ en caso contrario.} \end{cases} \\ \mathrm{lg}(a) = \mathrm{lg}(a, a). \end{cases}$$

Podemos representar las secuencias finitas $a_0, \ldots, a_s$ de enteros positivos por los números $a = p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$; entonces lg $(a)$ es la longitud $s + 1$ de la secuencia representada por $a$.

#21. $a * b = a \cdot \prod_{i < \mathrm{lg}(b)} p_{\mathrm{lg}(a) + i}^{(b)_i}$.

Entonces si $a = p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ $(a_0, \ldots, a_s > 0)$ y $b = p_0^{b_0} \cdot \ldots \cdot p_t^{b_t}$ $(b_0, \ldots, b_t > 0)$, $a * b = p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s} \cdot p_{s+1}^{b_0} \cdot \ldots \cdot p_{s+t+1}^{b_t}$. Para cualquier $a$ y cualquier tal $b$, $a * 1 = a$, $1 * b = b$, $1 * 1 = 1$.

§ 46. **Recursión de curso-de-valores.** Al demostrar un teorema $T(y)$ por inducción, puede ocurrir que el caso $T(y')$ del teorema dependa, no simplemente del caso $T(y)$ que le precede inmediatamente, sino de uno o más casos precedentes. A este tipo de demostración por inducción lo hemos llamado una "inducción de curso-de-valores". Puede ser reducido a una inducción simple, demostrando primero el lema $(s)_{s \leq y}\, T(s)$ por inducción simple, tras lo cual se sigue el teorema estableciendo $s = y$ (cfr. *162a § 40).

Análoga situación surge en la definición por inducción. El valor de la función $\varphi(0)$ está dado de inmediato; y el valor de la función $\varphi(y')$ está expresado en

términos de $y$ y de uno o más de los valores precedentes $\varphi(s)$ para $s \leq y$. La recursión es entonces llamada *recursión de curso-de-valores*. Veremos que puede ser reducida a una recursión primitiva por un procedimiento análogo (cfr. Péter 1934).

Pueden combinarse los dos casos de la definición de $\varphi$ (cfr. *162b) diciendo que $\varphi(y)$ está expresada en términos de $y$ y de $\varphi(s)$ para $s \leq y$. Cuando $y = 0$ esto significa que $\varphi(0)$ está inmediatamente dado, pues el conjunto de valores $\varphi(s)$ para $s \leq y$ es entonces vacío.

De modo más general, sea $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$ la función a definir, donde $x_2, ..., x_n$ son parámetros (que permanecen fijos a lo largo de toda la recursión). Introducimos, como una función auxiliar

$$(1) \qquad \widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n) = \prod_{i<y} p_i^{\varphi(i, x_2, ..., x_n)},$$

llamada la *función de curso-de-valores (en $y$)* para la función dada $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$.

Dada la secuencia de los valores $\varphi(s, x_2, ..., x_n)$ de la función original para $s < y$, obtenemos por (1) el valor $\widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n)$ de la función de curso-de-valores. A la inversa, dada $\widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n))$, podemos extraer todos los valores $\varphi(s, x_2, ..., x_n)$ para $s < y$ con ayuda de #19 del modo siguiente,

$$(2) \qquad \varphi(s, x_2, ..., x_n) = (\widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n))_s \quad \text{si } s < y.$$

De modo que en este sentido, el conocimiento del valor $\widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n)$ de la función de curso-de-valores es equivalente al conocimiento de la secuencia de valores $\varphi(0, x_2, ..., x_n), ..., \varphi(y-1, x_2, ..., x_n)$ de la función original.

#G. *Si $\varphi$ satisface la ecuación*

$$(3) \qquad \varphi(y, x_2, ..., x_n) = \chi(y, \widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n),$$

*entonces $\varphi$ es recursiva primitiva en $\chi$.*

DEMOSTRACION. Construimos primero una recursión primitiva para $\widetilde{\varphi}$,

$$(4) \qquad \begin{cases} \widetilde{\varphi}(0; x_2, ..., x_n) = 1, \\ \widetilde{\varphi}(y'; x_2, ..., x_n) = \widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n) \cdot p_y^{(y, \widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n)}. \end{cases}$$

Y obtenemos después $\varphi$ a partir de $\widetilde{\varphi}$ por la definición explícita,

$$(5) \qquad \varphi(y, x_2, ..., x_n) = (\widetilde{\varphi}(y'; x_2, ..., x_n))_y.$$

EJEMPLO 1. Sea

$$(a) \qquad \omega(y) = \prod_{s<y} (y + \varphi(s)).$$

La secuencia de los valores de esta función y la de su función de curso-de-valores son las siguientes

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(y)$ | 1 | 2 | 12 | 300 | 145920 | ... |
| $\widetilde{\varphi}(y)$ | 1 | $2^1$ | $2^1 \cdot 3^2$ | $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}$ | $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^{12} \cdot 7^{300}$ | ... |

Nótese que el último exponente en $\varphi(y)$ es siempre el valor de $\varphi(y)$; p. ej., $(\widetilde{\varphi}(3))_2 = 12 = \varphi(2)$. Para aplicar #G, nótese que por (2)

$$\text{(b)} \qquad \varphi(y) = \prod_{s<y} (y + (\widetilde{\varphi}(y))_s).$$

(b) tiene la forma (3), y por # # 1, 19, B y G, $\varphi$ es primitiva recursiva.

Esta versión de # G realiza la reducción de una recursión de curso-de-valores a recursión primitiva en aquellos casos en que la recursión de curso-de-valores está ya dada en la forma (3) de una dependencia de $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$ respecto al número $(\widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n)$ y a $y, x_2, ..., x_n$, conjuntamente.

Ilustramos a continuación el modo de reducir a la forma (3) recursiones de curso-de-valores que no vienen dadas de antemano en esta forma.

EJEMPLO 2. RECURSION A PARTIR DE UNA BASE DOBLE.

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \varphi(0) = q_0, \\ \varphi(1) = q_1, \\ \varphi(y'') = \chi(y, \varphi(y), \varphi(y')). \end{cases}$$

En primer lugar reenunciamos esto en la forma más compacta para una recursión de curso-de-valores (usando # #6, F), así

$$\text{(b)} \qquad \varphi(y) = \begin{cases} q_0 \text{ si } y = 0, \\ q_1 \text{ si } y = 1, \\ \chi(y \dot{-} 2, \varphi(y \dot{-} 2), \varphi(y \dot{-} 1)) \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Luego expresamos $\varphi(y \dot{-} 2), \varphi(y \dot{-} 1)$ como $(\widetilde{\varphi}(y))_{y \dot{-} 2}, (\widetilde{\varphi}(y))_{y \dot{-} 1}$, respectivamente.

El método se aplica asimismo a definiciones de predicados por recursión de curso-de-valores.

EJEMPLO 3. Considérese la equivalencia

$$\text{(a)} \quad T(y) \equiv y = 23 \vee V(y) \vee [y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \vee$$
$$[y = 2^{19} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \vee [y = 2^{21} \cdot 3^{(y)_1} \,\&\, T(y)_1)],$$

donde $V$ es un predicado dado. Esta define $T(y)$ por inducción de curso-de-valores sobre $y$. Pues cuando $y = 0$, todos los miembros disyuntivos de la derecha son falsos, excepto quizás el segundo; así $T(0) \equiv V(0)$. Cuando $y > 0$, $(y)_1 < y$ e $(y)_2 < y$.

Entonces $T(y)$ es expresado en términos de $y$, $V$ y $T(s)$ para $s < y$ solamente. Sea $\tau(y)$ la función representante de $T(y)$; y sean expresados $T((y)_1)$, $T((y)_2)$ en el miembro derecho de (a) por $(\widetilde{\tau}(y))_{(y)_1} = 0$, $(\widetilde{\tau}(y))_{(y)_2} = 0$, respectivamente. Ahora la definición de $T$ tiene la forma

$$\text{(b)} \qquad T(y) \equiv R(y, \widetilde{\tau}(y))$$

donde por # # 2, 3, 14, 19, A, C y D, $R(y, z)$ es recursivo primitivo en $V$. Esto

significa simplemente que la función representante $\rho$ de $R$ es recursiva primitiva de $V$; así tenemos una ecuación de la forma

(c) $$\tau(y) = \rho(y, \tilde{\tau}(y))$$

donde $\rho$ es recursiva primitiva en $v$. Por # G, $\tau$ es recursiva primitiva en $\rho$, y de ahí en $v$; esto es, $T$ es recursivo primitivo en $V$ (y es recursivo primitivo si lo es $V$).

En estos ejemplos hemos logrado siempre reducir a la forma (3) la recursión de curso-de-valores dada, mediante el uso de (2). Un examen más detenido en (§47) nos mostrará por qué, y nos capacitará asimismo para formular una versión de # G que incluye esta reducción.

EJEMPLO 4. RECURSION SIMULTANEA. Los valores de la función $\varphi_1(y)$ y $\varphi_2(y)$ son expresados en términos de $y$ y de valores $\varphi_1(s)$ y $\varphi_2(s)$ para $s < y$. Redúzcase a # G usando como función auxiliar

$$\varphi(y) = 2^{\varphi_1(y)} 3^{\varphi_2(y)}.$$

*§ 47. **Uniformidad.** En # # A–G (considerando por el momento sólo funciones, no predicados), nos referíamos primordialmente, no a cualesquiera funciones particulares $\varphi$ y $\psi$, sino a métodos con los cuales definir una función $\varphi$ a partir de funciones no especificadas $\Psi$. Cuando, mediante uno de tales métodos particulares, mostrábamos que una función $\varphi$ de $n$ variables es recursiva primitiva en $\Psi$, las aplicaciones de los esquemas (I)–(V) no dependían de qué funciones eran $\Psi$, ya que su número $l$ y los respectivos números $m_1, \ldots, m_l$ de argumentos que toman está fijado. En otras palabras, dimos un *esquema de derivación recursiva primitiva de $\varphi$ a partir de $\Psi$* con un *análisis* fijado. La definición de 'análisis' es análoga a la dada en § 20. Para una aplicación del Esquema (II) incluye la especificación de los $n$ y $q$; para (III) la de los $n$ e $i$; etc. (De modo análogo, a menudo obteníamos reglas derivadas para el sistema formal, mostrando un 'esquema de deducción' con letras metamatemáticas representantes de fórmulas, variables, etc. no especificadas). En estas circunstancias, decimos que $\varphi$ es *uniformemente recursiva primitiva en $\Psi$*.

Podemos asimismo explicar esta noción de uniformidad del modo que sigue. Para un método particular de definir una función de teoría de números $\varphi$ a partir de funciones de teoría de números $\Psi$ podemos escribir $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$ para expresar el hecho de que lo que la función $\varphi$ sea está determinado por lo que las funciones $\Psi$ sean. $\mathsf{F}$ es entonces una función matemática fijada de tipo superior, a saber, una función de $l$ funciones de teoría de números $\Psi$, de $m_1, \ldots, m_l$ variables respectivamente, a una función de teoría de números $\varphi$ de $n$ variables. Llamamos a una función tal $\mathsf{F}$ una *función esquema*, o *esquema* o *funcional*. Podemos también escribir $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{F}(\Psi; x_1, \ldots, x_n)$ (con el mismo $\mathsf{F}$) para expresar el hecho de que (por el esquema $\mathsf{F}$) el número natural que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sea está determinado por qué funciones sean $\Psi$ y qué números sean $x_1, \ldots, x_n$.

Para cualquier $n$ y $m$ fijados, el Esquema (IV) constituye un funcional que hemos denotado ya por $\mathsf{S}_m^n$. Para $n$ fijados (y si $n = 1$, para un $q$ fijado) el Esquema (V) constituye un funcional, $\mathsf{R}_q^1$ o $\mathsf{R}^n$. Los otros tres esquemas (I)–(III) definen funciones particulares de teoría de números $S$, $C_q^n$, $U_i^n$ (o constituyen funcionales con $l = 0$).

Decimos ahora que un funcional (o esquema) $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$ es *recursivo primitivo* o que $\varphi$ es *uniformemente recursiva primitiva en* $\Psi$, si $\mathsf{F}$ es explícitamente definible a partir de los funcionales $\mathbf{S}_m^n$, $\mathbf{R}_q^1$, $\mathbf{R}^n$ y de las constantes $S$, $C_q^n$, $U_i^n$.

EJEMPLO 1. En Ejemplo 1 § 44 $\varphi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\zeta$, $\eta$, $\theta$. Bajo la primera versión de la definición de uniformidad, esto se ve claramente por el hecho de que el análisis del esquema de derivación recursiva primitiva $\zeta, \eta, \theta, U_1^3, \theta_1, U_3^3, \psi, C_2^3, \varphi$ (formado por las explicaciones puestas a la derecha de 1–9) está fijado. Bajo la segunda versión, se ve por el hecho de que (b) expresa $\varphi = \mathsf{F}(\zeta, \eta, \theta)$ explícitamente en términos de $\mathbf{S}_3^3, \mathbf{S}_2^3, \mathbf{S}_1^3$, y $U_1^3, U_3^3, C_2^3$.

A veces se especifica un método para determinar una función $\varphi$ a partir de funciones $\Psi$ sólo bajo alguna restricción en las $\Psi$. En este caso, para establecer la uniformidad de la recursividad primitiva, hemos de mostrar que hay una sucesión fija de aplicaciones de los esquemas (I)–(V) que lleva desde $\Psi$ a la misma función $\varphi$ que el método dado, para cualesquiera $\Psi$ a las que el método se aplique (o se pretenda aplicar). La sucesión de aplicaciones de los esquemas (I)–(V) da entonces, de hecho, alguna función $\varphi$ a partir de cualesquiera $\Psi$ puesto que cada uno de los (I)–(V) tiene esta propiedad. Por tanto: el método dado constituye un funcional $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$ definido sólo para un rango restringido de $\Psi$. La sucesión de aplicaciones de (I)–(V) constituye un funcional $\varphi = \mathsf{F}_1(\Psi)$ definido completamente, que es recursivo primitivo y tal que $\mathsf{F}_1(\Psi) = \mathsf{F}(\Psi)$ sobre el rango de definición de $\mathsf{F}$.

EJEMPLO 2. Defínase una función $\varphi$ del modo siguiente

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } \psi_1(x) = 0, \\ \varphi_2(x) & \text{si } \psi_2(x) = 0, \\ \varphi_3(x) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\psi_1$, $\psi_2$ son funciones dadas y tales que, para cada $x$, $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son cada una 0 ó 1, pero no ambas 0. Podemos escribir

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x) = \overline{\text{sg}}(\psi_1(x)) \cdot \varphi_1(x) + \overline{\text{sg}}(\psi_2(x)) \cdot \varphi_2(x) + \psi_1(x) \cdot \psi_2(x) \cdot \varphi_3(x),$$

y concluir que $\varphi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$ (cfr. la primera demostración de # F § 45). La $\varphi$ de (a) estaba definida solamente para $\psi_1$, $\psi_2$ que satisfacían la restricción establecida; pero (b) define una $\varphi$ sin restricción alguna, y que es la misma $\varphi$ anterior cuando la restricción está satisfecha.

Para esquemas con predicados, decimos que una función $\varphi$ o predicado $P$ es *uniformemente recursivo primitivo en* predicados y funciones $\Psi$ si el enunciado correspondiente es válido cuando se reemplazan los predicados en $P$, $\Psi$ por sus funciones representantes. La interpretación recién desarrollada se aplica cuando las funciones introducidas como funciones representantes de los predicados en $\Psi$ son tratadas en la aplicación de los esquemas (I)–(IV) como variables funcionales sin restricciones.

Haciendo uso de la explicada interpretación, podemos decir que una función $\varphi$ (o predicado $P$) es uniformemente recursiva primitiva en $\Psi$ incluso aunque algunas de las $\Psi$ sean funciones (o predicados) particulares. En este caso, si cualquiera de

de estas $\Psi$ particulares son recursivas primitivas, $\varphi$ (o $P$) es uniformemente recursiva primitiva en el resto de las $\Psi$.

Si $\varphi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\theta$, $\Psi$ como variables funcionales y suponemos entonces que $\theta$ es $\theta^*$, la función resultante $\varphi^*$ es uniformemente recursiva primitiva en $\theta^*$, $\Psi$ (y por consiguiente, si $\theta^*$ es primitiva recursiva, en $\Psi$). Este principio vale sea $\theta^*$ una función particular o una variable funcional, incluido el caso de que dependa de variables numéricas adicionales $c_1, ..., c_p$ como parámetros. El principio se enuncia con precisión en el Lema I. A fin de aclarar cuántas (y qué) variables independientes tienen las funciones, escribimos $\theta = \lambda s_1 ... s_q \, \theta (s_1, ..., s_q)$ (una función de $q$ variables), $\theta^* = \lambda s_1 ... s_q c_1 ... c_p \; \theta^* (s_1, ..., s_q, c_1, ..., c_p)$ (una función de $q + p$ variables), y $\lambda s_1 ... s_q \; \theta^* (s_1, ..., s_q, c_1, ..., c_p)$ para la función de $q$ variables $s_1, ..., s_q$ que obtenemos a partir de $\theta^*$ cuando $c_1, ..., c_p$ son números fijos.

LEMA I. *Dado un funcional* $\varphi = \mathsf{F}(\theta, \Psi)$ *como sigue*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \mathsf{F}(\lambda s_1 ... s_q \, \theta (s_1 ... s_q), \Psi; x_1, ..., x_n),$$

*sea* $\varphi^* = \mathsf{G}(\theta^*, \Psi)$ *un funcional definido del modo siguiente*

$$\varphi^* (x_1, ..., x_n, c_1, ..., c_p) =$$

$$\mathsf{G}(\lambda s_1 ... s_q c_1 ... c_p \; \theta^* (s_1, ..., s_q, c_1, ..., c_p), \Psi; x_1, ..., x_n, c_1, ..., c_p) =$$

$$\mathsf{F}(\lambda s_1 ... s_q \; \theta^* (s_1, ..., s_q, c_1, ..., c_p), \Psi; x_1, ..., x_n).$$

*Si* $\mathsf{F}$ *es recursivo primitivo, también lo es* $\mathsf{G}$.

DEMOSTRACION. La esencia de la demostración reside en que tanto las definiciones explícitas como las recursiones primitivas siguen siendo tales cuando se introducen parámetros.

Para dar una demostración más detallada utilizamos inducción de curso-de-valores sobre la longitud $k$ de un esquema de derivación recursiva primitiva $\varphi_1, ..., \varphi_k$ de $\varphi$ a partir de $\theta$, $\Psi$. Se presentan siete casos, según que $\varphi (= \varphi_k)$ sea $\theta$, una de las $\Psi$ (digamos $\psi_i$), una función inicial por los esquemas (I), (II), o (III), o una dependiente inmediata de funciones precedentes por los esquemas (IV) o (V).

CASO 6: $\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi (\chi_1 (x_1, ..., x_n), ..., \chi_m (x_1, ..., x_n))$ donde $\psi, \chi_1, ..., \chi_m$ preceden a $\varphi (= \varphi_k)$ en $\varphi_1, ..., \varphi_k$. Entonces

$\varphi^* (x_1, ..., x_n, c_1, ..., c_p) = \psi^* (\chi^* (x_1, ..., x_n, c_1, ..., c_p), ..., \chi_m^* (x_1, ..., x_n,$

$c_1, ..., c_p), c_1, ..., c_p)$.

Por la hipótesis de inducción $\psi^*, \chi_1^*, ..., \chi_m^*$ son uniformemente recursivas primitivas en $\theta^*$, $\Psi$. Por # A, $\varphi^*$ es uniformemente recursiva primitiva en $\psi^*, \chi_1^*, ..., \chi_m^*$; y por consiguiente, en $\theta^*$, $\Psi$.

EJEMPLO 3. No toda función de teoría de números es recursiva primitiva. (¿Por qué? Cfr. §§ 1, 2: ¿es algebraico todo número real? ). Sea $\xi (c)$ una función particular que no es recursiva primitiva. Defínase $\varphi$ a partir de una función no especificada $\theta$ de modo que

$$\varphi(x) = \xi (\theta (0)).$$

Entonces, para cada $\theta$ particular, la $\varphi$ que resulta es una función constante, y por tanto es recursiva primitiva por una aplicación del Esquema (II) con $n = 1$, $q = \xi(\theta(0))$. A fortiori, para cada $\theta$, $\varphi$ es recursiva primitiva en $\theta$ con $C_q^1$ para $q = \xi(\theta(0))$ como una derivación recursiva primitiva de $\varphi$ a partir de $\theta$. Pero, debido a que el análisis de esta derivación depende de $\theta$, no podemos concluir que $\varphi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\theta$. Ciertamente, si lo fuera, por el Lema (I), tomando $U_2^2(s, c)$ ( que es recursiva primitiva) como $\theta^*(s, c)$, la función resultante $\varphi^*(x, c)$ sería recursiva primitiva y, por consiguiente también lo sería $\varphi^*(0, c)$. Pero $\varphi^*(0, c) = \xi(U_2^2(0, c)) = \xi(c)$. De modo que tampoco el Lema (I) tendría validez si la hipótesis de que $\mathsf{F}$ es recursivo primitivo, es decir, de que es uniformemente recursivo primitivo en $\theta$, $\Psi$, es debilitada hasta esta otra: $\varphi$ es recursiva primitiva en $\theta$, $\Psi$, para cada $\theta$, $\Psi$.– En este ejemplo $\varphi$ es sin duda uniformemente recursiva primitiva en $\xi$, $\theta$.

Puesto que las demostraciones anteriores establecen realmente la uniformidad:

## A–G (segundas versiones). *Reléanse las versiones originales con "uniformemente recursiva primitiva" en lugar de "recursiva primitiva".*

Normalmente una recursión por curso de valores se presenta en la forma siguiente. El valor ambiguo $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$ viene dado en términos de $y, x_2, ..., x_n$, de otras funciones y predicados $\Psi$, y de $\varphi(s, x_2, ..., x_n)$ como una función de $s$ para los $x_2, ..., x_n$ dados. La expresión en la que viene dado es el resultado de sustituir una variable funcional $\theta(s)$ de un funcional recursivo primitivo por $\varphi(s, x_2, ..., x_n)$. Este funcional tiene la propiedad de que su valor no cambia si los valores de $\theta(s)$ cambian solamente para $s \geq y$. Con otras palabras, hay un funcional recursivo primitivo $\mathsf{F}(\lambda s\, \theta(s), \Psi; y, x_2, ..., x_n)$ tal que

(6) $$\varphi(y, x_2, ..., x_n) = \mathsf{F}(\lambda s\, \varphi(s, x_2, ..., x_n), \Psi; y, x^2, ..., x_n),$$

$$\mathsf{F}(\lambda s\, \theta_1(s), \Psi; y, x_2, ..., x_n) = \mathsf{F}(\lambda s\, \theta_2(s), \Psi; y, x_2, ..., x_n)$$

(7) siempre que $\theta_1(s) = \theta_2(s)$ para todo $s < y$.

En estas condiciones, decimos que $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$ es *uniformemente recursiva primitiva en* $\varphi(s, x_2, ..., x_n)$ *para* $s < y$ *y* $\Psi$.

Igual terminología se usa para predicados (leyendo "$P$", "$H$", "$\equiv$" en lugar de "$\varphi$", "$\theta$", "$=$").

En caso de que estemos considerando la definición de $\varphi$ a partir de $\Psi$ sólo para un rango restringido de $\Psi$, entonces tanto (7) como (6) sólo necesitan valer en este rango.

EJEMPLO 4. Sea $\varphi(y, x)$ definida por

(a) $$\varphi(y, x) = y \cdot \rho(\varphi(\sigma(y), x)) + \mu z_{z < y}[\varphi(z, x) | y]$$

donde $\rho$, $\sigma$ son funciones dadas tales que $\sigma(y) < y$ para $y > 0$. Para ver que $\varphi(y, x)$ es uniformemente recursiva primitiva en $\varphi(s, x)$ para $s < y$ y $\rho$, $\sigma$, insertemos una función no especificada $\lambda s\, \theta(s)$ en lugar de $\lambda s\, \varphi(s, x)$ en el miembro derecho de (a), conviniendo en llamar $\chi_1(y, x)$ a la función resultante:

(b) $$\chi_1(y, x) = y \cdot \rho(\theta(\sigma(y))) + \mu z_{z < y}[\theta(z) | y].$$

Por # # A, C, 16 (usando las segundas versiones de A, C y E), $\chi_1(y, x)$ es uniformemente recursiva primitiva en $\theta$, $\rho$, $\sigma$; y cambiando los valores de $\theta(s)$ solamente para $s \geq y$ no cambiará el valor de $\chi_1(y, x)$ bajo la restricción sobre $\sigma$.

EJEMPLO 5. Podemos ver directamente a partir de (a) del Ejemplo 1 § 46 ((b) del Ejemplo 2 § 46) que $\varphi(y)$ es uniformemente recursiva primitiva en $\varphi(s)$ para $s < y$ (en $\varphi(s)$ para $s < y$ y en $\chi$). En vez de escribir primero "$\theta$" en lugar de "$\varphi$", necesitamos simplemente examinar cómo está construido el miembro derecho desde $\varphi(s)$ considerada momentáneamente como una función no especificada. De modo similar, a partir de (a) del Ejemplo 3 § 46, $T(y)$ es uniformemente recursivo primitivo en $T(s)$ para $s < y$ y en $V$.

# G (tercera versión). *Si $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$ es uniformemente recursivo primitivo en $\varphi(s, x_2, ..., x_n)$ para $s < y$ y en $\Psi$, entonces $\varphi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\Psi$. De modo semejante para un predicado (leyendo "$P$" en lugar de "$\varphi$").*

DEMOSTRACION, para una función $\varphi$. Por (6), (7) y (2),

$$\begin{aligned} (8) \qquad \varphi(y, x_2, ..., x_n) &= \mathsf{F}(\lambda s(\widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n))_s, \Psi; y, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \chi(y, \widetilde{\varphi}(y; x_2, ..., x_n), x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

donde

$$(9) \qquad \chi(y, c, x_2, ..., x_n) = \mathsf{F}(\lambda s(c)_s, \Psi; y, x_2, \ldots, x_n).$$

Por el Lema I, $\chi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\lambda sc(c)_s$, $\Psi$; y por consiguiente por # 19, en $\Psi$. Ahora se aplica la segunda versión de # G.

El resultado para un predicado $P$ se obtiene pasando de $P$ a su función representante.

OBSERVACION 1. Cfr. la Observación 1, final §44. *Si $\varphi$, $\Psi$ son funciones de $n, m_1, ..., m_l > 0$ variables, entonces $\varphi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\Psi$ bajo la base* B *si, y sólo si, lo es bajo la base* A. Pues cualquier esquema de derivación recursiva primitiva de $\varphi$ a partir de $\Psi$ bajo la Base A puede transformarse en una bajo la Base B tomando como arriba una descripción bajo la Base B de $C_q^n$ (de $C_q^0$) para cada aplicación de (II) (de Va)). A la inversa, dado un esquema de derivación recursiva primitiva $\varphi_1, ..., \varphi_k$ de $\varphi$ a partir de $\Psi$ bajo la Base B, puede ser obtenido uno bajo la Base A por el siguiente proceso. Digamos que $n = l = m_1 = 1$, esto es, que la derivación es de $\varphi(x)$ a partir de $\psi(y)$. Introdúzcase un parámetro $c$ en cada una de las funciones $\varphi_1, ..., \varphi_k$. De modo similar a la demostración del Lema I, podemos entonces obtener un esquema de derivación recursiva de $\varphi(x, c)$ a partir de $\psi(y, c)$ bajo la Base A. Para ello fijamos primero $\psi(y, c) = \psi(U_1^2(y, c))$ y luego $\varphi(x) = \varphi(U_1^1(x), C_0^1(x))$.– Por ejemplo, si $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi(y') = \chi(y, \varphi(y))$, entonces $\varphi$ es uniformemente recursiva primitiva en $\psi$, $\chi$ bajo la Base B (usando sucesivamente ($\mathrm{II_B}$), (IV) con $n = 0$, (Vb) con $n = 1$). Por consiguiente lo es también bajo la Base A.

§ 48. **La función $\beta$ de Gödel.** El segundo problema de este capítulo es mostrar que todo predicado recursivo primitivo es expresable numeralmente en el sistema

formal del Capítulo IV, incluso a pesar de que este sistema sólo tiene símbolos de función para las tres funciones $'$, $+$, $\cdot$. Demostraremos esto en la próxima sección siguiendo un método de Gödel (1931, 1934).

Esta demostración no es esencial para nuestro programa de formalización de la teoría de números. Si no se hubiera logrado, podríamos, en su lugar, haber puesto como axiomas del sistema ecuaciones de recursión para otras funciones además de para $+$ y $\cdot$. En realidad podemos incluir ecuaciones de recursión para todas las funciones recursivas primitivas mediante un sistema infinito enumerable de axiomas particulares de teoría de números. Sin embargo tiene cierto interés que sea suficiente un sistema finito, y, a ser posible, un sistema en el que nos baste con las dos funciones principales $+$ y $\cdot$ de la aritmética tradicional, junto con las constantes lógicas y el predicado $=$.

Gödel ha llamado *aritmético* a un predicado cuando puede ser expresado explícitamente en términos de números naturales constantes y variables, de las funciones $+$ y $\cdot$, de la igualdad $=$, de las operaciones $\rightarrow$, &, $\vee$, $\neg$ del cálculo proposicional, y de los cuantificadores $(x)$ y $(Ex)$, combinados según las reglas sintácticas usuales. (Usa el adjetivo 'aritmético' en el sentido más estricto, § 9).

El lector puede, sin dificultad, elaborar esta definición más completamente como definición inductiva, de modo paralelo a la definición de fórmula del sistema formal. Predicados aritméticos son precisamente aquéllos que pueden expresarse mediante formas nominales en el sistema formal con la interpretación usual de los símbolos. (Comparando con el tratamiento formal en §§ 39 y 41, $a < b$ y $\mathrm{rs}(c, d) = w$ son aritméticos).

Por el momento mantendremos la discusión en un plano informal, usando un simbolismo intuitivo. Para su aplicación a predicados recursivos primitivos se requiere usar los cuantificadores solamente de modo constructivo.

En la sección próxima necesitaremos un método para tratar secuencias finitas $a_0, \ldots, a_n$ de números naturales de modo aritmético; allí no podemos usar las funciones $a^b$, $p_i$ y $(a)_i$ de §§ 44, 45 con las que hemos manejado secuencias finitas de modo recursivo primitivo en §§ 46, 47.

Sabemos que el predicado $\mathrm{rs}(c, d) = w$, donde $\mathrm{rs}(c, d)$ es el resto de dividir $c$ por $d$, es aritmético.

Se dice que un conjunto de enteros positivos $d_0, \ldots, d_n$ son *primos entre sí*, si no hay dos de ellos que tengan un factor entero positivo común excepto 1. Por ejemplo 3, 4, 5 son primos entre sí.

Considérense los $n + 1$-tuplos de los valores de la función $\mathrm{rs}(c, d)$, para un $n + 1$-tuplo fijo de divisores $d_0, \ldots, d_n$, primos entre sí cuando se incrementa $c$. Por ejemplo (con $n = 1$), si $d_0 = 3, d_1 = 4$, son como sigue

| $c$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{rs}(c, 3)$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | ... |
| $\mathrm{rs}(c, 4)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | ... |

Vemos que, cuando $c$ va de 0 a 11, el par de restos $\mathrm{rs}(c, 3)$, $\mathrm{rs}(c, 4)$ recibe cada uno de los 12 posibles pares ordenados de números $a_0, a_1$ para $a_0 < 3, a_1 < 4$.

Para establecer esto de modo general, supongamos que $\mathrm{rs}(c, d_0)$, $\mathrm{rs}(c, d_1)$, ..., $\mathrm{rs}(c, d_n)$ toman los valores respectivos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ para $c = j$ y también después

$c = j + k$. Como $j$ y $j + k$ dan el mismo resto $a_i$ al dividirlos por $d_i$ $(i = 0, ..., n)$, su diferencia $k$ debe contener a $d_i$ exactamente; digamos que $k = b_i d_i$. De este modo

$$k = b_0 d_0 = b_1 d_1 = \ldots = b_n d_n.$$

Aquí $k$ tiene cada uno de los $d_0, d_1, ..., d_n$ como factores. Puesto que por hipótesis $d_0, ..., d_n$ son primos entre sí, en virtud del teorema fundamental de la aritmética (§ 45) $k$ ha de ser un múltiplo de su producto $d_0 \cdot d_1 \cdot ... \cdot d_n$.

En consecuencia, el $n + 1$-tuplo ordenado rs $(c, d_0)$, rs $(c, d_1)$, ..., rs $(c, d_n)$ no puede volver a ser una secuencia dada de números $a_0, a_1, ..., a_n$ sino después de $d_0 \cdot d_1 \cdot ... \cdot d_n$ valores consecutivos de $c$. Pero hay exactamente $d_0 \cdot d_1 \cdot ... \cdot d_n$ secuencias diferentes de números $a_0, a_1, ..., a_n$ para $a_0 < d_0, a_1 < d_1, ..., a_n < d_n$. Cada secuencia es, por consiguiente, tomada una sola vez en cualesquiera $d_0 \cdot d_1 \cdot ... \cdot d_n$ valores consecutivos de $c$.

Siguiendo a Gödel 1934, utilizamos este hecho para construir una función $\beta(c, d, i)$ con estas dos propiedades:

(1) *el predicado* $\beta(c, d, i) = w$ *es aritmético, y*

(2) *para cualquier secuencia finita de números naturales* $a_0, a_1, ..., a_n$, *puede hallarse un par de números naturales* $c, d$ *tales que*

$$\beta(c, d, i) = a_i \qquad (i = 0, 1, ..., n).$$

Como sabemos, puede elegirse un número $c$ $(c < d_0 \cdot d_1 \cdot ... \cdot d_n)$ de modo que rs $(c, d_i) = a_i$ para $i = 0, 1, ..., n$, supuesto que $d_0, d_1, ..., d_n$ es un conjunto de números tales que (a) $d_0, d_1, ..., d_n$ son primos entre sí y (b) $a_0 < d_0$, $a_1 < d_1, ..., a_n < d_n$. El problema estará resuelto si obtenemos los números $d_0, d_1, ..., d_n$ como valores de una función $\delta(d, i)$ para $i = 0, 1, ..., n$ y un número adecuado $d$, de tal modo que

$$\text{(i)} \qquad \beta(c, d, i) = \text{rs}(c, \delta(d, i))$$

satisfaga también (1).

Ahora bien, (1) quedará satisfecho si tomamos

$$\text{(ii)} \qquad \delta(d, i) = 1 + (i + 1)d.$$

Pues rs $(c, d) = w$ es aritmético, y $\delta(d, i)$, por el cual sustituimos $d$ para obtener $\beta(c, d, i) = w$, está explícitamente definido a partir de 1, + y $\cdot$.

En la secuencia dada de números $a_0, a_1, ..., a_n$, sea $s$ el mayor de los $n, a_0, a_1, ..., a_n$, y hágase $d = s!$.

Entonces, (a) los números $d_i = \delta(d, i)$ para $i = 0, 1, ..., n$ son primos entre sí. Pues si dos de ellos $1 + (j + 1)s!$ y $1 + (j + k + 1)s!$ tuvieran un factor común diferente de 1, tendrían en común un factor primo $p$ y este factor $p$ dividiría la diferencia, que es $k \cdot s!$. Pero $p$ no puede dividir a $s!$, ya que entonces dividirá a $(j + 1)s!$, lo que es imposible si divide a $1 + (j + 1)s!$. Entonces $p$ no puede dividir tampoco a $k$, ya que $k \leq n \leq s$ y todo número $\leq s$ divide a $s!$. Por consiguiente, $p$ no puede dividir a $k \cdot s!$; y por reducción al absurdo queda demostrado (a).

Además (b) para todo $i$ $(i = 0, 1, ..., n)$, $a_i \leq s \leq s! < 1 + (i + 1)s! = \delta(d, i) = d_i$.

Julia Robinson 1949* demostró que el predicado $|$ (# 16) y la función $'$ pueden usarse en lugar de las dos funciones + y $\cdot$ en la definición de los predicados

aritméticos; y Church y Quine 1952 demostrarán que un predicado diádico simétrico convenientemente elegido puede ser usado en su lugar.

§ 49. **Funciones recursivas primitivas y el formalismo de teoría de números.** TEOREMA I. *Si* $\varphi(x_1, ..., x_n)$ *es una función primitiva recursiva, entonces el predicado* $\varphi(x_1, ..., x_n) = w$ *es aritmético* (Gödel 1931).

DEMOSTRACION, por inducción de curso-de-valores sobre la longitud $k$ de una descripción recursiva primitiva $\varphi_1, ..., \varphi_k$ de $\varphi$ (cfr. § 43). Los casos (I)–(V) corresponden a los cinco esquemas mediante los cuales $\varphi_k$, esto es, $\varphi$ puede ocurrir en la descripción. (Para una demostración con una estructura por casos similar, cfr. la del Teorema 1 § 21).

CASO (I): $\varphi(x) = x'$. Entonces $\varphi(x) = w \equiv w = x + 1$, y $w = x + 1$ es aritmético.

CASO (II): $\varphi(x_1, ..., x_n) = q$. Entonces $\varphi(x_1, ..., x_n) = w \equiv w = q$.

CASO (IV): $\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n))$, donde por la hipótesis de inducción $\psi(y_1, ..., y_n) = w$, $\chi_1(x_1, ..., x_n) = y_1, ..., \chi_m(x_1, ..., x_n) = y_m$ son aritméticos. Entonces $\varphi(x_1, ..., x_n) = w \equiv (Ey_1) ... (Ey_m)[\chi_1(x_1, ..., x_n) = y_1 \,\&\, ... \,\&\, \chi_m(x_1, ..., x_n) = y_m \,\&\, \psi(y_1, ..., y_m) = w]$.

CASO (Vb): $\varphi(0, x_2, ..., x_n) = \psi(x_2, ..., x_n)$, $\varphi(y', x_2, ..., x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n)$, donde $\psi(x_2, ..., x_n) = w$ y $\chi(y, z, x_2, ..., x_n) = w$ son aritméticos. Supongamos que $y, x_2, ..., x_n, w$ son números tales que $\varphi(y, x_2, ..., x_n) = w$ es verdadero. Entonces hay una secuencia finita de números

$$a_0, a_1, ..., a_y$$

(los valores de $\varphi(i, x_2, ..., x_n)$ para $i = 0, 1, ..., y$) tal que

$$\begin{aligned} &a_0 = \psi(x_2, ..., x_n), \\ &a_1 = \chi(0, a_0, x_2, ..., x_n), \\ &a_2 = \chi(1, a_1, x_2, ..., x_n), \\ &\quad \cdots \\ &a_y = \chi(y - 1, a_{y-1}, x_2, ..., x_n), \\ &w = a_y. \end{aligned} \tag{A}$$

Pero entonces hay números $c, d$, para la función $\beta$ de Gödel tales que $\beta(c, d, i) = a_i$ $(i = 0, 1, ..., y)$, y las igualdades (A) pueden ser expresadas usando las $\beta(c, d, i)$ en lugar de las $a_i$ del modo siguiente:

$$\begin{aligned} &(Ec)(Ed)\{\beta(c, d, 0) = \psi(x_2, ..., x_n) \\ &\&\, (i)[i < y \to \beta(c, d, i + 1) = \chi(i, \beta(c, d, i), x_2, ..., x_n)] \\ &\&\, w = \beta(c, d, i)\}. \end{aligned} \tag{B}$$

A la inversa, si (B) es verdadero, entonces, para cualesquiera $c$ y $d$ dados por (B), los números $\beta(c, d, i)$ para $i = 0, 1, ..., y$ constituyen una secuencia $a_0, a_1, ..., a_y$

que satisface (A); y (A) implica que $\varphi(y, x_2, ..., x_n) = w$; por consiguiente, $\varphi(y, x_2, ..., x_n) = w$ es equivalente a (B). Pero (B) es un predicado aritmético de $y, x_2, ..., x_n, w$, como se ve volviéndolo a escribir en la forma

$$(Ec)\,(Ed)\,\{(Eu)\,[\beta(c,d,0)=u \,\&\, \psi(x_2,...,x_n)=u]\,\&\,(i)\,[i<y \rightarrow$$
$$(C)\quad (Eu)\,(Ev)\,[\beta(c,d,i+1)=u \,\&\, \beta(c,d,i)=v \,\&\, \chi(i,v,x_2,...,x_n)=u]]$$
$$\&\,\beta(c,d,y)=w\},$$

y tomando en cuenta la hipótesis de inducción y el carácter aritmético de $\beta(c, d, i) = w$ y de $i < y$.

El análisis de la recursión primitiva en términos de secuencias finitas de números naturales usado aquí es una adaptación a teoría de números del análisis de la recursión primitiva efectuado por Dedekind (1888).

COROLARIO. *Todo predicado recursivo primitivo* $P(x_1, ..., x_n)$ *es aritmético.*

Pues $P(x_1, ..., x_n) \equiv \varphi(x_1, ..., x_n) = 0$, donde $\varphi$ es la función representante de $P$ (§ 45). A la inversa, el teorema se sigue de su corolario utilizando ## 14, C. El teorema, sin embargo, tiene la forma necesaria para la demostración por inducción sobre la longitud de la descripción $\varphi_1, ..., \varphi_k$.

Traduciendo del simbolismo aritmético intuitivo al simbolismo formal, obtenemos una fórmula $P(x_1, ..., x_n, w)$ que expresa $\varphi(x_1, ..., x_n) = w$ bajo la interpretación del sistema formal. Por este procedimiento vamos a demostrar ahora el teorema siguiente.

TEOREMA 27. *Toda función recursiva primitiva* $\varphi(x_1, ..., x_n)$ *es representable numeralmente* (§ 41) *en el sistema formal del capítulo* IV; *es decir, hay una fórmula* $P(x_1, ..., x_n, w)$ *que no contiene más variables libres que las diferentes variables* $x_1, ..., x_n, w$, *y tal que, para cada n-tuplo de números naturales* $x_1, ..., x_n$,

(v) *si* $\varphi(x_1, ..., x_n) = w$, *entonces* $\vdash P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$, *y*

(vi) $\vdash \exists!\, w P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, w)$.

DEMOSTRACION. La construcción de $P(x_1, ..., x_n, w)$, y la demostración del teorema se hacen por una inducción de curso-de-valores sobre $k$ correspondiendo los casos (I)–(V) a los de la demostración del Teorema I.

CASO (Vb). Por la hipótesis de inducción, hay fórmulas $Q(x_2, ..., x_n, w)$ y $R(y, z, x_2, ..., x_n, w)$ que representan numeralmente las funciones respectivas $\psi(x_2, ..., x_n)$ y $\chi(y, z, x_2, ..., x_n)$, esto es, tienen para estas funciones las propiedades correspondientes a (v) y (vi) para $\varphi(x_1, ..., x_n)$.

Según *(180) § 41, la función $\beta$ de Gödel $\beta(c, d, i)$ [$= \mathrm{rs}(c, 1 + (i + 1)\,d = \mathrm{rs}(c, (i' \cdot d)')$] es representada numeralmente por una fórmula $B(c, d, i, w)$ que tiene una propiedad ulterior *180a.

La fórmula

$$\exists c\, \exists d\, \{\exists u\, [B(c, d, 0, u) \,\&\, Q(x_2, ..., x_n, u)] \,\&\, \forall i\, [i < y \supset \exists u\, \exists v\, [B(c, d, i', u)$$
$$\&\, B(c, d, i, v) \,\&\, R(i, v, x_2, ..., x_n, u)]] \,\&\, B(c, d, y, w)\}$$

será la fórmula P (y, $x_2$, ..., $x_n$, w) para representar $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$. Hemos de mostrar que tiene las propiedades (v) y (vi).

Para establecer (v), sean $y, x_2, ..., x_n, w$ números tales que $\varphi(y, x_2, ..., x_n) = w$. Entonces existen números $a_0, a_1, ..., a_y$ como en la demostración del Teorema I, y también números $c$, y $d$ para estos $a_0, a_1, ..., a_y$ tales que $\beta(c, d, i) = a_i$ $(i = 0, 1, ..., y)$. En virtud de la propiedad (v) para B, Q y R, valen los siguientes enunciados:

$$\vdash B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, 0, \boldsymbol{a_0}), \qquad \vdash Q(\boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{a_0}),$$
$$\vdash B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, 1, \boldsymbol{a_1}), \qquad \vdash R(0, \boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{a_1}),$$
$$\cdots$$
$$\vdash B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_y}), \qquad \vdash R(\boldsymbol{y}-1, \boldsymbol{a_{y-1}}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{a_y}),$$
$$\vdash B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}).$$

A partir de aquí podemos mostrar que $\vdash P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{w})$ por &-introd., $\exists$-introd. y *166 § 41.

Para establecer (vi) utilizamos una inducción intuitiva sobre $y$. PASO INDUCTIVO. Sea $w = \varphi(y, x_2, ..., x_n)$ y $u = \varphi(y', x_2, ..., x_n) = \chi(y, w, x_2, ..., x_n)$. Por (v) y (vi) para R (y utilizando para abreviar la presentación informal del principio de § 38): (a) $R(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{u})$, y (b) $\exists!\, uR(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{u})$. Por (v) (como ya se estableció para P): (c) $P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{w})$, y (d) $P(\boldsymbol{y'}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{u})$. Por la hipótesis de inducción sobre $y$: (e) $\exists!\, wP(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, w)$. Hemos de demostrar $\exists!\, wP(\boldsymbol{y'}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, w)$. Supongamos: (f) $P(\boldsymbol{y'}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, w)$. Por *170 con (d), bastará con deducir $\boldsymbol{u} = w$ con w mantenida constante. Para & y $\exists$-eliminación a partir de (f), supongamos (g) $\exists u[B(c, d, 0, u) \,\&\, Q(\boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{u})]$, (h) $\forall i\,[i < \boldsymbol{y'} \supset \exists u\, \exists v\, [B(c, d, i', u) \,\&\, B(c, d, i, v) \,\&\, R(i, v, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, u)]]$, y (i) $B(c, d, \boldsymbol{y'}, w)$. A partir de (h), utilizando *138a §39 (o *167 y *166): (j) $\forall i\,[i < \boldsymbol{y} \supset \exists u\, \exists v\, [B(c, d, i', u) \,\&\, B(c, d, i, v) \,\&\, R(i, v, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, u)]]$, y (k) $\exists u\, \exists v\, [B(c, d, \boldsymbol{y'}, u) \,\&\, B(c, d, \boldsymbol{y}, v) \,\&\, R(\boldsymbol{y}, v, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, u)]$. Para & y $\exists$-eliminación a partir de (k), supongamos: (l) $B(c, d, \boldsymbol{y}, u)$, (m) $B(c, d, \boldsymbol{y}, v)$, y (n) $R(\boldsymbol{y}, v, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, u)$. Partiendo de (g), (j) y (m) por &- y $\exists$-introd.: (o) $P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, v)$. Partiendo de (o), (c) y (e) por *172, $v = \boldsymbol{w}$, que con (n) da: (p) $R(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x_2}, ..., \boldsymbol{x_n}, u)$. Partiendo de (p), (a), y (b) por *172, $u = \boldsymbol{u}$, que con (l) da: (q) $B(c, d, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{u})$. Partiendo de (q), (i), *180a y *172, $\boldsymbol{u} = w$, como había que deducir.

COROLARIO. *Todo predicado recursivo primitivo $P(x_1, ..., x_n)$ es expresable numeralmente en el sistema formal.*

Pues si $P(x_1, ..., x_n, w)$ representa numeralmente la función representante $\varphi$ de *P*, entonces utilizando (vii) §41 (obtenido allí por *173, *164)), $P(x_1, ..., x_n, 0)$ expresa numeralmente *P*.

LEMA 18b. *El Teorema 27 y su Corolario valen para el sistema formal de Raphael Robinson (§§ 41, 76) consistente en el cálculo de predicados con trece axiomas particulares de teoría de números: los axiomas* 14–21, *y (las fórmulas de)* *104–*107 *y* *137 (*o* *136).

Utilizando el Lema 18a § 41.

OBSERVACION 1. Una empresa más ambiciosa (con respecto al sistema completo, no al de Robinson) sería establecer la demostrabilidad de fórmulas que expresen las ecuaciones de recursión; p. ej., establecer para el Caso (Vb):

(1) $\vdash P(0, x_2, ..., x_n, w) \sim Q(x_2, ..., x_n, w)$.

(2) $\vdash P(y', x_2, ..., x_n, w) \sim$
$\exists z\,[P(y, x_2, ..., x_n, z) \,\&\, R(y, z, x_2, ..., x_n, w)]$.

A partir de (1) y (2) por inducción formal sobre y (dado por la hipótesis de una inducción intuitiva sobre $k$ que $\vdash \exists! w Q(x_2, ..., x_n, w)$ y $\vdash \exists! w R(y, z, x_2, ..., x_n, w)$), entonces

(3) $\vdash \exists! w P(y, x_2, ..., x_n, w)$.

Para establecer (1) y (2) comenzaríamos por formalizar la teoría de la función $\beta$ que dimos de modo informal en § 48. Sería suficiente con establecer

($\alpha$) $\vdash \exists c\, \exists d\, B(c, d, 0, w)$.

($\beta$) $\vdash \exists c_2\, \exists d_2\, \{\forall i\,[i \leq y \supset \exists u\,[B(c_1, d_1, i, u) \,\&\, B(c_2, d_2, i, u)]] \,\&$
$B(c_2, d_2, y', w)\}$.

Pues entonces podrían demostrarse las cuatro implicaciones de (1) y (2), usando *180c, ($\alpha$) (para la segunda), y ($\beta$) (para la cuarta).— No vamos a gastar espacio en llevar a cabo la formalización que establecería ($\alpha$) y ($\beta$). Hilbert y Bernays 1934 págs. 401-419 lo han hecho ya prácticamente en otro sistema formal, por lo que (del modo que se indicará antes del Ejemplo 9 § 74) puede inferirse que ($\alpha$) y ($\beta$) valen (clásica o intuicionistamente) en nuestro sistema.

CAPITULO X

# LA ARITMETIZACION DE LA METAMATEMATICA

**§ 50. La metamatemática como una aritmética generalizada.** En § 42 hicimos notar (siguiendo a Gödel 1931) que la metamatemática se convierte en una rama de la aritmética de los números naturales cuando se elige una enumeración particular de objetos formales, o una correlación particular de distintos números naturales a los distintos objetos formales (sin usar todos los números), y se habla luego de los números correlacionados en lugar de hablar de los objetos formales. En este capítulo vamos a llevar a cabo una tal aritmetización de la metamatemática, haciendo uso de una numeración de Gödel similar a la de Hilbert y Bernays 1939.

Pero en vez de llevar a cabo directamente la aritmetización, representaremos primero el sistema formal en la forma intermedia de una aritmética generalizada, y luego la aritmética generalizada en la aritmética ordinaria. Esto pondrá de manifiesto ciertas analogías que poseen un valor heurístico, y la representación del sistema como aritmética generalizada será por sí misma de interés.

La aritmética de los números naturales trata del dominio de objetos generado a partir de un objeto primitivo 0 y por aplicación de una operación primitiva $'$ o $+1$ (§ 6).

Una aritmética generalizada (para nuestro actual propósito) se obtiene suponiendo uno o más ceros, y una o más operaciones sucesor. Nos atendremos a la convención (que no es la única útil) de que los objetos generados a partir de los objetos primitivos por modos diferentes son diferentes. Hay varias posibilidades de representación del sistema formal como una aritmética generalizada. Hermes 1938 considera una aritmética con la expresión vacía como el cero, y las operaciones de sufijación de uno de los símbolos formales como las operaciones sucesor.

La aritmética generalizada que elegimos tiene una estructura más complicada que una aritmética, pero está diseñada para representar directamente la estructura lógica y gramatical de los objetos formales. Tendrá $r + 1$ ceros $0_0, 0_1, ..., 0_r$, donde $r$ es un número natural que se especificará más tarde, y tendrá una operación sucesor aplicable a un $s + 1$-tuplo de argumentos, para cada uno de los números naturales de valores de $s$ que se especificarán más tarde. El resultado de la operación sucesor aplicada a $x_0, x_1, ..., x_s$ como argumentos se escribe "$(x_0, x_1, ..., x_s)$" o también a veces "$x_0\,(x_1, ..., x_s)$". Llamamos *entidades* a los objetos pertenecientes a esta aritmética generalizada.

Podemos expresar esto mediante una definición inductiva (análoga a la dada para 'número natural' en §6). 1. $0_0, 0_1, ..., 0_r$ son entidades. 2. Para cada $s$ admitido, si $x_0, x_1, ..., x_s$ son *entidades*, entonces $(x_0, x_1, ..., x_s)$ es una *entidad*. 3. Las únicas *entidades* son las dadas por 1 y 2.

Como ya hemos indicado, dos entidades serán iguales si, y sólo si, están generadas del mismo modo a partir de los ceros por las operaciones sucesor. Para indicar que x e y son iguales escribimos "$x \asymp y$" (desiguales, "$x \not\asymp y$"). Usamos "$\asymp$" en lugar de "$=$" únicamente para evitar confusiones con el $=$ del sistema formal.

Pueden enunciarse axiomas que caractericen el dominio de entidades, análogos

a los de Peano para los números naturales (§§ 6, 7). Incluyen en particular, el principio de demostración por inducción matemática en la fórmula correspondiente al modo de generación del dominio de entidades (o a la definición inductiva recién dada): si las entidades $0_0$, $0_1$, ..., $0_r$ poseen cada una una cierta propiedad, y si para cada $s$ admitido, siempre que las entidades $x_0$, $x_1$, ..., $x_s$ posean la propiedad, la entidad $(x_0, x_1, ..., x_s)$ la posee también, entonces todas las entidades poseen la propiedad. El enunciado de los restantes axiomas de Peano para la aritmética generalizada se deja al lector.

El proceso de generación de las entidades las ordena parcialmente (final § 8); escribimos "$x \prec y$" para indicar que x es generada antes que y en el proceso de generación de y. Dicho inductivamente: 1. Para cada $s$ admitido y para cada $i \leq s$, $x_i \prec (x_0, x_1, ..., x_s)$. 2. Para cada $s$ admitido y cada $i \leq s$, si $x \prec x_i$, entonces $x \prec (x_0, x_1, ..., x_s)$. 3. $x \prec y$ sólo en el modo requerido por 1 y 2.

Definimos una función de una entidad x y un número natural $i$, que da los predecesores de una entidad sucesor, como sigue:

$$\{x\}_i \succcurlyeq \begin{cases} x_i, \text{ si } x \succcurlyeq (x_0, x_1, ..., x_s) \text{ y } i \leq s, \\ x, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Especificamos ahora para el resto de este capítulo que el número $r + 1$ de los ceros $0_0$, $0_1$, ..., $0_r$ será de trece, y los nombramos como sigue:

$$\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists, =, +, \cdot, ', 0, a, {}_{|}.$$

Especificamos además que $s$ admite los valores 0, 1 y 2. Con esto queda completa la definición de nuestra aritmética generalizada como un dominio de objetos abstractos que pueden ser reconocidos y distinguidos unos de otros como individuos por el modo de su generación.

Debemos determinar ahora el modo de representar el sistema formal (tal como se introdujo originariamente en el capítulo IV) en la aritmética generalizada. Consistirá en dar una correlación de entidades a objetos de este sistema formal. En § 16 se explicó que estos objetos formales consisten en símbolos formales, secuencias finitas de símbolos formales (llamadas 'expresiones formales') y secuencias finitas de expresiones formales. No es necesario correlatar una entidad a todo objeto formal, sino sólo a aquellos objetos formales que son relevantes para la metamatemática. Por ejemplo, una expresión no-sintáctica como ((0∀00 = no tendrá entidad correlato. También habrá entidades no correlatadas a un objeto formal.

A los once primeros símbolos formales alistados en § 16 les correlatamos, respectivamente, las entidades $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, =, +, ·, ', 0, que ahora estamos designando con los mismos símbolos, esto es, les correlatamos, respectivamente, los once primeros ceros de la aritmética generalizada.

A las variables $a, b, c, d, ...$ del sistema formal, les correlatamos, respectivamente, las entidades

$$a, \quad ({}_{|}, a), \quad ({}_{|}, ({}_{|}, a)), \quad ({}_{|}, ({}_{|}, ({}_{|}, a))), ...$$

(que a veces se escriben $a$, $a_{|}$, $a_{||}$, $a_{|||}$, ...), es decir, el cero duodécimo, y las demás entidades obtenidas a partir de él mediante aplicaciones repetidas de la operación sucesor de la aritmética generalizada con $s = 1$ y con el décimotercer cero como primer predecesor.

Con términos y fórmulas tales como r + s, r', r = s, A & B, ¬ A, ∀xA (x) corre-

lacionamos las entidades $(+, r, s)$, $(', r)$, $(=, r, s)$, $(\&, A, B)$, $(\neg, A)$, $(\forall, x, A(x))$, respectivamente, donde r, s, A, B, x, A (x) son ahora las entidades correlatadas a los r, s, A, B, x, A (x), dados, esto es, repetimos el procedimiento de correlación sobre los r, s, A, B, x, A (x), dados.

EJEMPLO 1. La entidad correlacionada a la forma $\exists b(\neg\, b = 0)$ es $(\exists, (', a), (\neg, (=, (', a), 0)))$.

Desde ahora, sin embargo, para designar estas entidades, utilizaremos las antiguas expresiones, excepto cuando deseemos hacer resaltar su estructura (esto es, modo de generación) como entidades. Por ejemplo, si $\forall$, x, A (x) son entidades, podemos escribir su sucesor $(\forall x, A(x))$ como "$\forall x A(x)$" y si $+$, r, s son entidades, podemos escribir $(+, r, s)$ como "$r + s$". Este modo de designar las entidades correlatadas a los objetos del sistema formal hará que los enunciados sobre entidades sean leídos igual que se leían los enunciados sobre objetos del sistema formal.

Además, al tratar de la aritmética generalizada, es conveniente llamar simplemente una "fórmula" a la entidad $\forall x A(x)$ correlatada a una fórmula (es decir, a la entidad $(\forall, x, A(x))$); "término" a la entidad $r + s$, etc.; y al sistema de estas entidades "el sistema formal como una aritmética generalizada" en contraste con el sistema formal tal como se le describió originariamente, al que podemos distinguir, cuando sea necesario, llamándolo el "sistema lingüístico formal".

Las demostraciones y deducciones se representarán mediante las entidades que les correspondan en su forma de árbol (final § 24), en vez de en su forma de secuencias finitas de fórmula. Así pues, para obtener la entidad correspondiente a una deducción en forma secuencial con un análisis dado, se pone primero esta deducción en su forma de árbol. Entonces tiene una de estas tres formas

$$\mathfrak{D}, \qquad \frac{P}{\mathfrak{D},} \qquad \frac{P \quad Q}{\mathfrak{D},}$$

donde $\mathfrak{D}$ es una fórmula y P y Q son deducciones en forma de árbol. En la aritmética generalizada las interpretamos como entidades $(\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{D}, P)$, $(\mathfrak{D}, P, Q)$, respectivamente, interpretando, naturalmente, al mismo tiempo a $\mathfrak{D}$, P, Q como las entidades correlatadas de los objetos lingüísticos $\mathfrak{D}$, P, Q. (En particular, una fórmula $\mathfrak{D}$, y una deducción que conste de una fórmula simple $\mathfrak{D}$, se convierte en entidades diferentes; la entidad en que se convierte la última es el sucesor con $s = 0$ de la entidad en que se convierte la primera).

EJEMPLO 2. La deducción (6) del § 21, después de ser transcrita en forma de árbol como en el Ejemplo 1 § 24, se convierte en una entidad que podemos escribir como $(8, (7, (1), (6)), (5, (3, (1), (2)), (4)))$ donde los números 1–8 son abreviaturas de las fórmulas de (6) § 21 consideradas ahora como entidades.

Con esto queda completa la correlación de entidades a los objetos lingüísticos formales relevantes. A objetos lingüísticos formales distintos, se correlatan entidades distintas (excepto en el caso de dos demostraciones o deducciones en forma secuencial que no difieran esencialmente, y se conviertan en la misma en forma de árbol). La demostración de ello, para el caso de términos y fórmulas, depende de la unicidad de los alcances de los operadores en los términos y fórmulas como expresiones lingüísticas formales (§ 17).

Con este modo de pasar del sistema lingüístico formal a la aritmética generalizada, hemos realizado dos cambios, cada uno de los cuales podía haber sido realizado por separado. El primero de estos cambios lo ha sido en la estructura atribuida a los objetos formales. En la representación lingüística, términos y fórmulas, eran secuencias finitas de símbolos formales, en donde las partes significantes habían de ser reconocidas como subsecuencias, mientras en la aritmética generalizada se construyen directamente desde las partes significantes mediante la operación sucesor generalizada. En esta última, el análisis de expresiones en sus partes significantes (incluyendo el uso de paréntesis) ha pasado del nivel formal a la exposición de la metamatemática, donde no tiene por qué preocuparnos.

Considérese, por ej., (A) ⊃ (B) como una fórmula del sistema lingüístico donde A y B son fórmulas (es decir, "A" y "B" son letras metamatemáticas que designan fórmulas). Estamos, en este caso, hablando explícitamente de una secuencia finita de símbolos, en la que los cuatro paréntesis son símbolos de la secuencia y las secuencias designadas por "A" y "B" ocurren en la posición indicada en la secuencia (§ 16).

Considérese, por otra parte, (A) ⊃ (B) como una fórmula del sistema de entidades donde A y B son asimismo fórmulas. Ahora "(A) ⊃ (B)" quiere decir (⊃, A, B), que es el sucesor de las tres entidades ⊃, A, B. Los paréntesis de "(A) ⊃ (B)" y los paréntesis y comas de "(⊃, A, B)" no son objetos formales, sino solamente parte de nuestra notación intuitiva para denominar la entidad que se considera.

El segundo cambio es que ahora hemos adoptado una visión diferente del papel del simbolismo en la presentación del sistema formal. En el capítulo IV, los objetos del sistema formal eran considerados como símbolos o marcas lingüísticas, y otros objetos lingüísticos eran construidos a partir de ellos. Al estudiarlos teníamos, en principio, que cuidar la distinción entre un *objeto* y un *nombre* o *designación* del objeto, y entre la *mención* de una expresión (cuando era ella misma el objeto considerado) y su *uso* (cuando designaba otro objeto o expresaba una proposición). Esto ha sido subrayado por Frege (1893, pág. 4), Carnap (1934, págs. 153, 160) y Quine (1940, págs. 23, 37). Para efectuar un enunciado sobre un objeto, se usa ordinariamente un nombre de ese objeto. (Otro método, aplicable a veces, es señalar el objeto, o usar una construcción lingüística que sirve para señalar el objeto, esto es, que llama la atención sobre él en lugar de nombrarlo). Lo que decimos no es nuestro amigo, sino el nombre de nuestro amigo. No es probable que confundamos a nuestro amigo Juan con una secuencia de cuatro letras, pero en metamatemática, tal como la tratamos en los capítulos precedentes, tuvimos que tener cuidado porque estábamos discutiendo objetos que eran en sí mismos objetos lingüísticos.

Un método para obtener nombres de objetos lingüísticos es ponerlos entre comillas. El nombre de Juan es "Juan" y el nombre del nombre de Juan es " "Juan" ". El nombre del nombre de Juan consta de cuatro letras encerradas en un conjunto de comillas; el segundo conjunto de comillas utilizado arriba se emplea para nombrar a éste.

Un segundo método es el uso de letras y expresiones metamatemáticas separadas como nombres para los objetos lingüísticos.

No tiene por qué prohibirse estrictamente que un espécimen de un objeto lingüístico se use como nombre del objeto; el objeto tiene entonces dos usos,

uno como objeto de estudio y otro como nombre de sí mismo. En este segundo uso se le llama *autónimo.*

El método que usamos en los capítulos precedentes era una combinación de los métodos segundo y tercero.

Este problema de la designación, cuyo explícito tratamiento acarrea dificultades, es extraño a la metamatemática como matemática. Puede evitarse su surgimiento usando solamente nombres de los objetos formales, y no tratando de exhibir los objetos mismos. Parece conveniente hacer esto en la aritmética generalizada, considerando ahora "$\supset$", "$\forall$", "$\forall x A(x)$" como nombres de ciertos objetos (los nombres son las expresiones entrecomilladas), en vez de considerarlos como los objetos mismos. Nos abstenemos de especificar qué son los objetos, salvo que pertenecen a un dominio de objetos abstractos, ordenados unos por relación a otros de un cierto modo, y a los que llamamos entidades (cfr. § 8). Los objetos nombrados pueden ser símbolos formales, expresiones formales, etc. en el sentido del Capítulo IV, aunque ahora esto quede abierto por irrelevante para la metamatemática. (Mientras que podemos de este modo evitar el problema de la designación en la metamatemática, habremos de afrontarlo cuando discutamos la aplicación de la metamatemática a un sistema lingüístico particular).

Al pasar de la concepción del sistema formal en términos de símbolos formales, tratados como si fueran señales sobre el papel, a un sistema abstracto de objetos, nuestra metamatemática (es decir, el estudio de nuestro sistema formal) se convierte en una rama de la teoría pura de números, completamente a la par conceptualmente con la aritmética de los números naturales y disciplinas matemáticas similares.

OBSERVACION 1. La costumbre o convención usual en la escritura matemática informal es escribir todos los símbolos sin comillas, de modo que cuando un símbolo es mencionado pero no usado, es autónimo. En este libro utilizamos sistemáticamente comillas en los pasajes metamatemáticos para distinguir la mención de las expresiones metamatemáticas de su uso designativo de expresiones lingüísticas formales; en otras ocasiones lo hacemos sólo por razones de énfasis.

§ 51. **Definiciones metamatemáticas recursivas.** La aritmetización de la metamatemática será completada en § 52 mapeando la aritmética generalizada en la aritmética ordinaria de los números naturales. Nuestros principales propósitos son completar la demostración del lema para el teorema de Gödel y demostrar el Teorema 31. Ambos resultados se seguirán de otro: que una determinada sucesión de predicados de teoría de números, obtenidos por aplicación o mapeo de predicados metamatemáticos, son todos recursivos primitivos.

Intuitivamente resulta claro por qué estos resultados tienen validez, y por qué la habrían de tener en cualquier sistema formal de estructura semejante, si consideramos la naturaleza de las definiciones de los predicados metamatemáticos en la aritmética generalizada.

Debido a que las entidades son generadas a partir de ceros por operaciones sucesor, predicados y funciones pueden ser definidos por recursión sobre las entidades. Usamos esta idea ahora, sin detenernos a enunciar una definición exacta de 'recursivo primitivo' para la aritmética generalizada.

Damos abajo una serie de trece definiciones de predicados metamatemáticos.

Cada definición se da listando los casos en que el predicado ha de ser verdadero. (Unas cuantas cláusulas llevan asterisco para su referencia en § 52).

Cada definición es o bien explícita (el predicado a definir no aparece en ninguna de las cláusulas definientes), o bien constituye una recursión primitiva (el valor del predicado para una entidad dada depende de sus valores para entidades inmediatamente precedentes, y lo mismo con parámetros), excepto Dn5 y Dn11, en que la recursión es sobre dos variables simultáneamente (una de ellas una variable numérica en Dn11). Para la discusión de una definición metamatemática de otra naturaleza, cfr. § 53.

El lector debe comprobar que las definiciones definen los predicados nombrados, tal como los conocemos de anteriores secciones del libro (Capítulo IV y §§ 41, 50).

## Definiciones de predicados metamatemáticos para el sistema formal de teoría de números como aritmética generalizada

Dn1. y es un *numeral* (Abreviatura: $\mathfrak{N}(y)$).
1. $y \asymp 0$.
2. $y \asymp n'$ (esto es, $y \asymp ('$, n), cfr. § 50), donde n es un *numeral*.

Dn2. y es una *variable*. (Abreviatura: $\mathfrak{V}(y)$).
1. $y \asymp a$.
2. $y \asymp x_1$ (es decir, $y \asymp (_1, x)$), donde x es una *variable*.

Dn3. y es un *término*. (Abreviatura: $\mathfrak{T}(y)$).
1. $y \asymp 0$.
2. y es una variable.
3–5. $y \asymp r + s$ o $r \cdot s$, donde r y s son *términos*. y $\asymp r'$, donde r es un *término*.

Dn4. D es una *fórmula*. (Abreviatura: $\mathfrak{F}(D)$).
1. $D \asymp r = s$, donde r y s son términos.
2–5. $D \asymp A \supset B$, A & B o A ∨ B, donde A y B son *fórmulas*.
$D \asymp \neg A$, donde A es una *fórmula*.
6–7. $D \asymp \forall x A(x)$ o $\exists x A(x)$, donde x es una variable, y A(x) es una *fórmula*.

Dn5. (t es un término, x es una variable, E es un término o una fórmula, y) D procede de E por la *sustitución* de (las ocurrencias libres) de x por t. (Abeviatura: $\mathfrak{S}(D, E, t, x)$).
1. t es un término, x es una variable, $E \asymp x$, y $D \asymp t$.
2–3. t es un término, x es una variable, E es 0 o una variable $\asymp x$, y $D \asymp E$.
4–5. E es un término o fórmula, y E es $(e_0, e_1)$ y D es $(e_0, d_1)$, donde $e_0 \asymp _1$ y $\mathfrak{S}(d_1, e_1, t, x)$ (así t es un término y x es una variable). E es un término o fórmula, y E es $(e_0, e_1, e_2)$ y D es $(e_0, d_1, d_2)$, donde $e_0 \asymp \forall$ o $\exists$, $\mathfrak{S}(d_1, e_1, t, x)$ y $\mathfrak{S}(d_2, e_2, t, x)$.
6–7. t es un término, y E es $(\forall, y, e_2)$ y D es $(\forall, y, d_2)$, donde y es una variable, $e_2$ es una fórmula, o bien $y \asymp x$ y $\mathfrak{S}(d_2, e_2, t, x)$, o $y \asymp x$ y $D \asymp E$. De igual modo para $\exists$.

Dn6. (E es un término o fórmula, x es una variable, y) E *contiene a* x *libre*. (Abreviatura: $\mathfrak{CF}$ (E, x)).
1. E es un término o fórmula, x es una variable, y $\overline{\mathfrak{S}}$ (E, E, 0, x).

Dn7. (t es un término, x es una variable, E es una fórmula y) t está *libre* para x en E. (Abreviatura: $\mathfrak{F}$(t, x, E)). Por recursión sobre E, con siete cláusulas correspondiendo a 1–7Dn4. Por ejemplo:
6. t es un término, x es una variable, y E $\succcurlyeq$ $\forall$yA (y), donde y es una variable, A (y) es una fórmula, y o E no contiene a x libre o t está *libre* para x en A (y) y t no contiene a y libre.

Dn8. D es un *axioma*. (Abreviatura: $\mathfrak{A}$(D)).
1–10. D $\succcurlyeq$ A $\supset$ (B $\supset$ A), donde A y B son fórmulas (Esquema de Axioma 1a). Del mismo modo para los Esquemas de Axioma 1b, 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 6, 7, 8. (NOTA: Separamos el Esquema de Axioma 10 en dos casos (Cláusulas 11 y 13), según que el A (x) contenga los x libres o no. Del mismo modo para el Esquema de Axioma 11).
*11–12. Existe un t tal que D $\succcurlyeq$ $\forall$xA (x) $\supset$ A (t), donde A(x) contiene a x libre, t está libre para x en A (x), y $\mathfrak{S}$(A (t), A (x), t, x). NOTA: En la estipulación "t está libre para x en A (x)" está incluido aquí que x es una variable, A (x) una fórmula, y t un término. En vez de dar por supuesto la convención del § 18 según la cual A (t) representa el resultado de sustituir x por t en A (x), hacemos esto explícito mediante " $\mathfrak{S}$(A (t), A (x), t, x)".). De modo semejante para el Esquema Axiomático 11
13–14. D $\succcurlyeq$ $\forall$xA $\supset$ A, donde x es una variable, A es una fórmula, y A no contiene a x libre. Del mismo modo para el Esquema Axiomático 11.
15. D $\succcurlyeq$ A (0) & $\forall$x (A (x) $\supset$ A (x')) $\supset$ A (x), donde A (x) es una fórmula, $\mathfrak{S}$(A (0), A (x), 0, x) y $\mathfrak{S}$(A (x'), A (x), x', x).
16–23. D $\succcurlyeq$ $a' = b' \supset a = b$ (Axioma 14). De modo similar para los Axiomas 15-21.

Dn9. D es una *consecuencia inmediata* de E. (Abreviatura: $\mathfrak{C}$(D, E)).
1–2. E $\succcurlyeq$ C $\supset$ A (x) y D $\succcurlyeq$ C $\supset$ $\forall$xA (x), donde x es una variable, A (x) y C son fórmulas, y C no contiene a x libre (Regla 9). Del mismo modo para la Regla 12.

Dn10. D es una *consecuencia inmediata* de E y F.
(Abreviatura: $\mathfrak{C}$(D, E, F)).
1. D y E son fórmulas, y F $\succcurlyeq$ E $\supset$ D (Regla 2).

Dn11. $\mathfrak{x}$ es el *numeral para* el número natural $x$.
(Abreviatura: $\mathfrak{Nu}(\mathfrak{x}, x)$).
1. $\mathfrak{x} \succcurlyeq 0$ y $x = 0$.
2. $\mathfrak{x} \succcurlyeq \mathfrak{n}'$ y $x = n'$, donde $\mathfrak{Nu}(\mathfrak{n}, n)$.

Dn12. Y es una *demostración*. (Abreviatura: $\mathfrak{Pf}$(Y)).
1. Y $\succcurlyeq$ (D), donde D es un axioma.
2. Y $\succcurlyeq$ (D, P), donde P es una *demostración*, y D es una consecuencia inmediata de $\{P\}_0$.
3. Y $\succcurlyeq$ (D, P, Q), donde P y Q son *demostraciones*, y D es una consecuencia inmediata de $\{P\}_0$ y $\{Q\}_0$.

Dn13. A $(a)$ es una fórmula, $x$ es un número natural, Y es una *demostración de* la fórmula A $(\mathfrak{x})$ (como un predicado de A $(a), x$, Y).
(Abreviatura: $\mathfrak{Bf}(A(a), x, Y)$).
*1. A $(a)$ contiene libre a $a$, $\mathfrak{Bf}(Y)$, y hay una $\mathfrak{x}$ tal que $\mathfrak{Nu}(\mathfrak{x}, x)$ y $\mathfrak{S}(\{Y\}_0, A(a), \mathfrak{x}a)$.
2. A $(a)$ no contiene libre a $a$, $\mathfrak{Bf}(Y)$ y $\{Y\}_0 \asymp A(a)$.

Dn13a. Para cada $n$ variables distintas $x_1, ..., x_n$ y cada fórmula $A(x_1, ..., x_n)$: Y es una *demostración de* $A(\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_n)$. (Abreviatura:
$\mathfrak{Bf}_{x_1,...,x_n, A(x_1,...,x_n)}(x_1, ..., x_n, Y)$ o $\mathfrak{Bf}_A(x_1, ..., x_n, Y)$).
De modo similar.

§ 52. **La numeración de Gödel.** Completamos ahora la aritmetización de la metamatemática representando la aritmética generalizada en la aritmética de los números naturales. En primer lugar, correlatamos distintos números impares a las entidades cero, del modo que sigue:

| $\supset$ | & | $\vee$ | $\neg$ | $\forall$ | $\exists$ | = | + | · | ′ | 0 | $a$ | $_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |

Luego, siempre que $x_0, ..., x_s$ sean entidades a las que han sido ya correlacionados números respectivos $x_0, ..., x_s$, correlacionamos a la entidad sucesor $(x_0, ..., x_s)$ el número $p_0^{x_0} \cdot ... \cdot p_s^{x_s}$ (#18 § 45).

Por una inducción matemática que corresponde a la definición de entidad, un número natural $>0$ es de este modo correlatado a cada entidad. Llamamos a este número *número de Gödel* de la entidad, o bien decimos que *representa* la entidad (o el objeto lingüístico formal al que la entidad en cuestión está correlatada). Puesto que los números correlatados a las entidades sucesor son siempre pares (pues $p_0 = 2$ y $x_0 \neq 0$) y un entero positivo dado tiene la forma $p_0^{x_0} \cdot ... \cdot p_s^{x_s}$ $(x_0, ..., x_s > 0)$ para, a lo sumo, un $s$ y $x_0, ..., x_s$, a entidades distintas les están correlacionados números distintos.

EJEMPLO 1. El número de Gödel de $\exists b(\neg b = 0)$, o, como entidad $(\exists, (_1, a), (\neg, (=, (_1, a), 0)))$, es $2^{13} \cdot 3^{2^{27} \cdot 3^{25}} \cdot 5^{2^9 \cdot 3^{2^{15} \cdot 3^{2^{27} \cdot 3^{25}}} \cdot 5^{23}}$

Dado que $x_i < p_0^{x_0} \cdot ... \cdot p_s^{x_s}$ para $0 \leq i \leq s$, entidades x e y en la relación $x \prec y$ están siempre representadas por números naturales $x$ e $y$ en la relación $x < y$ (Sin embargo, $x < y$ puede valer para pares de números $x$ e $y$ correlacionados a entidades x e y sin que valga $x \prec y$; p. ej., $3 < 5$, pero no $\supset \prec$ &).

Si x es una entidad de la forma sucesor $(x_0, ..., x_s)$ con $s \geq i$, y $x$ es el número de Gödel de x, el número de Gödel del predecesor $\{x\}_i$ es $(x)_i$ (# 19 § 45).

Cuando pasamos de las entidades a sus números de Gödel, un predicado o función de entidades se convierte en un predicado o función de números de Gödel. Decimos que un predicado o función de teoría de números obtenido por extensión de la definición del último a todos los números naturales *corresponde* al predicado original. En particular, en el caso de un predicado $\mathfrak{P}(x_1, ..., x_n)$, entenderemos

por *el* predicado de teoría de números correspondiente $P(x_1, ..., x_n)$ el obtenido considerando que su valor ha de ser f siempre y cuando no todos los $x_1, ..., x_n$ sean números de Gödel, esto es, $P(x_1, ..., x_n) \equiv \{x_1, ..., x_n$ son números de Gödel de entidades $x_1, ..., x_n$, y $\mathfrak{P}(x_1, ..., x_n)\}$.

De modo semejante cuando alguna de las variables del predicado original tiene ya como rango los números naturales (p. ej., Dn11 § 51).

LEMA 19. *El predicado de teoría de números correspondiente a cada uno de los predicados definidos por* Dn1–Dn13, Dn13a, *es recursivo primitivo.*

DEMOSTRACION. Para ilustrar el método vamos a tratar Dn3, suponiendo ya tratada a Dn2.

Podemos escribir Dn3 simbólicamente como sigue

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}(y) \equiv\ & y \succeq 0 \\
& \vee \mathfrak{B}(y) \\
(1) \qquad & \vee [y \succeq (+, \{y\}_1, \{y\}_2) \,\&\, \mathfrak{T}(\{y\}_1) \,\&\, \mathfrak{T}(\{y\}_2)] \\
& \vee [y \succeq (\cdot, \{y\}_1, \{y\}_2) \,\&\, \mathfrak{T}(\{y\}_1) \,\&\, \mathfrak{T}(\{y\}_2)] \\
& \vee [y \succeq (', \{y\}_1) \,\&\, \mathfrak{T}(\{y\}_1)].
\end{aligned}
$$

Los cinco miembros disyuntivos corresponden a las cinco cláusulas de Dn3 dadas en §51. Para la tercera cláusula observamos que si $y \succeq r + s$, esto es, $y \succeq (+, r, s)$, para cualesquiera entidades r y s, entonces $r \succeq \{y\}_1$, $s \succeq \{y\}_2$. El hecho de que $y \succeq (+, r, s)$, para algunas entidades r y s se expresa entonces por $y \succeq (+, \{y\}_1, \{y\}_2)$.

Reemplacemos en (1) las entidades cero $+, \cdot, ', 0$ por sus números de Gödel 17, 19, 21, 23, el predicado supuesto $\mathfrak{B}(y)$ por su predicado correspondiente de teoría de números $V(y)$, $\succeq$ por $=$, las entidades sucesor $(x_0, ..., x_s)$ por $p_0^{x_0} \cdot ... \cdot p_s^{x_s}$ los predecesores $\{y\}_i$ por $(y)_i$, y escribamos $T(y)$ en lugar de $\mathfrak{T}(y)$ para el predicado a definir. Esto lleva formalmente a la siguiente equivalencia de teoría de números.

$$
\begin{aligned}
T(y) \equiv\ & y = 23 \\
& \vee V(y) \\
(2) \qquad & \vee [y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \\
& \vee [y = 2^{19} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \\
& \vee [y = 2^{21} \cdot 3^{(y)_1} \,\&\, T((y)_1)].
\end{aligned}
$$

Ahora (2) define un predicado $T(y)$ por recursión por curso de valores en la aritmética de los números naturales, puesto que $(y)_i < y$ para $y \neq 0$; y por # G con # # 2, 3, 14, 19, A, C, D y nuestra hipótesis de que $V$ es recursivo primitivo, $T(y)$ es recursivo primitivo (cfr. Ejemplo 3 § 46).

Queda por demostrar que el predicado $T(y)$ definido por (2) es el predicado de teoría de números correspondiente a $\mathfrak{T}(y)$. Con este propósito demostramos dos proposiciones por inducción de curso-de-valores sobre $y$:

(a) *Si* $T(y)$ (por (2)), *entonces y es el número de Gödel de una entidad* y *tal que* $\mathfrak{T}(y)$ (por 1)).

(b) *Si* $\mathfrak{T}(y)$ (por (1)), *e y es el número de Gödel de* y, *entonces* $T(y)$ (por (2)).

DEMOSTRACIONES. (a) Por (2), $T(y)$ es verdadero sólo si uno de los miembros disyuntivos (o "cláusulas") de la derecha de (2) es verdadero; tenemos, por tanto, cinco casos que tratar. Caso 2: $V(y)$. En este caso, dado que $V$ es el predicado correspondiente a $\mathfrak{V}$, $y$ es el número de Gödel de una variable y, esto es, $\mathfrak{V}(y)$; y, por la cláusula correspondiente de (1), $\mathfrak{T}(y)$. Caso 3: $y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2}$ & $T((y)_1)$ & $T((y)_2)$. Entonces $(y)_1$, $(y)_2 < y$; así, a partir de $T((y)_1)$ & $T((y)_2)$ por la hipótesis de la inducción sobre $y$, $(y)_1$ e $(y)_2$ son números de Gödel de entidades r y s tales que $\mathfrak{T}(r)$ y $\mathfrak{T}(s)$. Entonces $y\ (= 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2})$ es el número de Gödel de (+, r, s). Llamando a esta última y, entonces $r \asymp \{y\}_1$, $s \asymp \{y\}_2$; así $y \asymp (+, \{y\}_1, \{y\}_2)$ & $\mathfrak{T}(\{y\}_1)$ & $\mathfrak{T}(\{y\}_2)$, y, por la respectiva cláusula de (1), $\mathfrak{T}(y)$. La demostración de (b) es similar, con casos a partir de los miembros disyuntivos (o "cláusulas") de la derecha de (1).

Las restantes definiciones de predicados de la lista Dn1–Dn13, Dn13a se tratan de modo semejante, a excepción de lo que hacemos notar más abajo para las recursiones sobre dos variables y las cláusulas con asterisco. Después de traducir (como de (1) a (2)), el predicado de teoría de números definido es verdadero sólo para números de Gödel como argumentos, pues en cada cláusula de la definición original, cada variable de entidad, o ha de satisfacer un predicado anterior de la lista, o es un sucesor de entidades que, o están fijadas, o tienen que satisfacer tales predicados o el predicado a definir. Por ejemplo, traducimos la Cláusula 1Dn9 como

$$e = 2^3 \cdot 3^{(e)_1} \cdot 5^{(e)_2} \ \&\ d = 2^3 \cdot 3^{(e)_1} \cdot 5^{2^{11} \cdot 3^{(d)_{2,1}} \cdot 5^{(e)_2}} \ \&\ V((d)_{2,1})$$
$$\&\ F((e)_2) \ \&\ F((e)_1) \ \&\ \overline{CF}((e)_1,\ (d)_{2,1}),$$

donde "$(d)_{2,1}$" abrevia "$((d)_2)_1$". Nótese que $\overline{CF}(e, x)$ no es exactamente, el predicado de teoría de números correspondiente a $\overline{\mathfrak{CF}}(E, x)$, puesto que es verdadero cuando $e$ o $x$ no son números de Gödel. Pero esto no importa aquí, puesto que $(e)_1$ ocurre también en $F((e)_1)$ y $(d)_{2,1}$ en $V((d)_{2,1})$, correspondiendo a las estipulaciones de que C es una fórmula y x una variable en 1Dn9.

Dn5 y Dn11 son recursiones (de tipo muy simple) sobre dos variables. Para Dn5, por ej., sea $T(z, t, x) \equiv \{z = 2^d \cdot 3^e$ donde $S(d, e, t, x)\}$. $T$ satisface entonces una recursión por curso de valores sobre la variable $z$, y $S(d, e, t, x) \equiv T(2^d \cdot 3^e, t, x)$.

Quedan por considerar las cláusulas con asterisco 11 y 12Dn8, y 1Dn13 y 1Dn13a. Traducimos 11Dn8 como

$$(Et)_{t<d}\ [d = 2^3 \cdot 3^{2^{11} \cdot 3^{(d)_{1,1}} \cdot 5^{(d)_{1,2}}} \cdot 5^{(d)_2} \ \&\ CF((d)_{1,2}, (d)_{1,1})$$
$$\&\ F(t, (d)_{1,1}, (d)_{1,2}) \ \&\ S((d)_2, (d)_{1,2}, t,\ (d)_{1,1})],$$

y utilizamos # E. El límite $t < d$ está justificado, puesto que cuando A(x) contiene a x libre, $t \prec A(t) \prec \forall x A(x) \supset A(t) \asymp D$. Traducimos 1Dn13 como

$$CF(a, 25) \ \&\ Pf(y) \ \&\ (En)_{n<y}\ [Nu(n, x) \ \&\ S((y)_0, a, n, 25)].$$

Con esto queda completa la demostración del Lema 19. La clave de esta demostración es que las recursiones primitivas en la aritmética generalizada se convierten en recursiones por curso de valores en la aritmética ordinaria, debido a que la numeración de Gödel preserva las relaciones de orden, aunque destruya las rela-

ciones de sucesión inmediata. Es necesario comprobar que puede ser restringido el rango de cada variable que hemos decidido introducir con un cuantificador mejor que como una función de las variables independientes del predicado que se está definiendo (por ej., t en 11Dn8 y **x** en 1Dn13).

LEMA 20. *Bajo la numeración de Gödel de esta sección, los predicados* $A(a, b)$ *y* $B(a, c)$ *del Lema* 21 § 42 *son recursivos primitivos.*

DEMOSTRACION. Por el Lema 19, puesto que podemos expresar $A(a, b)$ y $B(a, c)$ en términos de un predicado de teoría de números $Pf(a, x, y)$ correspondiente al predicado $\mathfrak{Pf}(\mathrm{A}(a), x, \mathrm{Y})$ de Dn13 del modo siguiente

$$A(a, b) \equiv Pf(a, a, b), \qquad B(a, c) \equiv Pf(2^9 \cdot 3^a, a, c).$$

El Lema 21 § 42 se sigue ahora utilizando el Corolario del Teorema 27 § 49.

TEOREMA 31. *Para cualquier fórmula dada* $\mathrm{A}(a)$ (*cfr.* Dn13), *el predicado* '$\mathrm{A}(\mathbf{x})$ *es demostrable*' (*como predicado de* $x$, *donde* **x** *es el numeral para* $x$) *es expresable en la forma* $(Ey)\,R(x, y)$ *donde* $R$ *es recursivo primitivo; es decir, dada una fórmula* $\mathrm{A}(a)$, *puede hallarse un predicado recursivo primitivo* $R(x, y)$ *tal que*

$$(Ey)\,R(x, y) \equiv \vdash \mathrm{A}(\mathbf{x}).$$

(*De modo similar para* $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$; *cfr.* Dn13a).

DEMOSTRACION. Una fórmula es demostrable si y sólo si existe una demostración de ella. Sea $a$ el número de Gödel de la fórmula particular $\mathrm{A}(a)$ de la hipótesis del teorema, y establezcamos

$$R(x, y) \equiv Pf(a, x, y).$$

(Para $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, establézcase $R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv Pf_{\mathrm{A}}(x_1, \ldots, x_n, y)$).

EJEMPLO 2. Sea $\mathfrak{S}(\mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x}) \asymp$ {el resultado de sustituir x por t en E, si t es un término, x una variable, y E un término o fórmula; en caso contrario, E}; y sea $\mathfrak{Nu}(x) \asymp$ {el numeral **x** para el número natural $x$}. Estas funciones metamatemáticas $\mathfrak{S}(\mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x})$ y $\mathfrak{Nu}(x)$ pueden ser definidas por recursión, de modo similar a los predicados $\mathfrak{S}(\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x})$ (Dn5) y $\mathfrak{Nu}(\mathbf{x}, x)$ (Dn11); y las funciones de teoría de números correspondientes $S(e, t, x)$ ($= e$, cuando $e$, $t$, $x$ no son todos números de Gödel) y $Nu(x)$ son recursivas primitivas.

* § 53. **Definiciones inductivas y recursivas.** Las definiciones de 'término' y 'fórmula' fueron dadas originariamente en § 17 como definiciones inductivas. Otros ejemplos de definiciones inductivas, son la definición de 'número natural' (§ 6), la de 'fórmula demostrable' en su primera versión (§ 19), la de 'función recursiva primitiva', si se le da una forma similar (§ 43), y la de 'entidad' (§ 50). Los resultados de este capítulo pueden ser considerados en términos de la relación entre definiciones inductivas y recursivas. Comenzamos con algunas observaciones sobre definiciones inductivas en general.

Las definiciones inductivas juegan dos papeles diferentes, y, según ellos, las llamamos *fundamentales* y *no-fundamentales*. La categoría a la que una defi-

nición inductiva dada pertenece puede variar con el contexto o teoría en que se la use.

La definición de 'entidad' es la definición inductiva fundamental en la aritmética generalizada. Establece el dominio de objetos de la aritmética. De acuerdo con ella, se entiende que una entidad está dada si, y sólo si, está dado su modo de generación según la definición inductiva de 'entidad'.

Las definiciones inductivas no fundamentales, como las de 'término', 'fórmula' y 'fórmula demostrable', se refieren a objetos ya conocidos en su estatuto como entidades. Cada una de estas definiciones define una clase de entidades, es decir, una subclase de las entidades. Podemos preguntar en la aritmética si una entidad dada pertenece o no a la subclase; y podemos asociar a la subclase un predicado que tome el valor t para una entidad perteneciente a la subclase y f para una entidad no perteneciente a ella. Podemos considerar las definiciones inductivas no fundamentales como definiciones de estos predicados.

De modo que la definición inductiva fundamental establece el rango de una variable, sobre el cual pueden definirse subsecuentemente predicados mediante definiciones inductivas no fundamentales (incluyendo como caso especial el predicado constante t).

El modo como una definición inductiva no fundamental define un predicado es el siguiente. Las *cláusulas directas* nos dan ciertos objetos para los cuales el predicado toma el valor t . La *cláusula final* dice que éstos son los únicos objetos para los cuales el valor es t, de modo que podemos atribuir el valor f siempre que podamos ver que las cláusulas directas no exigen que el valor sea t.

Las cláusulas directas comprenden generalmente *cláusulas básicas*, cada una de las cuales nos dice directamente (o bajo hipótesis que impliquen sólo predicados previamente definidos) que el valor es t para un cierto objeto; y *cláusulas inductivas*, cada una de las cuales nos dice que si el valor es t para ciertos objetos (y posiblemente bajo hipótesis que impliquen predicados previamente definidos), entonces el valor es t para el objeto relacionado con ellos de una determinada manera. (Si faltan las cláusulas básicas, el predicado toma el valor f para todos los argumentos. Si faltan las cláusulas inductivas, la definición es simplemente una definición explícita por casos).

Pueden usarse también definiciones inductivas no fundamentales para definir predicados de más de una variable. Una definición tal tiene a veces la forma de una definición inductiva de una clase dependiente de un parámetro (por ej. la de '$<$' § 6) y, en general, puede ser considerada como la definición inductiva de una clase de $n$-tuplos ordenados.

Tanto las definiciones inductivas fundamentales como las no fundamentales justifican formas correspondientes de 'demostración por inducción matemática'. Ya han sido mencionadas las correspondientes a las definiciones inductivas de 'número natural' y 'entidad' (§§ 7, 50). Damos, como un ejemplo más, el principio de inducción correspondiente a la definición inductiva de 'fórmula demostrable': si todo axioma tiene una propiedad, y si siempre que las premisas de una inferencia formal tienen la propiedad la tiene la conclusión, entonces toda fórmula probable tiene la propiedad. (Este principio de inducción podría haber sido invocado para demostrar el Teorema 9 § 28 en lugar de la inducción de curso-de-valores sobre la longitud de una demostración. Los Lemas 12a y 12b constituyen entonces la base y los pasos inductivos de la demostración).

Del mismo modo, las definiciones inductivas fundamentales (bajo la convención

de que objetos generados de formas diferentes son diferentes) justifican 'definiciones por inducción' o 'definiciones recursivas' de una función sobre el dominio establecido por la definición inductiva. (Pero un procedimiento recursivo que corresponda a una definición inductiva no fundamental de una clase que permita reconocer como de la clase a un objeto mediante diferentes sucesiones de aplicaciones de las cláusulas directas, puede llevar a una función con más de un valor para el objeto en cuestión, por ej. "$\varphi(A) = 0$ si A es un axioma, $\varphi(A) = \varphi(B) + 1$ si A es una consecuencia inmediata de B, y $\varphi(A) = \varphi(B) + \varphi(C) + 1$ si A es una consecuencia inmediata de B y C" no define una función $\varphi$ de un solo valor de fórmulas demostrables a números naturales).

Pueden introducirse predicados a partir de funciones definidas recursivamente que sirvan como funciones representantes suyas, o también como hemos visto en § 51 directamente por procedimientos recursivos.

En las recursiones (del tipo que hemos estado considerando para la aritmética simple en el Capítulo IX) el valor de una función o predicado, o sea de una variable, para cualquier argumento dado que no sea cero, se determina a partir de los valores de la misma sólo para aquellos argumentos que precedan al argumento dado en el orden de generación del dominio por la definición inductiva fundamental. Consecuencia de esto es que por una inducción correspondiente, podemos demostrar que un predicado definido recursivamente toma el valor t o f para todo argumento. Así se prueba de modo intuicionista que la ley de tercio excluso se aplica a toda proposición tomada como valor de un predicado definido recursivamente.

Ello no es así en general para un predicado definido inductivamente, puesto que el uso de la cláusula final para asignar el valor f cuando las cláusulas directas no asignan el valor t puede dejarnos sin el conocimiento de los medios efectivos de determinar cuál es el valor de cualquier (cualesquiera) argumento(s) dado(s).

Así ocurre en un caso especial, a saber (por ej. en la definición inductiva de una clase) cuando el orden en que las cláusulas inductivas introducen miembros de la clase, concuerda con el orden de generación de los objetos por la definición inductiva fundamental. Son definiciones inductivas de este tipo las que podemos incluir entre las definiciones recursivas, como hicimos con las de 'término' y 'fórmula' en § 51.

Una definición inductiva que no es de este tipo es la de 'fórmula demostrable' en su primera versión (§ 19). En la segunda versión, la definición es diferente de las definiciones metamatemáticas de § 51 por el hecho de que se usa un cuantificador existencial "existe una prueba Y" sin que se conozca un límite para su variable Y (en contraste con 11–12Dn8 y 1Dn13). (Cfr. § 30). A partir de esa segunda versión, obtenemos como predicado correspondiente de teoría de números $(Ey)\,[Pf(y)\ \&\ (y)_0 = d]$ (Cfr. Dn12), que tiene la forma $(Ey)\,R\,(d, y)$ donde $R$ es recursivo primitivo.

Cuando la forma de una definición inductiva (con cláusulas directas elementales) está especificada de un modo natural, los predicados $P(x_1, ..., x_n)$ definibles mediante el uso de definiciones inductivas en la aritmética de los números naturales, son exactamente los que son expresables en la forma $(Ey)\,R\,(x_1, ..., x_n, y)$ con $R$ recursivo primitivo. Puede darse una prueba por una extensión de los métodos anteriores, según se sugirió en Kleene 1943, págs. 66–67; o por otro método, indicado en Kleene 1944* pág. 48.

CAPITULO XI

# FUNCIONES RECURSIVAS GENERALES

**§ 54. Calculación formal de funciones recursivas primitivas.** Cada uno de los esquemas (I)–(V) de § 43, considerado intuitivamente, es una operación que define una función $\varphi$ a partir de cero o más funciones dadas. De hecho, hemos establecido los esquemas por medio de ecuaciones.

Examinemos la forma según la cual definen las ecuaciones a la función $\varphi$, para ver si es o no posible analizar, dentro de las operaciones formales, nuestro uso de ellas en la determinación de valores particulares de $\varphi$.

EJEMPLO 1. Sea $\chi$ una función dada, dos de cuyos valores son:

1. $\chi(0, 4) = 7$.
2. $\chi(1, 7) = 7$.

Introdúzcase $\varphi$ por el Esquema (Va) con $q = 4$, así:

3. $\varphi(0) = 4$.
4. $\varphi(y') = \chi(y, \varphi(y))$.

En § 43 nos cercioramos de que, para cualquier número $y$, las ecuaciones de recursión para $\varphi$ determinan el valor correspondiente $\varphi(y)$ de $\varphi$, si los valores de $\chi$ están ya determinados. Particularmente, con los dos valores de $\chi$ ya dados, el razonamiento de § 43 nos indica que $\varphi(2) = 7$. Ahora, preguntamos: ¿Qué especies de inferencias formales nos permitirán deducir la ecuación "$\varphi(2) = 7$" a partir de las Ecuaciones 1–4?

Sustituyendo "$y$" por "0" en la Ecuación 4:

5. $\varphi(1) = \chi(0, \varphi(0))$.

Reemplazando "$\varphi(0)$" en el miembro derecho de la Ecuación 5 por "4", según la Ecuación 3:

6. $\varphi(1) = \chi(0, 4)$.

Cuatro pasos más de estas dos especies completan la deducción:

7. $\varphi(1) = 7$ – Reemplazo, 6, 1.
8. $\varphi(2) = \chi(1, \varphi(1))$ – Sustitución, 4.
9. $\varphi(2) = \chi(1, 7)$ – Reemplazo, 8, 7.
10. $\varphi(2) = 7$ – Reemplazo, 9, 2.

De este modo, una operación de reemplazo y una de sustitución bastan para la deducción de la ecuación "$\varphi(2) = 7$", que establece que el valor de $\varphi$ para el argumento 2 es 7, a partir de las ecuaciones dadas 1–4. Por lo demás, es sobradamente evidente que ninguna sucesión de estas dos especies de inferencias

puede llevar de las ecuaciones 1–4 a ninguna otra ecuación cuyo miembro izquierdo sea "$\varphi(2)$" y cuyo miembro derecho sea un numeral.

EJEMPLO 2. Supóngase ahora, más particularmente, que $\chi$ es la función constante ($C_7^2$) definida por la ecuación

$$-2. \qquad \chi(y, z) = 7,$$

mientras que $\varphi$ se define a partir de $\chi$ como en el Ejemplo 1. (Entonces $\varphi$ es recursiva primitiva, con $\chi$, $\varphi$ como una descripción recursiva primitiva). Podemos ahora deducir las Ecuaciones 1 y 2 a partir de la Ecuación –2 por sustitución, como sigue:

$-1.$ $\chi(0, z) = 7$ – Sust., $-2.$ $\qquad$ $0.$ $\chi(1, z) = 7$ – Sust., $-2.$

$1.$ $\chi(0, 4) = 7$ – Sust., $-1.$ $\qquad$ $2.$ $\chi(1, 7) = 7$ – Sust., $0.$

Combinando estas dos deducciones con la del Ejemplo 1, obtenemos una deducción de "$\varphi(2) = 7$" a partir de las tres ecuaciones –2, 3, 4, que definen $\varphi$ ab initio.

En estos ejemplos, hemos estado considerando cuestiones de tipo formal sin haber antes expuesto de modo explícito un sistema formal. Estableceremos ahora un sistema formal apropiado y llevaremos nuestra discusión con el rigor de una discusión metamatemática al referirnos a ese sistema.

Llamamos al nuevo sistema formal el *formalismo* (o *sistema formal*) *de funciones recursivas.* Vamos a describirlo ahora de forma lingüística y, posteriormente (§ 56), como una aritmética generalizada.

Los *símbolos formales* del sistema son como sigue: $=$ (es igual a), $'$(sucesor), 0 (cero, $a$, $b$, $c$, ..., $a_1$, $a_2$, ... (variables de números naturales), $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ (letras de función, o sea, símbolos para funciones de teoría de números no especificadas), (,) (paréntesis), y , (coma). Se supone dada una lista (potencialmente) infinita de variables y de letras de función.

Llamamos aquí a $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ "letras de función" en vez de "símbolos de función" para distinguirlas de $'$. El nombre es asimismo apropiado porque desempeñarán un papel similar al de las letras de predicado en el cálculo de predicados puro, esto es, han de ser interpretadas como expresando funciones diferentes en ocasiones diferentes, pero no hay postulada una regla de sustitución para ellas. En las discusiones en que $f$, $g$, $h$, etc., expresen funciones fijas, y no sean tratadas de manera diferente a, por ejemplo, $'$, $+$, $\cdot$, podemos llamarlas "símbolos de función".

Damos el nombre de *numerales* a las expresiones formales 0, 0′, 0″... Como antes (§ 41), las abreviamos respectivamente por "0", "1", "2", ...; y continuamos haciendo uso de la convención mediante la cual "$\mathfrak{x}$", "$\mathfrak{y}$", etc., designan los numerales correspondientes a los números naturales designados respectivamente por "$x$", "$y$", etc.

Los *términos* son 0, las variables, y expresiones de la forma r′ en las que r es un *término*, o de la forma $\mathrm{f}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ en las que f es una letra de función y $\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n$ son *términos* ($n \geq 0$, omitiéndose los paréntesis cuando $n = 0$).

Una expresión formal r = s, en la que r y s son términos, es una *ecuación.* Las ecuaciones son las únicas "fórmulas" de este sistema. Por un *sistema de ecuaciones* entendemos una secuencia finita de ecuaciones $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_s$ (no vacía, a menos que se disponga de otro modo).

No se suministrará ningún axioma; y definiremos únicamente 'deducibilidad' pero no 'demostrabilidad'.

Las reglas de inferencia serán: una regla de sustitución R1, de una premisa, y una regla de reemplazo R2, de dos premisas, como sigue.

R1: para pasar de una ecuación d que contenga una variable y a la ecuación que resulta de d sustituyendo y por un numeral $\boldsymbol{y}$.

R2: para pasar de una ecuación r = s que no contenga variables (la *premisa mayor*) y una ecuación $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$ en la que h sea una letra de función y $\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p, \boldsymbol{z}$ sean numerales (la *premisa menor*), a la ecuación que resulta de r = s reemplazando por $\boldsymbol{z}$ una ocurrencia de $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p)$ en s (o varias ocurrencias de esa índole simultáneamente).

Una *deducción de* una ecuación e (la *ecuación final* de la deducción) *a partir de* un sistema (o conjunto, posiblemente infinito) E de ecuaciones ha de ser en forma de árbol (final de §24); o sea, tendrá una de las tres formas

c donde c es una de las ecuaciones de E,

$\frac{W}{c}$ donde W es una deducción a partir de E, y c es una consecuencia inmediata, por R1, de la ecuación final de W, o

$\frac{WX}{c}$ donde W y X son deducciones a partir de E, y c es una consecuencia inmediata, por R2, de las ecuaciones finales de W y de X respectivamente.

Si hay una deducción de e a partir de E, entonces e es *deducible a partir de* E (en símbolos, $E \vdash e$).

EJEMPLO 2 (continuación). Traduciendo al nuevo formalismo las ecuaciones −2 a 10 (usando las letras de función formales $f$, $h$ en vez de las letras de función intuitivas "$\varphi$", "$\chi$", y $b$, $c$ en vez de las variables de número intuitivas "$y$", "$z$"), y pasando de la forma secuencial a la forma de árbol, obtenemos la figura siguiente.

(a)

$$\begin{array}{llll}
 & \underline{4_2.\ f(b')=h(b,f(b))} & & \\
 & \underline{5.\ f(1)=h(0,f(0))} \quad \underline{3.\ f(0)=4} & \underline{-2_1.\ h(b,c)=7} & \\
 & & \underline{-1.\ h(0,c)=7} & \\
\underline{4_1.\ f(b')=h(b,f(b))} & \underline{6.\ f(1)=h(0,4)} & \underline{1.\ h(0,4)=7} & \underline{-2_2.\ h(b,c)=7} \\
\underline{8.\ f(2)=h(1,f(1))} & \underline{7.\ f(1)=7} & & \underline{0.\ h(1,c)=7} \\
 & \underline{9.\ f(2)=h(1,7)} & & \underline{2.\ h(1,7)=7} \\
 & & 10.\ f(2)=7 &
\end{array}$$

Esto es una deducción de la ecuación $f(2)=7$ a partir del sistema de ecuaciones

(b)
$$\left\{\begin{array}{ll}
h(b,c)=7, & (b_1) \\
f(0)=4, & \\
f(b')=h(b,f(b)). & (b_2)
\end{array}\right.$$

EJEMPLO 1 (continuación). Considérese la parte del árbol (a) sin las (ocurrencias de) ecuaciones $-2_1$, $-1$, $-2_2$, 0, y llámese a lo que resulte ($a_2$). Esto es una deducción de $f(2)=7$ a partir de $h(0,4)=7$, $h(1,7)=7$ y ($b_2$).

OBSERVACION 1. Cabría preguntar: ¿Por qué tomarse la molestia de traducir? Las razones son, sin duda, las mismas que las que dictaron nuestro uso de un simbolismo especial en el sistema formal de teoría de números del Capítulo IV, distinto del simbolismo de la teoría intuitiva de números. Recapitulando: La traducción, ahora efectuada, de "$\varphi$", "$\chi$", "$y$", "$z$" por $f, h, b, c$ es requerida, de acuerdo con la concepción lingüística de un formalismo, porque los símbolos formales han de tomarse de una lista, preasignada y fija, de símbolos a los que se considera en la metamatemática como meras marcas. Para que se pueda hacer de ellos un uso autónimo (§§ 50, 16) sin riesgo de confusión, deberán ser tomados en su mayoría de un alfabeto especial. De acuerdo con la concepción de un formalismo como una aritmética generalizada, podemos si lo deseamos considerar que $f$ es (o sea, que "$f$" es un nombre de) "$\varphi$" (pero entonces es un nombre de "$\varphi$" únicamente, y no en ocasiones de "$\psi$", etc.). La "f" usada, por ejemplo, en la definición de 'término' es, por otra parte, un nombre de una, no especificada, de las "$f$", "$g$", "$h$", etc. (y si consideramos que "$f$" es un nombre de "$\varphi$", "$g$" de "$\psi$", "$h$" de "$\chi$", etc., entonces "f" es un nombre de una, no especificada, de las "$\varphi$", "$\psi$", "$\chi$", etc.). El resultado neto de la traducción es capacitarnos para hablar claramente acerca de los símbolos en cuanto distintos de las funciones, números, etc., sin llegar a la complicación que representa el continuo uso de comillas y procedimientos similares (tales como los "ángulos" de Quine 1940).

Supóngase que una función $\varphi$ de $n$ variables ha sido definida intuitivamente a partir de $l$ ($\geq 0$) funciones $\psi_1, \ldots, \psi_l$ de $m_1, \ldots, m_l$ variables, respectivamente. Antes de poder discutir si un sistema de ecuaciones dado E "define" a $\varphi$ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_l$ en el formalismo, hemos de decir qué letras de función $f, g_1, \ldots, g_l$ van a expresar $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_l$, respectivamente.

Es útil emplear convenciones que hagan posible identificar a estas letras tomando por base a E. Basta considerar sistemas E en los que el primer símbolo (el más a la izquierda) de la última ecuación es una letra de función f; y llamamos a ésta la *letra de función principal* de E, y la usamos para expresar $\varphi$. A las diferentes letras de función que aparecen en los miembros de la derecha de las ecuaciones E pero no en los miembros de la izquierda las llamamos las *letras de función dadas* de E. Basta considerar sistemas E en los que haya $l$ de éstas; y usamos de ellas, $g_1, \ldots, g_l$, en el orden de su ocurrencia en la lista preasignada de letras de función, para expresar $\psi_1, \ldots, \psi_l$ respectivamente. Basta usar sistemas E en los que $f, g_1, \ldots, g_l$ ocurren sólo en términos formados con $n, m_1, \ldots, m_l$ argumentos respectivamente (o bien podríamos, para el presente propósito, contar como distinta una letra de función cuando tenga distinto número de argumentos, como lo hicimos con las letras de predicado en § 31); entonces, llamamos a las otras letras de función (si hay alguna) que ocurran en ecuaciones de E las *letras de función auxiliares* de E.

Cuando $l > 0$, necesitaremos tener disponibles, como "ecuaciones supuestas", no sólo el sistema E, al que asociamos con el esquema que define a $\varphi$ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_l$, sino también ecuaciones que den los valores de las funciones $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Denote "$E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{g_1 \ldots g_l}$" al conjunto de las ecuaciones $g_j(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{mj}) = \boldsymbol{y}$ donde $\psi_j(y_1,$

$..., y_{mj}) = y$, para $j = 1, ..., l$ y todos los $m_j$-tuplos $y_1, ..., y_{mj}$ de números naturales (siendo $\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_{mj}, \boldsymbol{y}$ los numerales correspondientes a los números $y_1, ..., y_{mj}, y$). Este conjunto de ecuaciones es infinito cuando $l > 0$ (salvo si $m_1 + ... + m_l = 0$); y vacío cuando $l = 0$.

Reunimos estas ideas en la siguiente definición metamatemática. Un sistema E de ecuaciones *define recursivamente a* $\varphi$ *en* (o *a partir de*) $\psi_1, ..., \psi_l$ si, para todo $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ de números naturales:

$E^{\psi_1 ... \psi_l}_{g_1 ... g_l}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, donde f es la letra de función principal de E, $g_1, ..., g_l$ son las letras de función dadas de E en el orden de su ocurrencia en la lista preasignada de letras de función, y $\boldsymbol{x}$ es un numeral, si y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n) = x$.

En otras palabras, E define recursivamente a $\varphi$ a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$ si (para f, $g_1, ..., g_l$ como se han descrito): $E^{\psi_1 ... \psi_l}_{g_1 ... g_l}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ donde $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ son numerales, si (propiedad de completud) y sólo si (propiedad de consistencia) $f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x} \in E^{\varphi}_f$.

EJEMPLOS 1 y 2 (continuación). La letra de función principal de (b) es $f$; $h$ es una letra de función auxiliar; y, con sobrada evidencia, (b) define recursivamente la función $\varphi$ (donde $\varphi(y) = 4$ si $y = 0$, y $\varphi(y) = 7$ si $y > 0$). El sistema $(b_1)$ define $\chi$ $(= C^2_7)$ recursivamente; y $(b_2)$ define recursivamente $\varphi$ a partir de $\chi$, con $h$ como la letra de función dada.

TEOREMA II. *Si* $\varphi$ *es recursiva primitiva en* $\psi_1, ..., \psi_l$, *entonces hay un sistema* E *de ecuaciones que define recursivamente* $\varphi$ *a partir de* $\psi_1, ..., \psi_l$.

Es harto evidente que obtenemos un tal sistema E traduciendo al formalismo las aplicaciones de esquema para cualquier derivación recursiva primitiva $\varphi_1, ..., \varphi_k$ de $\varphi$ a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$, si escogemos convenientemente las letras de función, y si, primeramente, acordamos, si es necesario, haber usado cada $\psi_j$ en alguna aplicación de esquema (puesto que nuestras convenciones permiten que $\psi_1, ..., \psi_l$ sean expresadas respectivamente por las letras de función $g_1, ..., g_l$, todas las cuales ocurren en E). No obstante, daremos en detalle el análisis metamatemático, con cinco lemas, para asentar las bases de un breve tratamiento de posteriores temas similares.

Por la *rama principal* de una deducción, entendemos la rama que, trazada en sentido ascendente a partir de la ecuación final, contiene la premisa mayor en cada aplicación de R2. Llamamos la *ecuación principal* a la ecuación que se encuentra en la cabecera de la rama principal. A las deducciones (que ocurren como partes de la deducción dada) de las premisas menores correspondientes a las aplicaciones de R2 a lo largo de la rama principal las llamamos *deducciones contributorias.*

EJEMPLO 2 (continuación). La rama principal de (a), leyendo en sentido descendente se compone de las ecuaciones designadas con los números $4_1$, 8, 9, 10. La ecuación principal es $f(b') = h(b, f(b))$. Las dos deducciones contributorias son los árboles que finalizan con 7 y con 2.

La rama principal de una deducción de una ecuación de la forma $f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, en la que f es una letra de función y $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ son numerales,

leída en sentido descendente, consta de cero o más aplicaciones de R1, seguidas por cero o más aplicaciones de R2. Las aplicaciones de R1 sustituyen las variables de la ecuación principal por los numerales respectivos, hasta que el miembro izquierdo llegue a ser $f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n)$. Las aplicaciones de R2 reemplazan partes $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p)$ del miembro derecho (originalmente presentes o resultantes en el curso de tales reemplazos) por los respectivos numerales $\boldsymbol{z}$, hasta que el miembro derecho llega a ser $\boldsymbol{x}$.

Por *esquema de identidad*, entendemos:

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi(x_1, ..., x_n).$$

LEMA IIa. *Si* $\varphi$ *es una dependiente inmediata de* $\psi_1, ..., \psi_l$ *por uno de los Esquemas* (I)–(V) *o por el esquema de identidad, entonces el sistema de ecuaciones* E, *obtenido al traducir al formalismo las ecuaciones informales de aplicación de esquema (con una elección adecuada de las letras de función), define recursivamente a* $\varphi$ *a partir de* $\psi_1, ..., \psi_l$.

DEMOSTRACION DEL LEMA IIa. Las demostraciones son paralelas al razonamiento informal por medio del cual comprobamos que las aplicaciones de esquema definen las funciones.

ESQUEMA (Vb). E tiene la forma $f(0, x_2, ..., x_n) = g(x_2, ..., x_n)$, $f(y', x_2, ..., x_n) = h(y, f(y, x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n)$. Elíjanse cualesquiera $n - 1$ números $x_2, ..., x_n$. Usamos la inducción sobre $x_1$. BASE: $x_1 = 0$. Entonces, $\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi(x_2, ..., x_n)$. Ahora bien, $E_{gh}^{\psi x}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ para $x = \varphi(x_1, ..., x_n)$, usando la primera ecuación de E como ecuación principal, y la ecuación $g(\boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ de $E_{gh}^{\psi x}$ como premisa menor para R2. Por otra parte, para deducir $f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ para cualquier numeral $\boldsymbol{x}$, hemos de hacer uso de la misma ecuación principal y las mismas sustituciones por numerales según R1 (aparte del orden que guarden), puesto que no puede obtenerse una ecuación con $f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n)$ (para $x_1 = 0$) como miembro izquierdo a partir de ninguna otra ecuación de $E_{gh}^{\psi x}$, E, ni por medio de otras sustituciones. Entonces, el paso de reemplazo según R2 está también determinado de forma única. Así $E_{gh}^{\psi x}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ siendo $\boldsymbol{x}$ un numeral sólo para $x = \varphi(x_1, ..., x_n)$. PASO DE INDUCCION: $x_1 = y'$. Similarmente.

LEMA IIb. *Sea* D *un conjunto de ecuaciones (finito o infinito), sea* F *un sistema de ecuaciones cuyos miembros izquierdos no contienen letras de función que ocurran en (ecuaciones de)* D, *y sea* g *una letra de función que ocurra en* D. *Entonces*, D, $F \vdash g(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$ *donde* $\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}$ *son numerales, sólo si* $D \vdash g(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$.

DEMOSTRACION DEL LEMA IIb. Considérese cualquier deducción, a partir de D, F, de una ecuación de la forma descrita $g(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$. Demostramos mediante una inducción por curso-de-valores sobre la altura $t$ de esta deducción que, en ella, sólo se usan como ecuaciones supuestas ecuaciones de D (esto es, ocurren en ella como cabeceras de las ramas). La ecuación principal es una ecuación de D, puesto que su primer símbolo es g, que ocurre en D, y, por tanto, no en el miembro izquierdo de ninguna ecuación de F. Toda deducción contributoria es de altura $< t$, y termina en una ecuación $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$, donde h es una letra

de función que ocurre en el lado derecho de la ecuación principal, y por tanto en D. En consecuencia, por la hipótesis de la inducción, las deducciones contributorias sólo utilizan ecuaciones supuestas que pertenezcan a D.

LEMA IIc. *Sean* D *y* F *como en el Lema* IIb. *Sea* G *el conjunto de las ecuaciones que son de la forma* $g(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$, *donde* g *es una letra de función que ocurre tanto en* D *como en* F *y donde* $\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}$ *son numerales, y que son deducibles de* D. *Sea* f *una letra de función que no ocurre en* D. *Entonces* D, F $\vdash f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ *donde* $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ *son numerales, sólo si* G, F $\vdash f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$.

DEMOSTRACION DEL LEMA IIc, mediante inducción por curso-de-valores sobre la altura $t$ de la deducción dada de $f(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ a partir de D, F. La ecuación principal es una ecuación de F, porque su primer símbolo es f, el cual no ocurre en ninguna ecuación de D. Cualquier premisa menor que se halle a lo largo de la rama principal, es de la forma $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$ donde h ocurre en el miembro derecho de la ecuación principal y por tanto en F. Si h ocurre en D, entonces, usando el Lema IIb, $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$ es una ecuación de la forma $g(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$ que es deducible a partir de D, esto es, $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z} \in$ G. Si h no ocurre en D, entonces, por la hipótesis de la inducción sobre $t$, $h(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$ es deducible a partir de G, F.

LEMA IId. (1) *Sean* $f_1, ..., f_k$ *distintas letras de función en el orden en que ocurren en la lista de letras de función dada.* (2) *Sean* $\varphi_1 = \psi_1, ..., \varphi_l = \psi_l$. (3) *Para* $i = l + 1, ..., k$ $(k \geq 1)$, *supóngase que* $E_i$ *define recursivamente* $\varphi_i$ *a partir de* $\varphi_{j_{i_1}}, ..., \varphi_{j_{iq_i}}$ $(q_i \geq 0; j_{i_1}, ..., j_{iq_i} < i)$, *con* $f_i$ *como letra de función principal y* $f_{j_{i1}}, ..., f_{j_{iq_i}}$ *como las letras de función dadas.* (4) *Sean las letras de función auxiliares de* $E_i$ *(si las hay) distintas tanto de las de cada* $E_j$ *para* $j \neq i$ *como de* $f_1, ..., f_k$. *Entonces, para* $i = 1, ..., k$: $E_{f_1 ... f_l}^{\psi_1 ... \psi_l}, E_{l+1} ... E_k \vdash f_i(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{n_i}) = \boldsymbol{x}$ *donde* $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{n_i}, \boldsymbol{x}$ *son numerales– si y sólo si* $f_i(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_{n_i}) = \boldsymbol{x} \in E_{f_i}^{\varphi_i}$.

EJEMPLO 2 (conclusión). Sean $k = 2$; $l = 0$; $\varphi_1, \varphi_2$ la descripción recursiva primitiva $\chi, \varphi$; y $E_1, E_2$ sean $(b_1), (b_2)$ intercambiando $f$ y $h$.

EJEMPLO 3. Sea $\varphi_1, ..., \varphi_k$ (con $k = 9$, $l = 3$) la derivación recursiva primitiva $\zeta, \eta, \theta, U_1^3, \theta_1, U_3^3, \psi, C_2^3, \varphi$ de los Ejemplos 1 §§44, 45, y sea $E_i$ $(i = 4, ..., 9)$ la ecuación $(c_i)$:

(c)
$$\begin{cases} f_4(a, c, b) = a, & (c_4) \\ f_5(a, c, b) = f_3(f_4(a, c, b)), & (c_5) \\ f_6(a, c, b) = b, & (c_6) \\ f_7(a, c, b) = f_2(f_6(a, c, b), f_5(a, c, b)), & (c_7) \\ f_8(a, c, b) = 2, & (c_8) \\ f_9(a, c, b) = f_1(f_4(a, c, b), f_7(a, c, b), f_8(a, c, b)). & (c_9) \end{cases}$$

DEMOSTRACION DEL LEMA IId. Vemos fácilmente, por las propiedades generales de $\vdash$, que $E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}, E_{l+1} \ldots E_k \vdash f_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n_i}) = \mathfrak{x}$, si $f_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x} \in E^{\varphi_i}_{f_i}$. Demostramos la conversa por induccion sobre $k$. BASE: $k = l$. Entonces $E_{l+1} \ldots E_k$ es vacío. La conclusión se sigue por la constitución de $E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}$ (observando que no contiene ninguna premisa correspondiente a R1 y ninguna premisa mayor correspondiente a R2). PASO DE INDUCCION: $k > l$. Por la hipótesis de la inducción, sólo aquellas ecuaciones de la forma $f_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n_i}) = \mathfrak{x}$ para $i < k$ que $\in E^{\varphi_i}_{f_i}$ son deducibles a partir de $E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}, E_{l+1} \ldots E_{k-1}$. Por la Hipótesis (3) para $i = k$ (y escribiendo "$\varphi$" por "$\varphi_k$", "$\varphi_{j_s}$" por "$\varphi_{j_{ks}}$", "f" por "$f_k$", etc.), sólo aquellas ecuaciones de la forma $f(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x}$ que $\in E^{\varphi}_{f}$ son deducibles a partir de $E^{\varphi_{j_1} \ldots \varphi_{j_q}}_{f_{j_1} \ldots f_{j_q}}, E_k$; y, por el Lema IIc, no hay otras que se conviertan en deducibles cuando $E^{\varphi_{j_1} \ldots \varphi_{j_q}}_{f_{j_1} \ldots f_{j_q}}$ es reemplazado en la lista de ecuaciones supuestas por

$$E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}, \; E_{l+1} \ldots E_{k-1}.$$

LEMA IIe. *Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ una secuencia finita de funciones tal que $\varphi_k$ es $\varphi$ y para cada $i$ ($i = 1, \ldots, k$), o bien* (A) *$\varphi_i$ es una de las funciones $\psi_1, \ldots, \psi_l$, o bien* (B) *$\varphi_i$ es definida recursivamente a partir de $\varphi_{j_{i_1}}, \ldots, \varphi_{j_{iq_i}} (q_i \geq 0; j_{i_1}, \ldots, j_{iq_i} < i)$, por un sistema $E_i$ de ecuaciones. Entonces hay un sistema E de ecuaciones que define recursivamente a $\varphi$ a partir de $\psi_1, \ldots, \psi_l$.*

DEMOSTRACION DEL LEMA IIe. Si no es ya el caso de que cada una de las $\psi$ esté introducida según (A) como una de las $\varphi$ y esté después de ello usada según (B) como una de las $\varphi_{j_{i_1}}, \ldots, \varphi_{j_{iq_i}}$ para alguna $\varphi_i$, podemos hacerlo así (aumentando $k$) mediante la introducción de algunas aplicaciones del Esquema de identidad (cfr. Lema IIa). Entonces, volviendo a ordenar y volviendo a enumerar las $\varphi$ y los $E_i$ y cambiando las letras de función en los últimos (si es necesario), podemos lograr la situación descrita en el Lema IId, con $k > l$, $\varphi_k = \varphi$, y con $f_1, \ldots, f_l$ como las letras de función dadas de $E_{l+1} \ldots E_k$. Supóngase que E sea $E_{l+1} \ldots E_k$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA II. Por el Lema IIa y la hipótesis se satisfacen las hipótesis del Lema IIe.

§ 55. **Funciones recursivas generales.** Los esquemas (I)–(V) no son los únicos esquemas de definición de una función de teoría de números, sea ab initio sea a partir de otras funciones de teoría de números, que pueden ser expresadas por sistemas de ecuaciones, usando en estas últimas solamente letras de función, $'$, variables de número y numerales.

Consideremos otros ejemplos, a todos los cuales llamaremos "recursiones". Mantenemos las ecuaciones en el lenguaje informal; y, para mantenerlas de esta suerte, eliminamos algunos otros modos de expresión que fueron usados en el Capítulo IX, por ejemplo, $\prod_{y<z}$ (#B), $\mu y_{y<z}$ (#E), casos (#F).

Así, el (a) del Ejemplo 1 § 46 podemos escribirlo ahora

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \pi(0,y)=1, \\ \pi(z',y)=(y+\varphi(z))\cdot\pi(z,y), \\ \varphi(y)=\pi(y,y) \end{cases}$$

(definiendo la función auxiliar $\pi$ así como $\varphi$), mientras que el (a) del Ejemplo 2 § 46 está ya en la forma que estamos considerando. Habíamos mostrado en § 46 que estas recursiones por curso-de-valores son reducibles a recursión primitiva, esto es, la misma función puede ser definida por una serie de aplicaciones de los Esquemas (I)–(V).

A título de un nuevo ejemplo muy sencillo, considérese la recursión

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \varphi(0,z)=z, \\ \varphi(y',z)=\varphi(y,\sigma(y,z)). \end{cases}$$

Esta no es primitiva, porque la $z$, en lugar de haber sido mantenida fija como parámetro, ha sido sustituida por $\sigma(y,z)$ en el paso de inducción de la definición. Esta recursión puede también ser reducida a una recursión primitiva. Desarrollando (b) para $y=0, 1, 2, \ldots$ (tal y como expandimos (1) § 43), hallamos que el valor $\varphi(y,z)$ es

$$\sigma(0,\sigma(1,\sigma(2,\ldots\sigma(y-3,\sigma(y-2,\sigma(y-1,z)))\ldots))).$$

Considérese la secuencia de los números $z$, $\sigma(y-2,z)$, $(y-2,\sigma(y-1,z))$, $\ldots,\sigma(0,\sigma(1,\sigma(2,\ldots\sigma(y-3,\ \sigma(y-2,(y-1,z)))\ldots)))$, que ocurre al construir este valor desde dentro en lugar de hacerlo tal y como nos lo da (b). Estos son los valores para $u=0, 1, 2, \ldots, y$ de la función $\mu(u,y,z)$ definida por la recursión primitiva

$$\text{(b}_1\text{)} \qquad \begin{cases} \mu(0,y,z)=z, \\ \mu(u',y,z)=\sigma(y\dot{-}u',\mu(u,y,z)). \end{cases}$$

Puesto que el valor para $u=y$ es el mismo que el valor $\varphi(y,z)$,

$$\text{(b}_2\text{)} \qquad \varphi(y,z)=\mu(y,y,z);$$

como puede verse también usando la inducción sobre $u$ para demostrar que

$$\text{(c)} \qquad \mu(u',y',z)=\mu(u,y,\sigma(y,z)),$$

y de aquí que la $\varphi$ definida por $(b_1)$ y $(b_2)$ satisface (b).

De una forma similar, Péter (1934, 1935a) mostró que toda recursión (llamada "en nido") en la cual $\varphi(0,z)$ es una función dada de $z$, y $\varphi(y',z)$ es explícitamente expresada en términos de $y$, $z$, funciones dadas (y constantes), y $\varphi(y,t)$ como una función de $t$, es reducible a recursión primitiva.

¿Hay recursiones que no son reducibles a recursión primitiva; y, en particular, puede ser usada la recursión para definir una función que no es recursiva primitiva?

Esta pregunta surgió a raíz de una conjetura, de Hilbert 1926, sobre el problema del continuo, y fue contestada por Ackermann 1928. Sea $\xi_0(b,a)=a+b$, $\xi_1(b,a)=a\cdot b$, $\xi_2(b,a)=a^b$; y extiéndase esta serie de funciones por medio

de sucesivas recursiones primitivas de la forma $\xi_{n'}(0,a)=a$, $\xi_{n'}(b',a)=\xi_n(\xi_{n'}(b,a),a)$ $(n \geq 2)$, de modo que, por ejemplo, $\xi_3(b,a)=a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$ con $b$ exponentes. Considérese ahora $\xi_n(b,a)$ como una función $\xi(n,b,a)$ de tres variables. Sea $\alpha$ la función recursiva primitiva definida así,

$$\text{(d)} \qquad \alpha(n,a)=\begin{cases} 0 \text{ si } n=0, \\ 1 \text{ si } n=1, \\ a \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, la siguiente recursión define $\xi(n,b,a)$,

$$\text{(e)} \qquad \begin{cases} \xi(0,b,a)=a+b, \\ \xi(n',0,a)=\alpha(n,a), \\ \xi(n',b',a)=\xi(n,\xi(n',b,a),a). \end{cases}$$

Este es un ejemplo de una "recursión doble", o sea, de una recursión sobre dos variables simultáneamente. Si la función $\xi(n,b,a)$ definida por (e) fuese recursiva primitiva, entonces la función $\xi(a)$ de una variable, definida explícitamente a partir de ella, de este modo,

$$\text{(f)} \qquad \xi(a)=\xi(a,a,a),$$

sería también recursiva primitiva. La investigación de Ackermann muestra que $\xi(a)$ crece más deprisa con el incremento de $a$ que cualquier función recursiva primitiva de $a$ (justamente como $2^a$ crece más deprisa que cualquier polinomio en $a$), esto es, que, dada cualquier función recursiva primitiva $\varphi(a)$, puede hallarse un número natural $c$ tal que $\xi(a) > \varphi(a)$ para todo $a \geq c$. Así, $\xi(a)$, y por tanto también $\xi(n,b,a)$ (ya que $\xi(a)$ procede de ésta por medio de la definición explícita (f)), no son recursivas primitivas. Este ejemplo fue simplificado por Péter 1935 (cfr. también Hilbert-Bernays 1934 págs. 330 ss.) y Raphael Robinson 1948.

Un método diferente fue seguido por Péter 1935 al construir otro ejemplo. La clase de las funciones iniciales definibles por los Esquemas (I)–(III) es enumerable. Entonces, la clase de las funciones recursivas primitivas definibles usando el Esquema (IV) o (V) justamente una vez es enumerable; ya que los $m+1$-tuplos $\psi$, $\chi_1, \ldots, \chi_m$ para (IV) o bien los pares $\psi$, $\chi$ (o $q$, $\chi$) para (V) formados a partir de una clase enumerable son enumerables (§ 1). Entonces, las funciones recursivas primitivas definibles usando el Esquema (IV) o (V) una segunda vez son enumerables; y así sucesivamente. Así, la clase de todas las funciones recursivas primitivas es enumerable, como podríamos también apreciar enumerando los sistemas E del Teorema II § 54. En particular, las funciones recursivas primitivas de una variable son enumerables. Por lo tanto, según el método diagonal de Cantor (§ 2), no pueden comprender todas las funciones de teoría de números de una variable; y si

$$\varphi_0(a), \varphi_1(a), \varphi_2(a), \ldots$$

es cualquier enumeración de ellas admitiendo repeticiones (esto es, cualquier lista infinita de ellas en la que cada una ocurra al menos una vez), entonces $\varphi_a(a)+1$ es una función de teoría de números de una variable que no está en la enumeración y, así, no es recursiva primitiva. La función enumerante $\varphi(n,a)$ –tal que

$\varphi(n, a) = \varphi_n(a)$– es una función de dos variables que no es recursiva primitiva, ya que $\varphi_a(a) + 1 = \varphi(a, a) + 1$. Ello establece tan sólo, sin duda, que pueden ser halladas funciones de teoría de números $\varphi_a(a) + 1$ y $\varphi(n, a)$ que no son recursivas primitivas. Lo que hizo Péter fue mostrar que, para una enumeración adecuada (con repeticiones) de las funciones recursivas primitivas de una variable, la función enumerante puede ser definida por medio de una recursión doble (además de aplicaciones de los Esquemas (I)–(V)).

EJEMPLO 1. ¿Llevan las recursiones dobles a predicados cualesquiera que no son recursivos primitivos? Sí, pues $1 \dot{-} \varphi(a, a)$ toma sólo 0 y 1 como valores, y no puede ocurrir en la anterior enumeración, de modo que es la función representante de un predicado que no es recursivo primitivo. (Skolem 1944).

Péter 1936 estudia recursiones $k$-ples para todo entero positivo $k$. Estas comprenden recursiones primitivas para $k = 1$, recursiones dobles para $k = 2$, y así sucesivamente. Dicha autora muestra que, para cada sucesivo $k$, se obtienen nuevas funciones. Llama "$k$-recursivas" a las funciones definibles empleando recursiones de orden $k$ (además de la definición explícita). Muestra que toda función 2-recursiva puede definirse por medio de una mera recursión doble de la forma

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} \varphi(0, b) = \varphi(n, 0) = 1, \\ \varphi(n', b') = \varphi(n, b, \varphi(n, \beta(n, b, \varphi(n', b))), \varphi(n', b)) \end{cases}$$

además de aplicaciones de los Esquemas (I)–(V); y similarmente (con un esquema que, para $k = 2$, se reduce a (g)) para cada uno de los $k \geq 2$.

EJEMPLO 2. Al objeto de asentar un punto suscitado en § 45, supóngase que $\varphi$ es 3-recursiva pero no 2-recursiva, y que $\psi$ es 2-recursiva pero no 1-recursiva, o sea, no es recursiva primitiva. Entonces, "si $\psi$ es recursiva primitiva, entonces $\varphi$ es recursiva primitiva" es vacuamente verdadera, pero "$\varphi$ es recursiva primitiva en $\psi$" es falsa, puesto que haría a $\varphi$ 2-recursiva.

Estas cuestiones son tratadas en la monografía de Péter 1951 (de la que no se ha podido disponer durante la redacción del presente libro).

No debe esperarse que las recursiones $k$-ples con $k$ finito agoten las posibilidades de definir por recursión nuevas funciones. En 1950 Péter usa "recursiones transfinitas" (empleadas por primera vez por Ackermann 1940) para definir nuevas funciones.

Esto nos conduce al problema de si podemos caracterizar de algún modo exacto la noción de cualquier "recursión", o la clase de todas las "funciones recursivas".

Los ejemplos (I)–(V), (a), (b), (e) (y otros citados) de esquemas de definición de una función que hemos convenido hasta el presente en llamar "recursiones" poseen dos aspectos: (i) Son expresados por ecuaciones del modo que hemos analizado formalmente (para (I)–(V) particularmente) en § 54. (ii) Son definiciones por inducción matemática, en una u otra forma, salvo en el caso trivial en que son definiciones explícitas.

La caracterización de todas las "funciones recursivas" fue llevada a cabo, mediante la definición de 'función recursiva general' por Gödel 1934, quien se basó en una sugerencia de Herbrand. Esta definición tuvo éxito merced a una atrevida generalización, que consiste en elegir el Aspecto (i) por sí solo como definición.

Decimos, entonces, que una función $\varphi$ es *recursiva general*, si hay un sistema E de ecuaciones que la define recursivamente (§ 54 con $l=0$).

Esta elección puede parecer inesperada, puesto que la palabra "recursivo" tiene su raíz en el verbo "recurrir", y la inducción matemática es nuestro método para tratar procesos recurrentes. El significado de la elección no es que el Aspecto (ii) vaya a estar ausente de cualquier recursión particular, sino que es transferido de la definición misma a la aplicación de la definición. Es de suponer que, para mostrar por medios finitistas que un esquema dado responde al Aspecto (i) —salvo en situaciones triviales— haya que hacer uso, de alguna manera, de la inducción matemática. Pero, al definir la totalidad de las funciones recursivas generales, renunciamos al intento de determinar de antemano en qué forma ha de manifestarse el principio intuitivo de inducción. (Por el teorema de Gödel § 42 sabemos que el intento de una tal determinación por medio del sistema formal de teoría de números es incompleto).

Para establecer con exactitud la definición de Herbrand-Gödel de función recursiva general, hay un cierto margen de amplitud en cuanto a los detalles de la formalización, de suerte que cabe dar versiones de la definición que sean equivalentes a la de Gödel pero un poco más simples (cfr. Kleene 1936, y 1943 § 8). La presente versión es la de Kleene 1943, a excepción de cambios intrascendentes en R1 y R2 que simplifican ligeramente § 56, y de la inclusión en el tratamiento de funciones con 0 variables. (Para relacionar el presente tratamiento con el de Kleene 1943, señalamos: (1) La inclusión de funciones de 0 variables no altera la noción de recursividad general para funciones de $n > 0$ variables. Pues puede mostrarse que, si una letra de función auxiliar h ocurre como un término con 0 argumentos en las ecuaciones supuestas, todas las ocurrencias de ese término pueden cambiarse por k (c), donde k es una nueva letra de función y c una nueva variable, sin alterar la clase de las ecuaciones deducibles que contienen sólo la letra de función principal. A continuación: (2) Cabe mostrar, en pocas líneas, que son exactamente las mismas ecuaciones de la forma $f(\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x}$, donde f es una letra de función y $\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}$ numerales, las que son deducibles a partir de las ecuaciones supuestas dadas por las presentes R1 y R2 y las que lo son por las R1 y R2 de 1943; o que con sólo una complicación algo mayor puede llevarse a cabo el tratamiento de §§ 54 y 56 con las R1 y R2 de 1943).

Una función $\varphi$ es *recursiva general en* las funciones $\psi_1, ..., \psi_l$, si hay un sistema E de ecuaciones que define recursivamente a $\varphi$ a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$ (§ 54). Esto incluye la definición de función recursiva general como el caso $l = 0$. Para $l > 0$ (Kleene 1943), consideramos usualmente un esquema o funcional $\varphi = \mathsf{F}(\psi_1, ..., \psi_l)$ (§ 47) que define una función de teoría de números $\varphi$ de $n$ variables a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$, para cualesquiera $l$ funciones de teoría de números $\psi_1, ..., \psi_l$ de $m_1, ..., m_l$ variables respectivamente, o cualesquiera funciones tales sometidas a ciertas restricciones establecidas. Entonces, si el E puede ser dado independientemente de $\psi_1, ..., \psi_l$ (para las $n$, $l$, $m_1, ..., m_l$ fijadas), decimos que el esquema $\mathsf{F}$ es *recursivo general*, o que $\varphi$ es *uniformemente recursiva general en* $\psi_1, ..., \psi_l$. Puesto que nuestro tratamiento dará siempre uniformidad en las $\psi$ (con sujeción a las restricciones que se establezcan), omitiremos de ordinario la palabra "uniformemente", salvo por razón de énfasis. (A diferencia del caso recursivo primitivo de § 47, si el esquema original comporta alguna restricción sobre $\psi_1, ..., \psi_l$, no está implicado con ello que el esquema pueda necesariamente ser

extendido a otro recursivo general que defina una $\varphi$ sin restricción sobre las $\psi_1, ..., \psi_l$).

Usando la presente terminología para restablecer los resultados de los Lemas IIa y IIe, tenemos ahora:

TEOREMA II (segunda versión). *Si $\varphi$ es definida a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$ por una sucesión de aplicaciones de esquemas recursivos generales, entonces $\varphi$ es recursiva general en $\psi_1, ..., \psi_l$.*

*En particular, los Esquemas* (I)–(V) *son recursivos generales. Por tanto: Si $\varphi$ es recursiva primitiva en $\psi_1, ..., \psi_l$, es recursiva general en $\psi_1, ..., \psi_l$. Cualquier esquema recursivo primitivo es recursivo general. Si $\varphi$ es recursiva primitiva, es recursiva general.*

La definición de recursividad general ha sido establecida para el caso de que la función $\varphi$ sea ya conocida, por el uso intuitivo de las mismas ecuaciones que al ser formalizadas constituyen el E, o por algún otro medio. Esto anticipa nuestro propósito de mostrar que varias funciones y esquemas, conocidos por nosotros con independencia del formalismo de funciones recursivas, son recursivos generales (justamente como hemos hecho para las funciones y esquemas recursivos primitivos). En el caso de que $\varphi$ no sea previamente conocida, tenemos: Un sistema de ecuaciones E define recursivamente una función de $n$ variables a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$. si, para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ de números naturales, hay exactamente un numeral $\mathfrak{x}$ tal que $E^{\psi_1 ... \psi_l}_{g_1 ... g_l}$, $E \vdash f(\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x}$, siendo f la letra de función principal de E, y siendo $g_1, ..., g_l$ las letras de función dadas en el orden de su ocurrencia en la lista dada de letras de función. Si esto es así, la función $\varphi$ a la que E define recursivamente es la función cuyo valor $\varphi(x_1, ..., x_n)$ para los números naturales $x_1, ..., x_n$ como argumentos, es el número natural $x$ cuyo numeral correspondiente es $\mathfrak{x}$.

Al igual que la recursividad primitiva (§§ 45, 47), la noción de recursividad general para funciones se extiende a predicados y a casos mixtos por medio del uso de funciones representantes correspondientes a los predicados.

**§ 56. Aritmetización del formalismo de funciones recursivas.** El formalismo de funciones recursivas será tratado ahora como una aritmética generalizada del tipo descrito en § 50. Más abajo ofrecemos una lista de definiciones recursivas para esta aritmética generalizada, como en § 51. Simultáneamente, indicamos cómo pasar a la aritmética simple mediante la numeración de Gödel, como en § 52.

La aritmética generalizada tendrá seis ceros, con sus respectivos números de Gödel. como sigue.

| Ceros: | = | ′ | 0 | $a$ | ı | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Números de Gödel correlacionados: | 15 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |

Permitimos formar los sucesores de cualquier número positivo de entidades, esto es, todos los números naturales son admitidos ahora como valores de $s$.

Con respecto a nuestra lista de letras de función $f$, $g$, $h$ usamos las entidades $f(\imath, f)$, $(\imath, (\imath, f))$, ... (escritas a veces $f$, $f_\imath$, $f_{\imath\imath}$, ...), construidas a partir de la entidad cero $f$ de la misma manera que lo son las variables (de número) a partir de la entidad cero $a$.

Un término de la forma $f(r_1, ..., r_n)$ donde f es una letra de función y $r_1, ..., r_n$ son términos ($n \geq 0$) será representado como la entidad $(f, r_1, ..., r_n)$. Así, en particular, la letra de función f y el término $f(r_1, ..., r_n)$ para $n = 0$, aun cuando usualmente se escriban igual lingüísticamente, no son tratados como la misma entidad; en la aritmética generalizada, si la primera es f, el segundo es (f). (Tenemos con todo una entidad única correlacionada con cada objeto lingüístico significativo, si consideramos que la omisión de paréntesis, cuando $f(r_1, ..., r_n)$ para $n = 0$ se escribe lingüísticamente como "f", es meramente una abreviatura). Por ejemplo, la ecuación $f = 0$ es la entidad $(=, (f), 0)$.

Un sistema de ecuaciones $e_0, ..., e_s$ se representa como la entidad $(e_0, ..., e_s)$.

En el paso de la aritmética generalizada a la aritmética de números naturales por medio de la numeración de Gödel, la cláusulas que utilizan un número variable $s + 1$ de predecesores son tratadas con la ayuda de # # E y 20 (§ 45). Para esas cláusulas (y otras pocas definiciones), añadimos la correspondiente cláusula (o definición) de teoría de números.

## Definiciones de predicados y funciones metamatemáticos para el formalismo de funciones recursivas como una aritmética generalizada

Df1. y es un *numeral*. (Abreviatura: $\mathfrak{N}(y)$). Lo mismo que Dn1 § 51.

Df2. y es una *variable*. (Abreviatura: $\mathfrak{V}(y)$). Lo mismo que Dn2.

Df3. y es una *letra de función*. (Abreviatura: $\mathfrak{FN}(y)$). Como Df2.

Df4. y es un *término*. (Abreviatura: $\mathfrak{Tm}(y)$).

1. $y \asymp 0$.
2. y es una variable.
3. $y \asymp r'$ (o sea, $y \asymp (', r)$), donde r es un *término*.
4. $y \asymp f(r_1, ..., r_n)$ (o sea, $y \asymp (f, r_1, ..., r_n)$, cfr. § 50), donde f es una letra de función, y $r_1, ..., r_n$ son términos ($n \geq 0$).
   $LF((y)_0) \,\&\, (i)_0 < i < \lg(y)\, Tm((y)_i)$.

Df5. z es una *ecuación*. (Abreviatura: $\mathfrak{Eq}(z)$).

1. $z \asymp r = s$, donde r y s son términos.

Df6. Z es un *sistema de ecuaciones*. (Abreviatura: $\mathfrak{SE}(Z)$).

1. $Z \asymp (z_0, ..., z_s)$, donde $z_0, ..., z_s$ son ecuaciones.
   $\lg(z) > 0 \,\&\, (i)_i < \lg(z)\, Eq((z)_i)$.

Df7. (t es un término, x es una variable, e es un término o ecuación, y) d proviene de e mediante la sustitución de x por t. (Abreviatura: (d, e, t, x)).

1. t es un término, x es una variable, $e \asymp x$, y $d \asymp t$.

2–3. t es un término, x es una variable, e es 0 o una variable $\ast x$, y $d \asymp e$.

4. t es un término, x es una variable, y e es un término o ecuación de la forma $(e_0, e_1, ..., e_n)$ y d es $(d_0, d_1, ..., d_m)$, donde $m = n$, $e_0 \ast 1$, $d_0 \asymp e_0$, $\mathfrak{Sb}(d_1, e_1, t, x)$, ..., $\mathfrak{Sb}(d_n, e_n, t, x)$.
   $Tm(t) \,\&\, V(x) \,\&\, (Tm(e) \vee Eq(e)) \,\&\, \lg(e) > 0 \,\&\, \lg(d) = \lg(e) \,\&\, (e)_0 \neq 27 \,\&\, (d)_0 = (e)_0 \,\&\, (i)_0 < i < \lg(e)\, Sb((d)_i, (e)_i, t, x)$.

Df8. (e es un término o ecuación, x es una variable, y) e *contiene* a x. (Abreviatura: $\mathfrak{Ct}$ (e, x)). Como Dn6.

Df9. c es una *consecuencia inmediata* de d (por R1). (Abreviatura: $\mathfrak{Cn}$(c, d)).

*1. d es una ecuación, y existen una (variable) y y un numeral n, tales que d contiene a y, y $\mathfrak{Sb}$ (c, d, n, y).
$Eq\,(d) \,\&\, (Ey)_{y<_d (En)_n} <_c [N\,(n) \,\&\, Ct\,(d, y) \,\&\, Sb\,(c, d, n, y)]$.
Si d es una ecuación y $\mathfrak{Ct}$ (d, y), entonces y es una variable $\prec$ d; y si también $\mathfrak{Sb}$(c, d, n, y), entonces n $\prec$ c.

Df10. c es una *consecuencia inmediata* de d y e (por R2).
(Abreviatura: $\mathfrak{Cn}$(c, d, e)).

*1. e $\succ$ h $(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$, donde h es una letra de función, y $\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p, \boldsymbol{z}$ son numerales ($p \geq 0$); d es una ecuación, no conteniendo variables, llámesela $d_1 = d_2$; y c es de la forma $d_1 = c_2$, donde, para algún término $u$ que contenga a $a$,
$\mathfrak{Sb}\,(d_2, u, h\,(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p), a)$ y $\mathfrak{Sb}\,(c_2, u, \boldsymbol{z}, a)$.
$Eq\,(e) \,\&\, LF\,((e)_{1,0}) \,\&\, (i)_{0<i<\lg((e)_1)}\, N\,((e)_{1,i}) \,\&\, N\,((e)_2) \,\&$
$Eq\,(d) \,\&\, (y)_{y<_d \overline{Ct}\,(d,y)} \,\&\, c = 2^{15} \cdot 3^{(d)_1} \cdot 5^{(c)_2} \,\&\, (Eu)_{u<_d [Tm(u)}$
$\&\, Ct\,(u, 25) \,\&\, Sb\,((d)_2, u, (e)_1, 25) \,\&\, Sb\,((c)_2, u, (e)_2, 25)]$.
Puesto que $a$ tiene un número de Gödel más pequeño que cualquier letra de función, $a$ tiene un número de Gödel más pequeño que h $(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_p)$; y por tanto u tiene un número de Gödel más pequeño que d.

Df11. $\boldsymbol{x}$ es el *numeral para* el número natural $x$. (abreviatura: $\mathfrak{Nu}(\boldsymbol{x}, x)$). Igual que Dn11.

Df12. (Z es un sistema de ecuaciones, e) Y es una *deducción* a partir de Z (por R1 y R2). (Abreviatura: $\mathfrak{D}$(Z, Y)).

1. Z es un sistema de ecuaciones $(z_0, \ldots, z_s)$ e Y $\succ (z_i)$ $(i \leq s)$.
$SE\,(z) \,\&\, (Ei)_{i<\lg(z)}\, [y = 2^{(z)i}]$.
2. Y $\succ$ (c, $Y_1$), donde $Y_1$ es una *deducción* a partir de Z, y c es una consecuencia inmediata de $\{Y_1\}_0$.
3. Y $\succ$ (c, $Y_1$, $Y_2$), donde $Y_1$ e $Y_2$ son *deducciones* a partir de Z, y c es una consecuencia inmediata de $\{Y_1\}_0$ e $\{Y_2\}_0$.

Df13. Y es una deducción a partir de Z de una ecuación de la forma f $(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, donde f es la letra de función principal de Z, donde $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$, son los numerales para los números naturales $x_1, ..., x_n$ respectivamente, y donde $\boldsymbol{x}$ es un numeral (como un predicado de $Z, x_1, ..., x_n$, Y, para cada $n \geq 0$ que se haya fijado). (Abreviatura: $\mathfrak{S}_n\,(Z, x_1, ..., x_n, Y)$).

1. Y es una deducción a partir de Z, $\{Y\}_0 \succ f\,(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, donde f es una letra de función, f $\succ \{z_s\}_{1,0}$ si Z $\succ (z_0, ..., z_s)$, etc.
$D\,(z, y) \,\&\, \lg((y)_{0,1}) = n' \,\&\, LF\,((y)_{0,1,0}) \,\&\, (y_{0,1,0} = (z)_{\lg(z) \dot{-} 1,1,0} \,\&$
$Nu\,((y)_{0,1,1}, \cdot x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, Nu\,((y)_{0,1,n}, x_n) \,\&\, N\,((y)_{0,2})$.

Df14. $\mathfrak{Nu}^{-1}(y) = \begin{cases} x, \text{ si y es un numeral } \boldsymbol{x} \text{ (esto es, si } \mathfrak{Nu}(y, x)). \\ \text{el número de Gödel de y en otro caso.} \end{cases}$
$Nu^{-1}\,(y) = \mu x_{x<_y} Nu\,(y, x)$.

Df15. $\mathfrak{U}(Y) = \mathfrak{Nu}^{-1}(\{Y\}_{0,2})$.
Entonces $\mathfrak{U}(Y) = x$, siempre que Y sea una deducción de la forma $r = \mathfrak{x}$ donde $\mathfrak{x}$ es un numeral.
$U(y) = Nu^{-1}((y)_{0,2})$.

Por los métodos ilustrados en § 52, y las indicaciones que acompañan a estas definiciones:

LEMA III. *Para cada uno de los predicados y funciones definidos por* Df1–Df15, *el correspondiente predicado de teoría de números, o una función correspondiente de teoría de números, es recursivo* (a) *primitivo* (a).

§ 57. **El $\mu$-operador, enumeración, procedimiento de la diagonal.** Comenzaremos ahora usando el operador de mínimo número $\mu y$ (§ 45) sin límite sobre la $y$. Así, para un predicado $R(y)$ de teoría de números tal que $(Ey)R(y)$, $\mu y R(y) = \{$el mínimo (número natural) $y$ tal que $R(y)\}$. Por el momento, usamos $\mu y R(y)$ sólo cuando la condición de existencia $(Ey)R(y)$ está realizada.

De este modo, tenemos un nuevo esquema

(VIa) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\,[\chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$$

para definir una función $\varphi$ de $n$ variables ($n \geq 0$) a partir de cualquier función $\chi$ de $n+1$ variables tal que

(1a) $$(x_1) \ldots (x_n)\,(Ey)\,[\chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Tomando $R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv \chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ si $\chi$ ha sido dada primero, o, si $R$ ha sido dado primero, considerando que $\chi$ es la función representante de $R$, podemos también escribir el esquema así,

(VIb) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$$

como una definición de una función $\varphi$ a partir de un predicado $R$ tal que

(1b) $$(x_1) \ldots (x_n)\,(Ey)\,R(x_1, \ldots, x_n, y).$$

TEOREMA III. *El Esquema* (VIa), *valiendo* (1a), ((VIb) *valiendo* (1b)) *es recursivo general. De donde, por el Teorema* II: *una función $\varphi$ definida a partir de funciones y predicados $\Psi$ por aplicaciones de los Esquemas* (I)–(VI), *valiendo* (1) *para las aplicaciones de* (VI), *es recursiva general en $\Psi$*. (Church 1936, Kleene 1936).

DEMOSTRACION. Refundimos (VI) en un esquema (VI′) apropiado para la traducción al formalismo de funciones recursivas, como sigue:

(VI′)
$$\left\{\begin{array}{ll} \pi(x_1, \ldots, x_n, y) = \prod_{s<y} \chi(x_1, \ldots, x_n, s), & (\mathrm{VI}'_1) \\ \tau(z', 0, y) = y, & \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \tau(\pi(x_1, \ldots, x_n, y), \pi(x_1, \ldots, x_n), y'), y), & (\mathrm{VI}'_2) \end{array}\right.$$

donde $\tau(u, v, y)$ es una función auxiliar que se deja indefinida para $u=0$ o $v>0$. (Para otro método sencillo, véase Kleene 1943).

Cerciorémonos primero, informalmente, de que (VI′) es equivalente a (VI). Considérense cualesquiera valores fijos de $x_1, ..., x_n$, y escríbase simplemente "$\chi(y)$" para "$\chi(x_1, ..., x_n, y)$", etc. A título de ilustración, supóngase que para $y=0, 1, 2, ...$ (la primera fila abajo), $\chi(y)$ toma los valores siguientes (segunda fila).

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi(y)$ | 3 | 1 | 2 | 0 | 9 | 0 | 1 | 5 | ... |
| $\pi(y)=\prod_{s<y}\chi(s)$ | 1 | 3 | 3 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |

De acuerdo con (VI), $\varphi=\mu y R(y)=\mu y\,[\chi(y)=0]$, o sea, $\varphi$ es el mínimo valor de $y$ (primera fila) para el cual aparece un 0 en la segunda fila, es decir, 3 en este ejemplo. Ese número 3 es también identificable como el único $y$ para el cual un sucesor (aquí 6) precede inmediatamente a 0 en la tercera fila. Ahora, ($\mathrm{VI}_2'$) da este número y no otro como valor de $\varphi$. Así, sustituyendo $y$ por 3 en la última ecuación y evaluando,

$$\varphi=\tau(\pi(3), \pi(4), 3)=\tau(6, 0, 3)=3.$$

Si sustituimos $y$ por otro número que no sea el 3 en la última ecuación, no nos resulta posible evaluar $\tau$. (Si se cambia el ejemplo de modo que $(\bar{E}y)\,R(y)$, entonces no obtenemos valor para $\varphi$).

Sea ahora $\mathrm{E}_2$ el sistema de ecuaciones obtenido al traducir ($\mathrm{VI}_2'$) mediante el uso, digamos, de $p, t, f, a_1, ..., a_n, b$ en vez de "$\pi$", "$\tau$", "$\varphi$", "$x_1$", ..., "$x_n$", "$y$", respectivamente.

Las proposiciones siguientes (i)–(iv) tratan la situación para cualquier $n$-tuplo fijado $x_1, ..., x_n$, sin usar (1). Para (i) y (ii), $\pi$ ha de ser la función definida a partir de $\chi$ o $R$ por ($\mathrm{VI}_1'$).

(i) *Si* $(Ey)\,R(x_1, ..., x_n, y)$, *entonces* $\mathrm{E}_p^{\pi}, \mathrm{E}_2 \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ *cuando* $x=\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$. (ii) *Si* $\mathrm{E}_p^{\pi}, \mathrm{E}_2 \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ *donde* $\mathbf{x}$ *es un numeral, entonces* $(Ey)\,R(x_1, ..., x_n, y)$ *y* $x=\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$.

Las demostraciones discurren en estrecho paralelo con la explicación informal.

Pero $\pi$ es recursiva primitiva en $\chi$ (# B § 45), por tanto hay un sistema de ecuaciones $\mathrm{E}_1$ que define recursivamente $\pi$ a partir de $\chi$(Teorema II § 54). Podemos elegir $\mathrm{E}_1$ de modo que $p$ sea la letra de función principal, $h$ la letra de función dada, y que las letras de función auxiliares no ocurran en $\mathrm{E}_2$. Supongamos que E es $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$. Entonces, claramente, $\mathrm{E}_h^{\chi}, \mathrm{E} \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ si $\mathrm{E}_p^{\pi}, \mathrm{E}_2 \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$; y la conversa se sigue del Lema IIc § 54 como en la demostración del Lema IId. Usando esto en (i) y (ii), y combinando los resultados en una aserción:

(iii) $\mathrm{E}_h^{\chi}, \mathrm{E} \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ *para cierto numeral* $\mathbf{x}$, *si y sólo si* $(Ey)\,R(x_1, ..., x_n, y)$, *en cuyo caso* $x=\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$.

Usando ahora (1) con (iii), para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$, $\mathrm{E}_h^{\chi}, \mathrm{E} \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ donde $\mathbf{x}$ es un numeral, si y sólo si $x=\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$; esto es, E define recursivamente a partir de $R$ la función $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA IV. Supóngase ahora que $R(x_1, ..., x_n, y)$ es recursivo general. Sea D un sistema de ecuaciones que define recursivamente la función representante $\chi$ de $R$, con $h$ como letra de función principal, y con letras de función auxiliares que no ocurren en E. Que F sea DE. Ahora:

(iv) $F \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ *para algún numeral* $\mathbf{x}$, *si y sólo si* $(Ey) R(x_1, ..., x_n, y)$, *en cuyo caso* $x = \mu y R(x_1, ..., x_n, y)$.

Utilizando Df13 § 56, establecemos este resultado (omitiendo la observación final) en forma simbólica, así:

$$(2) \qquad (Ey) R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (EY) \mathfrak{S}_n(F, x_1, ..., x_n, Y).$$

Sea ahora f el número de Gödel de F. Por la definición de 'el predicado de teoría de números correspondiente' de § 52, $S_n(f, x_1, ..., x_n, y) \equiv \{y$ es el número de Gödel de una entidad Y tal que $\mathfrak{S}_n(F, x_1, ..., x_n, Y)\}$. De donde, $(EY) \mathfrak{S}_n(F, x_1, ..., x_n, Y) \equiv (Ey) S_n(f, x_1, ..., x_n, y)$. Así, (2) da

$$(3) \qquad (Ey) R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (Ey) S_n(f, x_1, ..., x_n, y).$$

Por el Lema III, $S_n$ es recursivo primitivo.

Al establecer el resultado en el teorema, reemplazamos $S_n$ por el predicado $T_n$, definido a partir de él así,

$$T_n(z, x_1, ..., x_n, y) \equiv S_n(z, x_1, ..., x_n, y) \,\&\, (t)_{t <_y} \overline{S}_n(z, x_1, ..., x_n, t).$$

Para $z, x_1, ..., x_n$ dados, $T_n(z, x_1, ..., x_n, y)$ es verdadero para, todo lo más, una $y$ (cfr. *174 § 41). La ventaja de utilizar $T_n$ en vez de $S_n$ como predicado básico de la teoría se apreciará en § 58. Por ## D y E, $T_n$ es también recursivo primitivo. Mediante los correlatos informales de &-elim., *70 § 32 y *149a § 40 (advirtiendo que, dado que $S_n$ es recursivo,

$$S_n(z, x_1, ..., x_n, y) \vee \overline{S}_n(z, x_1, ..., x_n, y)$$

intuicionistamente, como se tratará en §§ 60 y 62),

$$(4) \qquad T_n(z, x_1, ..., x_n, y) \rightarrow S_n(z, x_1, ..., x_n, y),$$

$$(5) \qquad (Ey) T_n(z, x_1, ..., x_n, y) \equiv (Ey) S_n(z, x_1, ..., x_n, y).$$

TEOREMA IV. *Para cada* $n \geq 0$: *Dado cualquier predicado recursivo general* $R(x_1, ..., x_n, y)$, *es posible hallar números* $f$ *y* $g$ *tales que*

$$(6) \qquad (Ey) R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (Ey) T_n(f, x_1, ..., x_n, y),$$

$$(7) \qquad (y) R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (y) \overline{T}_n(g, x_1, ..., x_n, y),$$

*donde* $T_n(z, x_1, ..., x_n, y)$ *sea el particular predicado recursivo primitivo arriba definido. De modo similar con más cuantificadores; por ej., dado un predicado recursivo general* $R(a_1, ..., a_n, x, y)$, *hay un número* $g$ *tal que*

$$(8) \qquad (Ex)(y) R(a_1, ..., a_n, x, y) \equiv (Ex)(y) \overline{T}_{n+1}(g, a_1, ..., a_n, x, y).$$

(Teorema de enumeración, Kleene 1943).

DEMOSTRACION (terminación). La fórmula (6) se sigue de (3) por (5). Para

inferir (7), aplicamos (6) al predicado $\overline{R}(x_1, ..., x_n, y)$, llamando "$g$" a la $f$ correspondiente a este predicado, y transformando el resultado por medio de los correlatos informales de *30 § 26 y *86 § 35 en

$$(y)\,\overline{\overline{R}}(x_1, ..., x_n, y) \equiv (y)\,\overline{T}_n(g, x_1, ..., x_n, y).$$

Dado que $R$ es recursivo general, tenemos $R \vee \overline{R}$, y por tanto (cfr. *49c § 27) $\overline{\overline{R}} \equiv R$. Para (8), aplicamos (7) con $n+1$ como la $n$ de (7), $a_1, ..., a_n, x$ como las $x_1, ..., x_n$, e $y$ como la $y$, y utilizamos el correlato informal de *72 § 33.

DISCUSION. Mediante este teorema, obtenemos una enumeración (con repeticiones) de los predicados con $n$ variables de la forma $(Ey)R(x_1, ..., x_n, y)$, donde $R$ es recursivo general, tomando $z = 0, 1, 2, ...$ en el predicado de $n+1$ variables fijas $(Ey)\,T_n(z, x_1, ..., x_n, y)$ de igual forma. Brevemente, $(Ey)\,T_n(z, x_1, ..., x_n, y)$ 'enumera' los predicados de la forma $(Ey)R(x_1, ..., x_n, y)$ con un $R$ recursivo general. De modo similar,
$(y)\,\overline{T}_n(z, x_1, ..., x_n, y)$ enumera los predicados de la forma $(y)R(x_1, ..., x_n, y)$ con un $R$ recursivo general; etc.– Puesto que $T_n, \overline{T}_n, \overline{T}_{n+1}$, etc., son recursivos primitivos:

COROLARIO. *La clase de los predicados expresables de una forma dada, consistente en una sucesión fija de uno o más cuantificadores prefijados a un predicado $R$, es la misma tanto si se permite un $R$ recursivo general como un $R$ recursivo primitivo.* (Kleene 1943, generalizando un lema de Rosser 1936 pág. 87).

Usamos ahora las enumeraciones anteriores como base para una aplicación del método de la diagonal de Cantor a fin de demostrar el siguiente teorema. Dado un predicado recursivo general $R(x, y)$, y usando (6) para $n = 1$, hay un número $f$ tal que

$$(9) \qquad (Ey)\,R(x, y) \equiv (Ey)\,T_1(f, x, y).$$

Sustituyendo $x$ por $f$ en esta equivalencia,

$$(10) \qquad (Ey)\,R(f, y) \equiv (Ey)\,T_1(f, f, y).$$

De donde, usando el correlato informal de *50a § 27,

$$(11) \qquad (Ey)\,R(f, y) \not\equiv (\overline{Ey})\,T_1(f, f, y).$$

La fórmula (12) del teorema se sigue haciendo uso del correlato informal de *86 § 35. Para demostrar (13) tenemos, haciendo uso de (7),

$$(y)\,R(g, y) \equiv (y)\,\overline{T}_1(g, g, y) \equiv (\overline{Ey})\,T_1(g, g, y) \not\equiv (Ey)\,T_1(g, g, y).$$

Para inferir (14) y (15), dado cualquier $R(x)$ recursivo general, sea $R(x, y) \equiv R(x)\ \&\ y = y$ o $R(x, y) \equiv R(U_1^2(x, y))$ (§ 44), de modo que $R(x, y)$ sea recursivo general y $R(x) \equiv (Ey)\,R(x, y) \equiv (y)\,R(x, y)$.

TEOREMA V (PARTE I). *Dado cualquier predicado recursivo general $R(x, y)$, es posible hallar números $f$ y $g$ tales que*

$$(12) \qquad (Ey)\,R(f, y) \not\equiv (y)\,\overline{T}_1(f, f, y),$$

(13) $$(y)\,R(g,y) \neq (Ey)\,T_1(g,g,y).$$

*A fortiori, dado cualquier predicado recursivo general* $R(x)$, *es posible hallar números* $f$ *y* $g$ *tales que*

(14) $$R(f) \neq (y)\,\overline{T}_1(f,f,y),$$

(15) $$R(g) \neq (Ey)\,T_1(g,g,y).$$

DISCUSION. Por este teorema, $(y)\,\overline{T}_1(x,x,y)$ es un ejemplo de un predicado de la forma $(y)\,R(x,y)$ con un $R$ recursivo que no es expresable en la forma dual $(Ey)\,R(x,y)$ con un $R$ recursivo. Esto es,

$$(x)\,[(y)\,\overline{T}_1(x,x,y) \equiv (Ey)\,R(x,y)]$$

no puede valer para ningún predicado recursivo general $R(x,y)$; y, para un $R(x,y)$ dado, la $f$ de (12) es un valor de $x$ que lo refuta. A fortiori, $(y)\,\overline{T}_1(x,x,y)$ no es tampoco recursivo general (cfr. (14)).

La demostración precedente arriba simplemente a esto: $(Ey)\,T_1(z,x,y)$, para $z = 0, 1, 2, \ldots$, es una enumeración (con repeticiones) de todos los predicados de la forma $(Ey)\,R(x,y)$ con $R$ recursivo. Por el método de la diagonal de Cantor, $(\overline{Ey})\,T_1(x,x,y)$ es un predicado que no está en la enumeración. Este último es equivalente a $(y)\,\overline{T}_1(x,x,y)$.

A partir de la enumerabilidad de todos los sistemas E de ecuaciones, podemos concluir, sin la presente teoría, que los predicados recursivos generales son enumerables, y así también lo son los predicados de la forma $(Ey)\,R(x,y)$ con $R$ recursivo. De donde, por los resultados de Cantor (§ 2), no pueden constituir todos los predicados de la teoría de números. El contenido adicional del presente teorema consiste en que se da un ejemplo de un predicado que no es ni recursivo general ni expresable en la forma $(Ey)\,R(x,y)$ con $R$ recursivo y que es de la forma dual $(y)\,R(x,y)$ con $R$ recursivo; y viceversa.

Para ahorrar espacio, escribimos la parte siguiente de este teorema para predicados de una variable $a$; pero vale igualmente para predicados de $n$ variables $a_1, \ldots, a_n$ para cada $n \geq 1$. En la demostración de (b), hacemos uso de una equivalencia clásica, que es intuicionistamente inútil para nosotros. De acuerdo con ello, etiquetamos (b) con una "C" (cfr. § 37). Los resultados así etiquetados en este capítulo se mantienen todos al nivel de la teoría de números.

TEOREMA V (PARTE II). *Considérense las formas de predicado*

$$R(a) \quad \begin{matrix} (Ex)\,R(a,x) & (x)(Ey)\,R(a,x,y) & (Ex)(y)(Ez)\,R(a,x,y,z) & \ldots \\ (x)\,R(a,x) & (Ex)(y)\,R(a,x,y) & (x)(Ey)(z)\,R(a,x,y,z) & \ldots \end{matrix}$$

*donde el* $R$ *es, para cada una de ellas, recursivo general. Para cada forma con* $k+1$ *cuantificadores* ($k \geq 0$), *hay un predicado expresable* (a) *en la negación de la forma* $((b)^C$ *en la otra forma de* $k+1$ *cuantificadores), pero no en esa forma misma ni en ninguna de las formas con* $\leq k$ *cuantificadores.* Por Parte I, la "C" es innecesaria para $k=0$. (Kleene 1943; Mostowski 1947).

DEMOSTRACION. Tómese, por ejemplo, $k=1$. De (8) (para $n=1$) inferimos

(16) $$(Ex)(y)\,R(g,x,y) \neq (\overline{Ex})(y)\,\overline{T}_2(g,g,x,y),$$

del mismo modo que (11) fue inferida de (6). Así, $(\overline{Ex})(y)\,T_2(a, a, x, y)$ (equivalente clásicamente a $(x)(Ey)\,T_2(a, a, x, y)$, cfr. Teorema 18 § 35) no es expresable en la forma $(Ex)(y)R(a, x, y)$. De modo similar, $(\overline{x})(Ey)T_2(a, a, x, y)$ (equivalente clásicamente a $(Ex)(y)\,\overline{T}_2(a, a, x, y)$) no es expresable en la forma $(x)(Ey)\,R(a, x, y)$. A fortiori, estos predicados no son expresables en ninguna de las tres formas con uno o ningún cuantificador.

TEOREMA VI. *Para cada* $n \geq 0$: (a) *Todo predicado recursivo general* $P(x_1, ..., x_n)$ *es expresable en las dos formas* $(Ey)\,R(x_1, ..., x_n, y)$ *y* $(y)\,S(x_1, ..., x_n, y)$ *donde R y S son recursivos primitivos.* (b)[C] *Recíprocamente, todo predicado expresable en ambas formas, donde R y S son recursivos generales, es recursivo general.* (c) *Un predicado* $P(x_1, ..., x_n)$ *es recursivo general, si y sólo si* $P(x_1, ..., x_n)$ *y* $\overline{P}(x_1, ..., x_n)$ *son ambos expresables en la forma* $(Ey)\,R(x_1, ..., x_n, y)$ *con un R recursivo general, y* $(x_1)...(x_n)\,[P(x_1, ..., x_n) \vee \overline{P}(x_1, ..., x_n)]$. (Kleene 1943, Post 1944, Mostowski 1947).

DEMOSTRACIONES. (a) Tómese $P(x_1, ..., x_n, y) \equiv P(x_1, ..., x_n)\ \&\ y = y$, de modo que $P(x_1, ..., x_n) \equiv (Ey)P(x_1, ..., x_n, y) \equiv (y)P(x_1, ..., x_n, y)$, y aplíquese el Corolario del Teorema IV. (b) Supóngase que $P(x_1, ..., x_n) \equiv (Ey)\,R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (y)\,S(x_1, ..., x_n, y)$. Entonces, por lógica clásica (cfr. *85 § 35), $\overline{P}(x_1, ..., x_n) \equiv (Ey)\,\overline{S}(x_1, ..., x_n, y)$. De acuerdo con la ley clásica de tercero excluido, $P(x_1, ..., x_n) \vee \overline{P}(x_1, ..., x_n)$. Por tanto

$$P(x_1, ..., x_n) \equiv R(x_1, ..., x_n, \mu y\,[R(x_1, ..., x_n, y) \vee \overline{S}(x_1, ..., x_n, y)]),$$

donde el segundo miembro es recursivo general por el Teorema III. (c) La última hipótesis hace a la aserción válida intuicionistamente.

En Kleene 1943, 1944, un predicado era llamado "elemental", si podía ser explícitamente expresado en términos de números naturales constantes y variables, predicados recursivos generales, los operadores $\rightarrow$, &, $\vee$, $\overline{\ }$ del cálculo proposicional, y los cuantificadores, combinados de acuerdo con las reglas sintácticas usuales.

TEOREMA VII. (a) *Todo predicado aritmético* (§ 48) *es "elemental", y* (b) *recíprocamente.* (c) *Todo predicado expresable por medio de cuantificadores prefijados a un predicado recursivo general es expresable en una de las formas del Teorema* V *con un R recursivo general.* (d)[C] *Todo predicado aritmético es expresable en una de las formas del Teorema* V *con un R recursivo general.*

DEMOSTRACIONES. (a) Por # # 1, 2, 14, C (§§ 44, 45), todo predicado explícitamente formado utilizando $+$, $\cdot$, $=$ es recursivo primitivo, y por tanto recursivo general. (b) Por el Teorema VIa y el Corolario del Teorema I § 49. (c) Como $x$ discurre sobre el dominio de los números naturales, el $m+1$-tuplo de funciones recursivas primitivas $(x)_0, ..., (x)_m$ (# 19 § 45) discurre (con repeticiones) sobre el dominio de los $m+1$-tuplos de números naturales. En consecuencia

(17) $\qquad (Ex_0) ... (Ex_m)\,A(x_0, ..., x_m) \equiv (Ex)\,A((x)_0, ..., (x)_m),$

(18) $\qquad (x_0) ... (x_m)\ A(x_0, ..., x_m) \equiv (x)\,A((x)_0, ..., (x)_m).$

Utilizamos estas expresiones para contraer cuantificadores consecutivos del mismo tipo. (d) Por (a), el correlato informal del Teorema 19 § 35, y (c).

OBSERVACION 1. Para cualquier predicado $A(i, x)$,

$$(19) \qquad (i)_{i<a}(Ex)\,A(i,x) \equiv (Ex)\,(i)_{i<a}\,A(i,(x)_i).$$

Mediante la sustitución de $A(i, x)$ por $\bar{A}(i, x)$, y usando (los correlatos informales de) *30, *85, *86, *58 y *49 (cfr. la demostración del Corolario de los Teoremas 8 y 18), inferimos clásicamente el dual

$$(20)^C \qquad (Ei)_{i<a}(x)\,A(i,x) \equiv (x)\,(Ei)_{i<a}\,A(i,(x)_i).$$

(Pero, en general, (20) no vale intuicionistamente, por el Ejemplo 4 § 82).– Sencillamente, por *95 y *77, $(i)_{i<a}(x)\,A(i,x) \equiv (x)\,(i)_{i<a}\,A(i,x)$; y de modo semejante para $(Ei)_{i<a}(Ex)$, $(i)_{i<a}(x)_{x<b}$ y $(Ei)_{i<a}(Ex)_{x<b}$.

Aunque hay una diferencia sustancial entre las nociones 'aritmético' y 'elemental', que requiere para ser salvada dos teoremas básicos (Teoremas I y IV), de ahora en adelante, y con vistas a unificar la terminología, diremos usualmente "aritmético" (incluso cuando tengamos en nuestra mente, de modo primario, la otra noción).

EJEMPLO 1. "Elemental" es usado por Kalmár 1943* en otro sentido, equivalente a lo que sigue. Una función es "elemental", si puede ser explícitamente expresada en términos de números naturales variables, la constante 1, las funciones $+$, $\cdot$ y $[a/b]$, y las operaciones $\sum_{y<z}$ y $\prod_{y<z}$. Extendiendo la noción a predicados, y al caso de funciones y predicados supuestos, al modo familiar, podemos comprobar sucesivamente que los siguientes de nuestra lista ## 1–21 de funciones y predicados recursivos primitivos (§§ 44, 45) son elementales, y los siguientes de nuestros resultados ## A–G valen leyendo "elemental" en lugar de "recursivo primitivo": # 1, # 2, # 13, ## A–C, # 3, # 4, # 9 ($\overline{\text{sg}}(a) = [1/(a+1)]$), # 10, # D, # E, ($\prod_{s\leq t}$ es $\prod_{s<t+1}$), # 15 (la función representante es $\text{sg}[(a+1)/(b+1)]$), # 6 ($a \dot{-} b = \mu c_{c\leq a}[b+c<a \vee a<b)$, # 5, # 7, #8, #11, # 12 ($\text{rs}(a,b) = a \dot{-} b\,[a/b]$), # 14, # F, # 16, # 17, # 19 como una función de $a$ para cualquier $i$ fijado; también a $\beta$-función de Gödel (§ 48).– A continuación, mostramos que (A) *si* $\varphi$ *proviene de* $\psi$, $\chi$ (*de* $\chi$) *por una recursión primitiva* (*Esquema* V)), *y* $\varphi(y, x_2, ..., x_n) \leq \eta(y, x_2, ..., x_n)$, *entonces* $\varphi$ *es elemental en* $\psi, \chi, \eta$, (*en* $\chi, \eta$). En la demostración del Teorema I § 49 Caso (Vb), (B) es de la forma $(Ec)(Ed)\,R(y, x_2, ..., x_n, w, c, d)$, donde $R$ es elemental en $\psi$ y $\chi$, y $(c)(d)[R(y, x_2, ..., x_n, w, c, d) \rightarrow \varphi(y, x_2, ..., x_n) = w]$. Por tanto, $\varphi(y, x_2, ..., x_n) = (\mu t R(y, x_2, ..., x_n, (t)_0, (t)_1, (t)_2))_0$. Así, por # E, bastará hallar un límite elemental en $\mu$ sobre la $t$. Pero, por § 48, podemos elegir $d = (\max(y, a_0, ..., a_y))!$ siendo $a_i = \varphi(i, x_2, ..., x_n)$, de modo que $d \leq D$ siendo $D = (y + \sum_{i\leq y} \eta(i, x_2, ..., x_n))!$, y $c < \prod_{i\leq y} \delta(d, i) = \prod_{i\leq y}(1+(i+1)d) \leq C$ siendo $C = \prod_{i\leq y}(1+(i+1)D)$. Así, podemos tomar $t < 2^E \cdot 3^C \cdot 5^D$ siendo $E = \eta(y, x_2, ..., x_n)$.– Ahora bien, $p_i$ (# 18) es elemental, pues puede hallarse un límite elemental, por ejemplo, $p_i \leq 2^{2^i}$ (= sólo si $i = 0$), como demostramos

mediante inducción por curso-de-valores sobre $i$, así. Lo cual es verdad para $i=0, 1$. para $i \geq 2$, $p_i \leq p_0 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} - 1$ (razonando como en la demostración del teorema de Euclides § 40) $< 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \ldots \cdot 2^{2^{i-1}}$ (usando la hipot. ind.) $= 2^{2^0+2^1+\cdots+2^{i-1}} = 2^{2^i-1} < 2^{2^i}$.– Entonces, los siguientes son elementales: # 19, # 20, (lg $(i, a) \leq a$), # 21. Asimismo (cfr. # G). (B) *si $\varphi$ proviene de $\chi$ por la recursión por curso-de-valores* (3) § 46, *y* $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) \leq \eta(y, x_2, \ldots, x_n)$, *entonces* $\varphi$ *es elemental en* $\chi, \eta$. Pues entonces $\prod_{i<y} p_i^{\eta(i, x_2, \ldots, x_n)}$ es un límite elemental en $\eta$ para $\widetilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n)$ en la recursión primitiva (4) § 46.– Se sigue que los predicados y funciones de teoría de números correspondientes a los metamatemáticos definidos por Dn1–Dn13a § 51 (cfr. Lema 19 § 52) y por Df1–Df15 § 56 (cfr. Lema III) son elementales. Pues las recursiones son usadas en esas definiciones metamatemáticas dentro de la aritmética generalizada sólo para introducir (las funciones representantes de) predicados, y así (B) se aplica –con $\eta = 1$– a cada una de las recursiones correspondientes en la aritmética ordinaria. En particular, $S_n$ (Df13), y por tanto (C) $T_n$ (*precedente Teorema* IV), y $U$ (Df15) *son elementales.* Ello corresponde al resultado de Ilona Bereczki (no publicado, 1949) según el cual (por medio de artificios usados por Kalmár 1943) cada uno de los predicados y funciones de los cuales se mostró, en Kleene 1936, que son recursivos primitivos es, o bien elemental, o bien puede ser reemplazado por uno que sea elemental sin alterar los argumentos de dicho artículo.– Así (D) *Podemos añadir "o un R elemental (en el sentido de Kalmár)" en el Corolario del Teorema* IV.– Kalmár (1943, 1948, 1950, 1950a) usa sus funciones elementales cuando expone el teorema de Gödel y otros resultados que en este libro se exponen haciendo uso de las funciones recursivas primitivas.– Miss Bereczki (1951) muestra que la función recursiva primitiva ${}^b a$ –definida por ${}^0 a = 1$, ${}^{b'} a = a^{({}^b a)}$ (tal que ${}^{b+1} a = \xi_3(b, a)$ §55 ) no es elemental porque ${}^a a$ crece demasiado rápidamente conforme aumenta $a$. Dicha autora obtiene otro ejemplo de una función recursiva primitiva mediante la construcción de una función enumerante recursiva primitiva $\varphi(n, a)$ para las funciones elementales de una variable (cfr. § 55). De aquí se sigue que hay predicados recursivos primitivos no-elementales (de modo similar al Ejemplo 1 § 55).

TEOREMA VIII$^C$. *Para las $V$ y $v$ recursivas primitivas que se definen más abajo, el predicado $M(a, k)$ definido por inducción sobre $k$ de este modo,*

$$\begin{cases} M(a, 0) \equiv V(a), \\ M(a, 2k+1) \equiv (Ex)\, M(v(a, x), 2k), \\ M(a, 2k+2) \equiv (x)\, M(v(a, x), 2k+1), \end{cases}$$

*no es aritmético.* (Kleene 1943).

Kalmár fue el primero en obtener un resultado de este tipo, aparecido en Skolem 1936-37 págs. 86 ss. Cfr. asimismo Wang 1953, Mostowski 1951.

DEMOSTRACION (opcional). En la expresión correspondiente a $S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ (Df13 § 56), reemplacemos "$n'$" por "$(x)_0'$" y "$Nu((y)_{0,1,1}, x_1)$ & ... & $Nu((y)_{0,1,n}, x_n)$" por "$(i)_1 \leq i \leq (x)_0 \; Nu((y)_{0,1,i}, (x)_i \dot{-} 1)$". El resultado es un predicado recursivo primitivo $S(z, x, y)$ tal que

$$(21) \qquad S(z, 2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n'} \cdot p_{n'}^{u}, y) \equiv S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Sea $T(z,x,y) \equiv S(z,x,y) \,\&\, (t)_t <_y \bar{S}(z,x,t)$. Entonces

$$T(z, 2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n'} \cdot p_{n'}^{u}, y) \equiv T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y). \tag{22}$$

Sea ahora $V(a) \equiv T((a)_1 \dot{-} 1, a, (a)_{(a)_0'} \dot{-} 1)$. Entonces, para $n \geq 1$,

$$V(2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n'} \cdot p_{n'}^{y'}) \equiv T_n(x_1, x_1, \ldots, x_n, y). \tag{23}$$

Sea $\upsilon(a,x) = a * 2^{x'}$ (cfr. # 21 § 45). Ahora, $M(a,k)$ toma, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, los valores $V(a)$, $(Ex)\,V(a * 2^{x'})$, $(x)(Ey)\,V(a * 2^{x'}) * 2^{y'})$, ... Supóngase que $M(a,k)$ fuese aritmético. Entonces, según el Teorema VIId, sería expresable en una de las formas del Teorema V. A título de ilustración, supóngase $M(a,k) \equiv (Ex)\,R(a,k,x)$ para un $R$ recursivo. Entonces, $(Ex)R(2^2 \cdot 3^{a'}, 2, x) \equiv M(2^2 \cdot 3^{a'}, 2) \equiv (x)(Ey)V(((2^2 \cdot 3^{a'}) * 2^{x'}) * 2^{y'}) \equiv (x)(Ey)\,V(2^2 \cdot 3^{a'} \cdot 5^{x'} \cdot 7^{y'}) \equiv (x)(Ey)T_2(a,a,x,y)$. Pero $(Ex)R(2^2 \cdot 3^{a'}, 2, x)$ es de la forma $(Ex)\,R(a,x)$ con $R$ recursivo; y, en la demostración del Teorema V Parte II, veíamos que $(x)(Ey)\,T_2(a,a,x,y)$ no es expresable en esa forma.

El lector puede, si lo desea, pasar a §§ 60–62, que no dependen, excepto incidentalmente, de §§ 58 y 59. Pero § 58 contiene un resultado que es fundamental para §§ 63–66 y para más adelante.

§ 58. **Forma normal, teorema de Post.** Haciendo uso de Df13 y Df15 (§ 56), podemos restablecer la definición de 'función recursiva general' (§§ 55, 54) de la forma siguiente. Una función $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es recursiva general, si y sólo si existe un sistema E de ecuaciones (sin letras de función dadas) tal que

$$(x_1) \ldots (x_n)\,(EY)\ \mathfrak{S}_n(\mathrm{E}, x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Y}), \tag{24}$$

$$(x_1) \ldots (x_n)\,(\mathrm{Y})\,[\mathfrak{S}_n(\mathrm{E}, x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Y}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathrm{Y}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)]. \tag{25}$$

Al pasar de la aritmética generalizada a la aritmética ordinaria mediante la numeración de Gödel, $\mathfrak{S}_n$ se convierte en $S_n$, $\mathfrak{U}$ se convierte en $U$, E se convierte en su número de Gödel $e$, y (24) y (25) dan

$$(x_1) \ldots (x_n)\,(Ey)\,S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y), \tag{26}$$

$$(x_1) \ldots (x_n)\,(y)\,[S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow U(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)]. \tag{27}$$

De acuerdo con el Lema III, $U$, así como $S_n$, es recursiva primitiva.

Se sigue de (26) y (27) que la función $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ puede ser expresada en términos del número $e$, así,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = U(\mu y S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)). \tag{28}$$

Ahora, por (5) y (4) § 57, (26) y (27) y en consecuencia también (28) permanecen válidos cuando $S_n$ es reemplazado por $T_n$.

TEOREMA IX. *Para cada* $n \geq 0$: *Dada cualquier función recursiva general* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, *se puede hallar un número* $e$ *tal que*

$$(x_1) \ldots (x_n)\,(Ey)\,T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y), \tag{29}$$

(30) $$\varphi(x_1, ..., x_n) = U(\mu y\, T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)),$$

(31) $$(x_1) \ldots (x_n)\,(y)\,[T_n(e, x_1, ..., x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, ..., x_n)].$$

*donde* $T_n(z, x_1, ..., x_n, y)$ *y* $U(y)$ *son el predicado y la función recursivos primitivos particulares anteriormente definidos.* (Teorema de forma normal, Kleene 1936, 1943).

La ventaja de usar $T_n$ en lugar de $S_n$ consiste en que (31) vale para cualquier número $e$ tal que valen (29) y (30) (mientras que (26) y (28) pueden valer, y (27) ser falso, cuando $e$ es el número de Gödel de un sistema E de ecuaciones, que carece de la propiedad de consistencia, para definir recursivamente a $\varphi$).

Decimos ahora, para cualquier función recursiva general $\varphi$, que cualquier número $e$ (sea o no el número de Gödel de un sistema E de ecuaciones que define recursivamente a $\varphi$) tal que valen (29) y (30) (y por tanto (31)) *define recursivamente a* $\varphi$ o es un *número de Gödel de* $\varphi$.

Un número $e$ *define recursivamente* (o es un *número de Gödel de*) un predicado recursivo general $P(x_1, ..., x_n)$, si define recursivamente la función representante de $P$. En este caso,

(32) $$P(x_1, ..., x_n) \equiv (Ey)\,[T_n(e, x_1, ..., x_n, y)\ \&\ U(y) = 0] \equiv (y)\,[T_n(e, x_1, ..., x_n, y) \to U(y) = 0].$$

Para demostrar constructivamente que una función $\varphi$ es recursiva general, es necesario exhibir (o aducir un método para obtener) ecuaciones E que definan recursivamente a $\varphi$. Así, dar efectivamente una función recursiva general significa dar un E, o bien, ahora, un número de Gödel $e$.

La teoría de los números de Gödel de funciones recursivas se tratará en el capítulo siguiente (§ 65).

EJEMPLO 1. ¿Es expresable toda función recursiva general $\varphi(x_1, ..., x_n)$ en la forma $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$, siendo $R$ recursivo primitivo (y valiendo (1b))? INDICACION: Utilícese Ejemplo 1 § 55 y # E § 45. (Un método diferente fue utilizado por Post 1946a).– Llámese a una función $\theta(y)$ "universal" si, para cada función recursiva general $\varphi(x_1, ..., x_n)$, existe un predicado recursivo primitivo $R(x_1, ..., x_n, y)$, valiendo (1b), tal que $\varphi(x_1, ..., x_n) = \theta(\mu y R(x_1, ..., x_n, y))$; y llámese a $\theta(y)$ "de amplia oscilación" si $(x)\,(z)\,(Ey)_{y > z}\,\theta(y) = x$. Markov 1947c, 1949, muestra que el ser de amplia oscilación es una condición suficiente y clásicamente necesaria para que una función recursiva primitiva $\theta$ sea universal. Kuznécov 1950 anuncia ulteriores resultados concernientes a tales funciones $\theta$.

COROLARIO. *Toda función recursiva general* $\varphi$ *es definible mediante aplicaciones de los Esquemas* (I)–(VI), *valiendo* (1) *para las aplicaciones de* (VI). (Conversa del Teorema III, para $\Psi$ vacío).

A efectos de simplicidad, al comenzar con el Teorema IV, hemos confinado nuestra atención a funciones y predicados absolutamente recursivos generales, esto es, recursivos en $\psi_1, ..., \psi_l$ para $l = 0$. Ahora extenderemos la teoría a la recursividad general relativa, esto es, para $l > 0$.

Hallaremos que el Teorema IX y los resultados anteriores valen si, en vez de un predicado recursivo primitivo $T_n$, hacemos uso de uno recursivo primitivo

en $\psi_1, ..., \psi_l$. Operemos primero con el caso en que $l = 1$ y $\psi (= \psi_1)$ sea una función de una variable ($m_1 = 1$).

Por definición (§ 55), $\varphi$ es recursiva general en $\psi$, si hay un sistema E de ecuaciones que define recursivamente a $\varphi$ a partir de $\psi$ (§ 54). Si hay un tal E, entonces podemos elegir uno en el que la letra de función dada g (con número de Gödel $g$) sea la primera en la enumeración de letras de función que se haya fijado.

Establecemos ahora modificaciones apropiadas de Df12 y Df13 § 56.

Df12* (para $l = m_1 = 1$). (Z es un sistema de ecuaciones, e) Y es una *deducción* a partir de $E_g^{\psi}$, Z (por R1 y R2). (Abreviatura: $\mathfrak{D}^{\psi}(Z, Y)$).

*0. Z es un sistema de ecuaciones; y para algún número natural $u_1$, Y es $(g(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}$, donde $u = \psi(u_1)$.
$SE(z) \& y = 2 \exp 2^{15} \cdot (3 \exp 2^g \cdot 3^{(y)_{0,1,1}}) \cdot 5^{(y)_{0,2}} \&$
$(Eu_1)_{u_1 < y} [Nu((y)_{0,1,1}, u_1) \& Nu((y)_{0,2}, \psi(u_1))]$.

1–3. Como 1–3 Df12, salvo que se lee "a partir de $E_g^{\psi}$, Z" en lugar de "a partir de Z".

Df13*. (para $l = m_1 = 1$). Como Df13, leyendo "a partir de $E_g^{\psi}$, Z" en lugar de "a partir de Z", y "$D^{\psi}(z, y)$" en lugar de "$D(z, y)$". Abreviatura: $\mathfrak{S}_n^{\psi}(Z, x_1, ..., x_n, Y)$).

El razonamiento usado anteriormente para hacer ver que $D(z, y)$ y $S_n(z, x_1, ..., x_n, y)$ son recursivos primitivos (Lema III § 56) muestra ahora que $D^{\psi}(z, y)$ y $S_n^{\psi}(z, x_1, ..., x_n, y)$ son recursivos primitivos en $\psi$; y, en lugar de (26) y (27) para una función recursiva general $\varphi(x_1, ..., x_n)$, tenemos ahora, para una función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ recursiva general en $\psi$,

(33) $$(x_1) ... (x_n) (Ey) S_n^{\psi}(e, x_1, ..., x_n, y),$$

(34) $$(x_1) ... (x_n) (y) [S_n^{\psi}(e, x_1, ..., x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, ..., x_n)].$$

Podríamos continuar como antes; pero mostraremos también que la dependencia con respecto a $\psi$ puede darse de una forma especial.

La función de curso-de-valores $\widetilde{\psi}(y) (= \prod_{i<y} p_i^{\psi(i)}$, § 46 (1)) para $\psi$ es recursiva primitiva en $\psi$ (## # A, B, 3, 18, §§ 44, 45).

Usando § 46 (2), $\psi(u_1)$ en 0Df12* puede ser escrita como $(\widetilde{\psi}(y))_{u_1}$, ya que $u_1 < y$, o incluso como $(\widetilde{\psi}(v))_{u_1}$ para cualquier $v \geq y$. Sea $D^1(w, z, y)$ el predicado obtenido en lugar de $D_1^{\psi}(z, y)$ cuando en 0Df12* reemplazamos $\psi(u_1)$ por $(w)_{u_1}$. Entonces, $D^1$ es recursivo primitivo; y, mediante inducción por curso-de-valores sobre $y$ (con casos correspondientes a las cuatro cláusulas en las definiciones recursivas de $D^1$ y $D^{\psi}$, cfr. § 52),

(35) $$(v)_{v \geq y} [D^1(\widetilde{\psi}(v), z, y) \equiv D^{\psi}(z, y)].$$

Usando $D^1(w, z, y)$ en lugar de $D^{\psi}(z, y)$ en Df13*, obtenemos un predicado recursivo primitivo $S_n^1(w, z, x_1, ..., x_n, y)$ tal que

(36) $$(v)_{v \geq y} [S_n^1(\widetilde{\psi}(v), z, x_1, ..., x_n, y) \equiv S_n^{\psi}(z, x_1, ..., x_n, y)].$$

Definimos $T_n^1$ y $T_n^\psi$ como sigue,

$$T_n^1(w, z, x_1, ..., x_n, y) \equiv S_n^1(w, z, x_1, ..., x_n, y) \,\&\, (t)_{t<y}\, \overline{S}_n^1(w, z, x_1, ..., x_n, t),$$
$$T_n^\psi(z, x_1, ..., x_n, y) \equiv T_n^1(\widetilde{\psi}(y), z, x_1, ..., x_n, y).$$

Entonces, $T_n^1$ es recursivo primitivo, y $T_n^\psi$ es recursivo primitivo en $\psi$. Usando (36) primero con $y, y$ y luego con $y, t$ como las $v, y$,

(37) $T_n^\psi(z, x_1, ..., x_n, y) \equiv S_n^\psi(z, x_1, ..., x_n, y) \,\&\, (t)_{t<y}\, \overline{S}_n^\psi(z, x_1, ..., x_n, t).$

Ahora podemos continuar con (37) a partir de (33) y (34), como hicimos antes a partir de (26) y (27) con la definición de $T_n$ (el precedente (4) de § 57).

Nuestras aserciones han de ser entendidas aquí intuicionistamente como consecuencias de la hipótesis de que se pueda disponer, cuando así sea requerido, de valores particulares de $\psi$. Esta hipótesis se justifica, p. ej., expresando un valor dado $\psi(u_1)$ como $(\widetilde{\psi}(v))_{u_1}$ para un dado $v > u_1$, que requiere los otros valores entre $\psi(0), ..., \psi(v-1)$; y por ello

$$(t)_{t<y}\, [S_n^\psi(z, x_1, ..., x_n, t) \vee \overline{S}_n^\psi(z, x_1, ..., x_n, t)]$$

para un $y$ dado, que requiere los valores $\psi(0), ..., \psi(y-1)$ (cfr. la demostración de (5)).

Los resultados obtenidos en § 57, comenzando con el Teorema IV, se extienden de modo similar.

El caso de cualesquiera $l$ funciones de $m_1, ..., m_l$ variables, respectivamente, puede reducirse al caso $l = m_1 = 1$ (tomando $\psi_i^*(x) = \psi_i((x)_1, ..., (x)_{mi})$, $\psi = p_1^{\psi_1^*} ... p_l^{\psi_l^*}$); pero también puede ser tratado directamente con facilidad. Por ejemplo, si $l = m_1 = 2$, $m_2 = 0$, definimos la función de curso-de-valores $\widetilde{\psi}$ para $\psi_1$ (en ambas variables) así, $\widetilde{\psi}_1(y,z) = \prod_{i<y} p_i^{\exp(\prod_{j<z} p_j^{\exp \psi_1(i,j)})}$, de modo que $\psi_1(s,t) = (\widetilde{\psi}_1(y,z))_{s,t}$ si $s<y \,\&\, t<z$. Definimos $\widetilde{\psi}_2 = \psi_2$. Df12* y Df13* se formulan para $l = m_1 = 2$, $m_2 = 0$, e introducimos sucesivamente predicados $D^{\psi_1, \psi_2}$, $S_n^{\psi_1, \psi_2}$, $D^{2,0}$, $S_n^{2,0}$, $T_n^{2,0}$, y tenemos

$$T_n^{\psi_1, \psi_2}(z, x_1, ..., x_n, y) \equiv T_n^{2,0}(\widetilde{\psi}_1(y,y), \widetilde{\psi}_2, z, x_1, ..., x_n, y).$$

En general, nos encontramos con un predicado recursivo primitivo $T_n^{m_1 ... m_l}$ de $n + l + 2$ variables y con un predicado $T_n^{\psi_1 ... \psi_l}$ de $n+2$ variables que es recursivo primitivo en $\psi_1, ..., \psi_l$.

Cuando $\Psi$ es una lista de $l$ funciones y predicados, se aplica lo que precede tomando como $\psi_1, ..., \psi_l$ la lista, obtenida a partir de $\Psi$, al reemplazar los predicados (si los hay) por sus funciones representantes (cfr. final de § 55); y, entonces, como $T_n^\Psi$, escribimos también $T_n^{\psi_1, ..., \psi_l}$.

La definición de 'predicado aritmético' (§ 48) se adapta a $l > 0$ añadiendo las funciones $\psi_1, ..., \psi_l$ a las funciones iniciales $+$ y $\cdot$; la de 'predicado elemental' (precedente Teorema VII § 57) sustituyendo "recursivo general" por "recursivo general en $\Psi$". ('Uniformidad' puede definirse de la manera habitual, y las relaciones resultantes en nuestros teoremas son uniformes cuando las dadas correspondientes son uniformes).

TEOREMA X. *Supóngase que* $l, m_1, ..., m_l$ *sean números fijos* $\geq 0$, *y que* $\Psi$

*sea l funciones y predicados de* $m_1, \ldots, m_l$ *variables, respectivamente. Entonces, los Teoremas* I, IV–IX *y sus corolarios valen enteramente leyendo "recursivo general en* $\Psi$", *"recursivo primitivo en* $\Psi$", *"aritmético en* $\Psi$", *"elemental en* $\Psi$", *"*$T_n^{\Psi}$", *"*$V^{\Psi}$", *"*$M^{\Psi}$", *en lugar de "recursivo general", "recursivo primitivo", "aritmético", "elemental", "*$T_n$", *"*$V$", *"*$M$", *respectivamente (con U y* $\upsilon$ *sin cambiar).*

Usamos asteriscos para citar los teoremas I, IV–IX así extendidos. Por ejemplo: TEOREMA IX*. *Para cada* $n \geq 0$: *Dada cualquier función* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *recursiva general en* $\Psi$, *puede hallarse un número e tal que*

$$(38) \qquad (x_1) \ldots (x_n)\,(Ey)\,T_n^{\Psi}(e, x_1, \ldots, x_n, y),$$

$$(39) \qquad \varphi(x_1; \ldots, x_n) = U(\mu y T_n^{\Psi}(e, x_1, \ldots, x_n, y)),$$

$$(40) \qquad (x_1) \ldots (x_n)\,(y)\,[T_n^{\Psi}(e, x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow U(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)],$$

*donde* $U(y)$ *es la función recursiva primitiva, y* $T_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ *el predicado recursivo primitivo en* $\Psi$, *anteriormente definidos; p. ej., para* $l = m_1 = 1$, $T_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv T_n^1(\widetilde{\psi}(y), z, x_1, \ldots, x_n, y)$ *donde* $T_n^1(w, z, x_1, \ldots, x_n, y)$ *es el predicado recursivo primitivo particular que antes se definió.*

De un número *e* tal que valen (38) y (39) (y por tanto (40)) se dice que *define recursivamente a* $\varphi$ *en* (o *a partir de*) $\Psi$ o que es un *número de Gödel de* $\varphi$ *a partir de* $\Psi$ o *del* funcional $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$. Como antes, la noción se extiende al predicado $P$ que tiene a $\varphi$ por función representante.

COROLARIO. (a) *Todo predicado P recursivo general en predicados aritméticos* $\Psi$, *es aritmético. (De modo similar, si P es recursivo general en* $\Psi, \Theta$, *y los* $\Psi$ *son aritméticos, entonces P es aritmético en* $\Theta$). (b)[C] *El predicado M (a, k) del Teorema* VIII *no es recursivo general en predicados aritméticos algunos.*

DEMOSTRACION DE (a). Según el Teorema VI* (a), $P$ es expresable por medio de un cuantificador prefijado a un predicado $R$ recursivo primitivo en $\Psi$. Pero, por el Corolario del Teorema I*, $R$ es entonces aritmético en $\Psi$; o sea, puesto que los $\Psi$ son aritméticos, $R$ y por tanto $P$ son aritméticos.

Según la definición de "predicado elemental" (precedente Teorema VII § 57), las recursiones generales eran aplicadas sólo antes de las operaciones lógicas. El significado del Corolario (a) es que, al permitir operaciones recursivas generales a todos los niveles (esto es, intercaladas de alguna manera con las operaciones lógicas), no nos vemos llevados a una clase más amplia de predicados.

Es natural preguntar qué sucede precisamente con los predicados que se hallan situados en un lugar dado en la escala de la Parte II del Teorema V (cfr. Teorema VII (d)) cuando les son aplicados esquemas recursivos generales.

La distinción (para $k > 0$) entre las dos formas de $k$-cuantificadores se pierde cuando se aplican operaciones recursivas primitivas. Por ejemplo, aun cuando $(Ex)\,T_1(a, a, x)$ no es expresable en la otra forma de un-cuantificador $(x)\,R(a, x)$, su negación $\overline{(Ex)}\,T_1(a, a, x)$ es recursiva primitiva en ella (# D § 45), y presupone esa otra forma (cfr. *86 § 35). Para cualquier predicado $P(a)$, el predicado representante $P(a, w)$ (§ 41) de la función representante de $P(a)$ (§ 45) puede ser expresado así,

$$(41) \qquad P(a, w) \equiv \{P(a) \,\&\, w = 0\} \vee \{\overline{P}(a) \,\&\, w = 1\}.$$

Que es recursivo primitivo en $P(a)$. Cuando $P(a) \equiv (Ex)\, T_1\,(a, a, x)$, $P(a, w)$ no es expresable en ninguna de las formas de un-cuantificador: p. ej., si $P(a, w) \equiv (x)\, R\,(a, w, x)$, entonces $(x)\, R\,(a, 0, x) \equiv P(a, 0) \equiv P(a) \equiv (Ex)\, T_1\,(a, a, x)$, lo que contradice el Teorema V si $R$ es recursivo.

Mostowski 1948a da (clásicamente) un ejemplo de un predicado que, (por (b) del siguiente teorema) es recursivo general en predicados de las formas de 1-cuantificador, pero que no puede ser expresado en términos de predicados de las formas de 1-cuantificador por las operaciones del cálculo proposicional.

El teorema y el corolario siguientes son de Post, sobre la base de un resumen (1948), del cual tuvo conocimiento el autor tras haber elaborado la presente exposición (en 1949).

TEOREMA XI$^C$. (a) *Si un predicado $P$ es recursivo general en predicados $Q_1, ..., Q_l$ de las formas de k-cuantificadores del Teorema* V, *entonces $P$ es expresable en las dos formas de $k + 1$-cuantificadores, y* (b) *recíprocamente.*

La demostración del Teorema VI (b) establece el presente (b) si, la releemos haciendo que $R$ y $S$ revistan ahora formas apropiadas de $k$-cuantificadores. La demostración de (a) se completará siguiendo los lemas.

LEMA IV$^C$. *El predicado representante de la función representante de un predicado con una cualquiera de las formas de k-cuantificadores, es expresable en la forma de $k + 1$-cuantificadores que empiece por existencia.*

DEMOSTRACION DEL LEMA IV. Por ejemplo, supóngase $P(a) \equiv (x)(Ey) R\,(a, x, y)$ con $R$ recursivo. Entonces

$$P(a, w) \equiv \{(x)\,(Ey)\, R\,(a, x, y)\ \&\ w = 0\} \vee \{(\bar{x})\,(Ey)\, R\,(a, x, y)\ \&\ w = 1\} \text{ (por (41))}$$

$$\equiv \{(x_1)\,(Ey_1)\, R\,(a, x_1, y_1)\ \&\ w = 0\} \vee \{(Ex_2)\,(y_2)\, \bar{R}\,(a, x_2, y_2)\ \&\ w = 1\}$$

(cfr. *85, *86).

$$\equiv (Ex_2)\,(x_1)\,(y_2)\,(Ey_1)\,[\{R\,(a, x_1, y_1)\ \&\ w = 0\} \vee \{\bar{R}\,(a, x_2, y_2)\ \&\ w = 1\}]$$

(cfr. *89–*92)

$$\equiv (Ex)\,(y)\,(Ez)\,[\{R\,(a, (y)_0, z)\ \&\ w = 0\} \vee \{\bar{R}\,(a, x, (y)_1)\ \&\ w = 1\}] \text{ (por (18))}.$$

La última expresión es de la forma $(Ex)\,(y)\,(Ez)\, R\,(a, w, x, y, z)$ con $R$ recursivo. (Este lema, y el siguiente, podrían ser asimismo demostrados con generalidad al principio).

LEMA V. *Sea $\tilde{\psi}(a_1, ..., a_m)$ la función de curso-de-valores para $\psi(a_1, ..., a_m)$. Si el predicado representante de $\psi(a_1, ..., a_m)$ es expresable en la forma de $k + 1$-cuantificadores que empiece por existencia, también lo es el predicado representante de $\tilde{\psi}(a, ..., a)$.*

DEMOSTRACION DEL LEMA V. Por ejemplo, tómese $m = k = 1$. Por hipótesis, $\psi(a) = w \equiv (Ex)\,(y)\, Q\,(a, w, x, y)$, con $Q$ recursivo. Ahora,

$$\tilde{\psi}(a) = w \equiv w = \prod_{i < a} p_i^{(w)_i}\ \&\ (i)_i < a\ \psi(i) = (w)_i$$

$$\equiv w = \prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \,\&\, (i)_i <_a (Ex)_{<a}\,(y)_{<a}\, Q\,(i,(w)_i,x,y)$$

$$\equiv w = \prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \,\&\, (Ex)_{<a}\,(y)_{<a}\,(i)_i <_a Q\,(i,(w)_i,(x)_i,y) \qquad \text{(por Observación 1 § 57)}$$

$$\equiv (Ex)_{<a}\,(y)_{<a}\,\{w = \prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \,\&\, (i)_i <_a Q\,(i,(w)_i,(x)_i,y)\} \qquad \text{(cfr. *91, *89)}$$

La última expresión es de la forma $(Ex)_{<a}\,(y)_{<a}\,R\,(a,w,x,y)$ con $R$ recursivo.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA XI (a). Por ejemplo, tómese $l=m=k=1$. La hipótesis de que $P$ es recursivo general en $Q$ significa (§ 55) que $P$ es recursivo general en la función representante $\psi$ de $Q$. Según los Lemas IV y V, $\widetilde{\psi}(a)=w \equiv (Ex)_{<a}\,(y)_{<a}\,R\,(a,w,x,y)$, con $R$ recursivo. Mostramos primero que $P(a)$ es expresable en la forma de dos-cuantificadores que empiezan por generalidad. Usando el Teorema VI* (a) con su demostración a partir del Teorema IV* (7),

$$P(a) \equiv (t)\,\overline{T}^1_1\,(\widetilde{\psi}(t),g,a,t) \equiv (t)_{<s}\,[\widetilde{\psi}(t)=(s) \to \overline{T}^1_1\,(s,g,a,t)]$$

$$\equiv (t)_{<s}\,[(Ex)_{<t}\,(y)_{<t}\,R\,(t,s,x,y) \to \overline{T}^1_1\,(s,g,a,t)]$$

$$\equiv (t)_{<s}\,(x)_{<t}\,(Ey)_{<t}\,[R\,(t,s,x,y) \to \overline{T}^1_1\,(s,g,a,t)] \qquad \text{(cfr. *96, *98)}$$

$$\equiv (x)_{<s}\,(Ey)_{<s}\,[R\,((x)_0,(x)_1,(x)_2,y) \to \overline{T}^1_1\,((x)_1,g,a,(x)_0) \qquad \text{(por (18))},$$

que es de la forma deseada. Para expresar $P(a)$ en la otra forma de 2-cuantificadores, tenemos, usando similarmente Teorema IV* (6),

$P(a) \equiv (Et)_{<s}\,\overline{T}^1_1\,(\widetilde{\psi}(t),f,a,t) \equiv (Et)_{<s}\,(Es)_{<s}\,[\widetilde{\psi}(t)=s \,\&\, T^1_1\,(s,f,a,t)]$, etc.

COROLARIO$^C$. *Para cada una de las formas de $k+1$-cuantificadores, el predidado del Teorema* V (b) *que es expresable en la otra forma de $k+1$-cuantificadores pero no en esa misma, no es recursivo en predicados expresables en las formas con $k$ (o menos) cuantificadores.*

Reemplazando en las formas del Teorema V (b) "recursivo general" por "recursivo general en $\Psi$", obtenemos un Teorema XI* (con corolario).

***§ 59. Funciones recursivas generales y formalismo de teoría de números.** En esta sección, "(i)"–"(vii)" se referirán a § 41.

Decimos que un predicado de teoría de números $P(x_1,\ldots,x_n)$ es *resoluble* en un sistema formal (o *decidible dentro* del sistema), si hay una fórmula $P(x_1,\ldots,x_n)$ numeralmente decidible (cfr. (iv)), sin otras variables libres que las distintas variables $x_1,\ldots,x_n$, tal que, para cada $n$-tuplo $x_1,\ldots,x_n$ de números naturales,

(viii) $$P(x_1,\ldots,x_n) \equiv \vdash P(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n).$$

En este caso, $P(x_1,\ldots,x_n)$ *resuelve* $P(x_1,\ldots,x_n)$ (con la obvia correspondencia entre variables formales y variables intuitivas).

Una función de teoría de números $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ es *precisable* en un sistema formal (o *calculable dentro* del sistema) si hay una fórmula $P(x_1,\ldots,x_n,\ w)$ –sin más variables libres que las distintas variables $x_1,\ldots,x_n,\ w$– y tal que, para cada $x_1,\ldots,x_n,\ w$,

(ix) $$\varphi(x_1, ..., x_n) = w \equiv \vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w}).$$

En este caso, $\mathrm{P}(x_1, ..., x_n, w)$ *precisa* $\varphi(x_1, ..., x_n)$.

TEOREMA 32. *Sea S el sistema formal de teoría de números del Capítulo* IV *(o el sistema de Robinson descrito en el Lema* 18b § 49*). Si S es simplemente consistente, entonces:* $\{\varphi$ *es recursiva general*$\} \equiv \{\varphi$ *es numeralmente representable en S*$\} \equiv \{\varphi$ *es precisable en S*$\}$.

DEMOSTRACION. Establecemos tres implicaciones.

(a) *Si* $\varphi$ *es recursiva general, entonces* $\varphi$ *es numeralmente representable en S.*
Por el Teorema IX § 58, hay un número $e$ para (29) y (30).
Haciendo uso de (29) y de la definición de $T_n$ que precede al Teorema IV § 57,

(42) $$\mu y T_n(e, x_1, ..., x_n, y) = w \equiv$$
$$S_n(e, x_1, ..., x_n, w) \,\&\, (z)_z <_w \overline{S}_n(e, x_1, ..., x_n, z).$$

Por el Corolario del Teorema 27 § 49, puesto que $S_n(z, x_1, ..., x_n, w)$ es recursivo primitivo, es numeralmente expresable por una fórmula $\mathrm{S}(z, x_1, ..., x_n, w)$. Demostraremos que la fórmula

$$\mathrm{S}(\boldsymbol{e}, x_1, ..., x_n, w) \,\&\, \forall z\,(z <_w \supset \neg\, \mathrm{S}(\boldsymbol{e}, x_1, ..., x_n, z)),$$

a la que llamamos "$\mathrm{M}(x_1, ..., x_n, w)$", representa numeralmente a $\mu y T_n(e, x_1, ..., x_n, y)$. Sea $x_1, ..., x_n$ cualquier $n$-tuplo fijado. Al objeto de establecer (v) para M, supóngase que $\mu y T_n(e, x_1, ..., x_n, y) = w$. Entonces, usando (42), y (E) y (C) de § 41 con (i) y (ii) para S, $\vdash \mathrm{M}(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$. Así tenemos (v) para M. Pero, entonces, tenemos también (vi) por *174a (estando $\boldsymbol{w}$ por la t). Por tanto, $\mu y T_n(e, x_1, ..., x_n, y)$ es numeralmente representable.

Por el Teorema 27, puesto que $U(y)$ es recursiva primitiva, es numeralmente representable.

Por el razonamiento del Caso (IV) en la demostración del Teorema 27, la función compuesta $U(\mu y T_n(e, x_1, ..., x_n, y))$, esto es (por (30)), $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es numeralmente representable.

En esta demostración, aparte del cálculo de predicados, de los Axiomas 14–21, de la propiedad de reemplazo de la igualdad, y de resultados ya empleados en la obtención del Teorema 27, sólo hemos utilizado (E) y *174a (con el numeral $\boldsymbol{w}$ estando por $t$). Así pues, utilizando los Lemas 18a § 41 y 18b § 49, la implicación (a) vale también para el sistema formal de Robinson.

(b) *Si S es simplemente consistente, y* $\varphi$ *es numeralmente representable en S, entonces* $\varphi$ *es precisable en S* (*y cualquier fórmula* P *que represente numeralmente a* $\varphi$ *precisa a* $\varphi$*, según* § 41*, es numeralmente decidible*)).

Considérense cualesquiera $x_1, ..., x_n$ fijadas. Tenemos (v) por hipótesis. Para establecer la conversa, supóngase que $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$. Ahora
$\varphi(x_1, ..., x_n) = w \vee \varphi(x_1, ..., x_n) \neq w$ (cfr. *158 § 40). Pero si
$\varphi(x_1, ..., x_n) \neq w$, entonces, usando (vii), contradecimos la consistencia simple.

(c) *Si* $\varphi$ *es precisable en S, entonces* $\varphi$ *es recursiva general.*

Supóngase que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es precisada por la fórmula $P(x_1, ..., x_n, w)$. Si $S$ es el sistema de teoría de números en su totalidad, sea $Pf_P$ el predicado recursivo primitivo correspondiente a $\mathfrak{Pf}_P$ por la numeración de Gödel (cfr. Dn13a § 51 y Lema 19 § 52, o Teorema 31 §52). Si $S$ es el sistema de Robinson (Lema 18b), hemos de hacer en primer lugar los cambios apropiados en Dn8. Ahora, $(x_1)...(x_n)(Ey)Pf_P(x_1,...,x_n), (y)_0, (y)_1)$ y $\varphi(x_1,...,x_n)=(\mu y Pf_P(x_1,...,x_n, (y)_0, (y)_1))_0$. Por tanto, haciendo uso del Teorema III § 57, $\varphi$ es recursiva general.

COROLARIO. *Sujetándose a las hipótesis del teorema, y si* $(x_1) ... (x_n) [P(x_1, ..., x_n) \vee \overline{P}(x_1, ..., x_n)]$: *{P es recursivo general}* $\equiv$ *{P es numeralmente expresable en S}* $\equiv$ *{P es resoluble en S}*.

DEMOSTRACION. Sea $\varphi$ la función representante de $P$. Establecemos cuatro implicaciones,

*{P es recursivo general}* $\underset{(d)}{\longrightarrow}$ *{$\varphi$ es numeralmente representable en S}*
$\underset{(e)}{\longrightarrow}$ *{P es numeralmente expresable en S}*
$\underset{(f)}{\longrightarrow}$ *{P es resoluble en S (y una fórmula P que exprese numeralmente P resuelve $\overline{P}$)}*
$\underset{(g)}{\longrightarrow}$ *{P es recursivo general}*,

*donde la consistencia simple de S es una hipótesis adicional para* (f) *y* (g), *y además, para* (f), $(x_1) ... (x_n) [P(x_1, ..., x_n) \vee \overline{P}(x_1, ..., x_n)]$ (a fin de hacer intuicionistamente válida la demostración de (f)).

(d) A partir de (a) por la definición de predicado recursivo general.

(e) Como en la demostración del Corolario del Teorema 27 § 49.

(f) Obtenemos (iv) como en § 41. Por hipótesis, tenemos (i). Para establecer la conversa, supongamos que $\vdash P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$. Ahora $P(x_1, ..., x_n) \vee \overline{P}(x_1, ..., x_n)$. Pero si $\overline{P}(x_1, ..., x_n)$, entonces, usando (ii), contradecimos la consistencia simple.

(g) Supóngase que la fórmula $P(x_1, ..., x_n)$ resuelve $P(x_1, ..., x_n)$. Similarmente a (c),
$(x_1) ... (x_n) (Ey) [Pf_P(x_1, ..., x_n, y) \vee Pf_{\neg P}(x_1, ..., x_n, y)]$ (puesto que $P$ es numeralmente decidible) y
$P(x_1, ..., x_n) \equiv Pf_P(x_1, ..., x_n, \mu y [Pf_P(x_1, ..., x_n, y) \vee Pf_{\neg P}(x_1, ..., x_n, y)])$
(utilizando (viii) y la consistencia simple de $S$). (La consistencia simple de $S$ está implicada por (viii), si $(Ex_1)...(Ex_n)\overline{P}(x_1, ..., x_n)$).

La equivalencia entre precisabilidad (resolubilidad) y recursividad general fue demostrada por Mostowski 1947 para cualquier $S$ simplemente consistente que contenga la teoría usual de números y tal que $(R_1)$ los predicados recursivos primitivos sean resolubles en $S$ (cfr. Corolario del Teorema 27) y $(R_2)$ los predicados $Pf_A$ sean recursivos primitivos (cfr. Dn13a y Lema 19). En § 62 se darán otras referencias. Cfr. el resumen de R. M. Robinson 1950.

Sea $\Psi$ una lista $\psi_1, ..., \psi_l$ de funciones de $m_1, ..., m_l$ variables respectivamente. Elíjanse distintas letras predicativas $Q_1, ..., Q_l$, y añádaselas al inventario de símbolos formales de $S$. Extiéndase la definición de fórmula de $S$ estipulando que $Q_j(t_1, ..., t_{m_j}, t)$ sea una fórmula para cada $j$ ($j=1, ..., l$) y cada término $t_1, ..., t_{m_j}, t$. Sea $F^{\psi_1 ... \psi_l}_{Q_1 ... Q_l}$ el conjunto de las fórmulas $Q_j(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m_j}, \mathbf{y}) \,\&\, \forall z (Q_j(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m_j}, z)$

$\supset \mathbf{y} = z)$, donde $\psi_j(y_1, ..., y_{m_j}) = y$, para $j = 1, ..., l$ y todos los $m_j$-tuplos $y_1, ..., y_{m_j}$ de números naturales. Cambiando "$\vdash$" por "$F^{\psi_1 ... \psi_l}_{Q_1 ... Q_l} \vdash$" (o, en palabras, "demostrable" por "deducible a partir de $F^{\psi_1 ... \psi_l}_{Q_1 ... Q_l}$") en las anteriores definiciones, se obtienen las nociones de *simplemente consistente* (*numeralmente decidible*, *numemeralmente expresable*, *numeralmente representable*, *resoluble*, *precisable*) *en* (o *a partir de*) $\Psi$. Los Teoremas 27, 31, 32 y sus corolarios (incluyendo (a)–(g)) valen con esas nociones y "$F^{\psi_1 ... \psi_l}_{Q_1 ... Q_l} \vdash$", "recursivo primitivo en $\Psi$", y "recursivo general en $\Psi$", en lugar de las respectivas nociones anteriores. (Asimismo, $P$ es *numeralmente expresable de modo uniforme en* (o *a partir de*) $\Psi$. Si, independientemente de $\Psi$, puede darse una fórmula P que exprese numeralmente $P$ a partir de $\Psi$ para cada una de las elecciones de $\Psi$ que se consideren; y de modo similar para representabilidad numeral, resolubilidad y precisabilidad. Los teoremas valen cuando las nociones para $P$ o $\varphi$ relativas a $\Psi$ son entendidas en todo momento como uniformes).

De forma equivalente, podemos elegir en vez de ello distintas letras de función $g_1, ..., g_l$, extender la definición de término para incluir $g_j(t_1, ..., t_{m_j})$ donde $(t_1, ..., t_{m_j})$ son términos, y sustituir "$\vdash$" por "$E^{\psi_1 ... \psi_l}_{g_1 ... g_l} \vdash$" (§ 54) en las definiciones anteriores.

Si convenimos en que $\Psi$ incluya predicados, podemos proceder de cualquiera de estos modos, tomando la función representante de $Q_j$ como $\psi_j$ cuando la $j$-ésima de las $\Psi$ es un predicado $Q_j$; o, en vez de ello, podemos introducir, para cada una de tales $j$, una letra predicativa $Q_j$ que se use con $m_j$ argumentos, y sea $Q_j(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m_j})$ o $\neg Q_j(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m_j})$ la fórmula supuesta correspondiente a esta $j$ y a un $m_j$-tuplo dado $y_1, ..., y_{m_j}$, y de acuerdo con $Q_j(y_1, ..., y_{m_j})$ o $\bar{Q}_j(y_1, ..., y_{m_j})$.

§ 60. **Teorema de Church, el teorema de Gödel generalizado.** Intentamos ahora, por último, responder a la cuestión de si la matemática informal puede ser completamente formalizada (§ 15). Por el teorema de Gödel (§ 42), sabemos que el sistema formal particular del capítulo IV no formaliza completamente la teoría intuitiva de números.

En teoría informal de números consideramos proposiciones dependientes de parámetros. Al tomar los números naturales como valores de esos parámetros, surge un número infinito de proposiciones particulares. Describimos esta situación diciendo que las proposiciones son los valores de predicados. En general, tenemos simultáneamente en consideración varios predicados. Discutamos, empero, la formalización, en relación a uno de ellos, y sea éste un predicado $P(x)$ de una variable $x$.

El sistema formal de teoría de números de los anteriores capítulos proporciona una ilustración de cómo puede realizarse la formalización. Dejemos de lado todo detalle concreto, y consideremos tan sólo el nudo esqueleto de aquello con lo que debe contar un sistema formal para servir a su propósito.

El sistema formal ha de tener un dominio de 'objetos formales'. Entre estos últimos, deberá haber, si es que el sistema ha de constituir una formalización de la teoría del predicado $P(x)$, distintos objetos formales particulares a los que identificamos como expresivos de las proposiciones $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ..., o sea, $P(x)$ para $x = 0, 1, 2, ...$ Podemos designar convenientemente esos objetos formales

por "A(0)", "A(1)", "A(2)",..., respectivamente, o sea, "A($\mathfrak{x}$)" para $x = 0, 1, 2, \ldots$; y denominar a A ($\mathfrak{x}$) 'la fórmula que expresa $P(x)$'. Establecemos esto sin hacer ninguna suposición acerca de si hay cosas tales como numerales $\mathfrak{x}$, una variable $x$, y una fórmula A(x) de la cual proviene A($\mathfrak{x}$) sustituyendo x por $\mathfrak{x}$.

A continuación, ha de haber una categoría de objetos formales llamados 'demostraciones'. Cada demostración ha de ser una demostración 'de' un objeto formal particular, que puede o puede no ser el objeto A ($\mathfrak{x}$) para un número natural dado $x$. Supongamos que "$\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$" corresponde a la proposición metamatemática de que Y es una demostración de A ($\mathfrak{x}$). Se dice que el objeto A ($\mathfrak{x}$) es 'demostrable', si hay una demostración del mismo. Supongamos que "$\vdash$ A($\mathfrak{x}$)" corresponde a la proposición de que A ($\mathfrak{x}$) es demostrable, esto es

$$(43) \qquad (E\mathrm{Y})\ \mathfrak{R}(x, \mathrm{Y}) \equiv \vdash \mathrm{A}(\mathfrak{x}).$$

¿Cuál es la naturaleza del predicado $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$? Nuestro propósito al formalizar una teoría es hacer explícitas las condiciones que determinan qué proposiciones valen, en el sentido de ser demostrables en la teoría (§ 15), o, más brevemente, dar una definición explícita de lo que constituye una demostración. Este propósito será realizado, para la teoría del predicado $P(x)$ en tanto que expresado por la fórmula A ($\mathfrak{x}$), sólo si hay previsto un procedimiento, que no requiera, por nuestra parte, aplicar invención matemática alguna, y por el que, siempre que se nos dé un número natural particular $x$ y un objeto formal Y, podamos decir si Y es una demostración de A ($\mathfrak{x}$) para ese $x$. Esto es, ha de haber un algoritmo o procedimiento de decisión para la cuestión de si vale $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$ (§ 30). También expresaremos esto diciendo que $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$ ha de ser un predicado metamatemático "efectivamente decidible".

No hemos estipulado cuál es el tipo de estructura que tendría el dominio de los objetos formales. Sin embargo, todo objeto formal Y ha de ser susceptible de ser dado como objeto finito pues, de otra manera, no tendría sentido hablar de un procedimiento de decisión para $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$. Esto puede significar que todo Y puede ser generado a partir de un número finito de objetos iniciales por medio de un número finito de aplicaciones de operaciones conocidas, como en nuestra concepción de una aritmética generalizada (§ 50); o que todo Y puede darse como una figura constituida de un número finito de ocurrencias de símbolos extraídos de una lista de símbolos preasignada. Por métodos que nos son familiares (§§ 1, 50, 52), podemos entonces dar una enumeración efectiva de los objetos formales o, quizá más convenientemente, una efectiva numeración de Gödel, esto es, una correspondencia 1–1 entre los objetos formales y un subconjunto de los números naturales. La efectividad significa que, dado cualquier objeto formal Y, podemos siempre hallar el correspondiente número $y$, y, a la inversa, dado cualquier número natural $y$, podemos siempre determinar si corresponde a un objeto formal y, si es así, hallar ese objeto Y. De este modo, ponemos en correlación con el predicado metamatemático efectivamente decidible $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$ un predicado de teoría de números efectivamente decidible $R(x, y)$, donde $R(x, y) \equiv$ {$y$ es el número natural correlacionado a un objeto formal Y tal que $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$}. Entonces, $(E\mathrm{Y})\ \mathfrak{R}(x, y) \equiv (Ey)\ R(x, y)$; y, por (43),

$$(44) \qquad (Ey)\ R(x, y) \equiv \vdash \mathrm{A}(\mathfrak{x}).$$

¿Qué tipo de predicado de teoría de números puede satisfacer la condición de que $R(x, y)$ sea efectivamente decidible? Para el sistema formal del Capítulo IV,

y para cualquier fórmula A (*a*) de ese sistema, este predicado $R(x, y)$ (correspondiente por la numeración de Gödel a 'Y es una prueba de A ($\mathfrak{x}$)') es recursivo primitivo, como vimos al demostrar el Teorema 31 § 52.

Cualquier predicado recursivo general es efectivamente decidible, pues cualquier función recursiva general $\varphi$ es efectivamente calculable. Dado un sistema E de ecuaciones que defina recursivamente $\varphi$, queda suministrado un proceso efectivo —para hallar el valor de $\varphi$ para argumentos $x_1, \ldots, x_n$ dados— deduciendo ecuaciones a partir de E hasta hallar una $f(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x}$ que exprese que este valor es $x$. Un tal sistema E existe siempre, y una tal ecuación puede siempre ser deducida, de acuerdo con las definiciones de 'función recursiva general' (§ 55) y de 'E define recursivamente $\varphi$' (§ 54). (También podemos ver que es efectivamente calculable, mediante la consideración del Teorema IX (29) y (30) § 58, o el Corolario del Teorema IX). Entonces, si $R$ es un predicado recursivo general, podemos decidir si es verdadero o falso para argumentos dados $x_1, \ldots, x_n$ calculando el valor de la función representante para estos argumentos, y leyendo si este valor es 0 ó 1.

Se ha pensado que la conversa de la anterior afirmación es también verdadera. Todo ejemplo de una función (predicado) de la que se ha comprobado que es efectivamente calculable (decidible) y respecto de la cual se ha investigado la cuestión, ha resultado ser un ejemplo de función (predicado) recursiva general. Esta evidencia heurística y otras consideraciones movieron a Church 1936 a proponer la siguiente tesis.

TESIS I. *Toda función efectivamente calculable (predicado efectivamente decidible) es recursiva general.*

Esta tesis está también implícita en la concepción de una máquina computadora formulada por Turing 1936-37 y Post 1936. Posponemos la discusión sobre la evidencia de esta tesis a los dos capítulos siguientes, y procedemos ahora a considerar sus implicaciones.

La tesis y su conversa proporcionan la definición exacta, para la que no estábamos preparados en § 30, de la noción de procedimiento de cálculo (decisión) o algoritmo, para el caso de una función (predicado) de números naturales. Dar un procedimiento de decisión para un predicado $P(x)$ significa dar un predicado recursivo general $R(x)$ tal que $P(x) \equiv R(x)$. Por el Teorema V (14) y (15) § 57, tenemos el siguiente teorema, originalmente establecido por Church 1936, con un ejemplo diferente de problema de decisión "insoluble".

TEOREMA XII. *No hay procedimiento de decisión (o algoritmo) para uno u otro de los predicados* $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$ *y* $(Ey)\,T_1(x, x, y)$.

Basándonos en las consideraciones de la primera parte de esta sección, y aplicando la Tesis I al $R$ de (44), obtenemos una segunda tesis.

TESIS II. *Para un sistema formal dado S, en el que los valores de un predicado* $P(x)$ *son expresados por diversas fórmulas designadas* A ($\mathfrak{x}$) ($x = 0, 1, 2, \ldots$), *el predicado* 'A ($\mathfrak{x}$) *es demostrable en S' es expresable en la forma* $(Ey)\,R(x, y)$ *donde R es recursivo general, o sea, existe un predicado recursivo general R tal que vale* (44). (*Similarmente para un predicado* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *de n variables.*

OBSERVACION 1. Aquí hemos considerado únicamente las fórmulas A (**x**) en las que estábamos interesados. Si tomamos en cuenta otras fórmulas, y el sistema satisface nuestras usuales concepciones acerca de los requisitos que debiera cumplir, podemos proseguir el análisis. Sea 'Y es una prueba de A' denotada por "$\mathfrak{P}$(A, Y)", como un predicado de dos objetos formales cualesquiera A, Y. Este predicado $\mathfrak{P}$ (A, Y) será efectivamente decidible, A (**x**) será una función de $x$ efectivamente calculable, y la decidibilidad efectiva de $\mathfrak{R}(x, Y)$ resultará tomando $\mathfrak{R}(x, Y) \equiv \mathfrak{P}$ (A (**x**), Y). Para una efectiva numeración de Gödel de los objetos formales, supongamos que "$A_a$" esté por el objeto (si lo hay) cuyo número sea $a$; y expresemos con "$\vdash A_a$" que este objeto es una fórmula demostrable (siendo "$\vdash A_a$" falso cuando $a$ no es un número de Gödel). Correlacionamos $P(a, y)$ con $\mathfrak{P}$(A, Y). Utilizando la Tesis I: (a) *Hay un predicado recursivo general P tal que* $(Ey)P(a, y) \equiv \vdash A_a$. (b) *El número de Gödel* $\alpha(x)$ *de* A (**x**) *es una función recursiva general de x.* La Tesis II se sigue tomando $R(x, y) \equiv P(\alpha(x), y)$.

La Tesis II formula el (mínimo) requisito estructural que ha de satisfacer un sistema formal $S$ para que pueda servir como formalización de la teoría de un predicado $P$, con las proposiciones $P(x)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$ expresadas por las respectivas fórmulas A (**x**). Como en el caso de la Tesis I, vale la conversa (según se establece más abajo).

Quedan por establecer las condiciones de $S$ que aseguran la relación de la demostrabilidad de las fórmulas A (**x**) con las proposiciones $P(x)$ que esas fórmulas pretenden expresar. A fin de que la formalización sea *correcta* (o *consistente*) para $P(x)$, se requiere que

$$\vdash A(\mathbf{x}) \rightarrow P(x), \tag{45}$$

esto es, A (**x**) es demostrable en $S$ sólo cuando $P(x)$ es verdadera. Si el sistema $S$ ha de constituir, además, una formalización *completa* de la teoría del predicado, hemos de tener asimismo recíprocamente, que $P(x) \rightarrow \vdash A(\mathbf{x})$, o sea, A(**x**) es demostrable siempre que $P(x)$ es verdadera. Combinando esto con (45),

$$\vdash A(\mathbf{x}) \equiv P(x) \tag{46}$$

en el caso de que $S$ sea tanto completo como correcto para $P(x)$.

Combinando esto con el requisito estructural aducido en la Tesis II: un sistema formal correcto para el predicado $P(x)$ exige hallar un predicado recursivo general $R$ tal que

$$(Ey)\, R(x, y) \rightarrow P(x); \tag{47}$$

establecer otro que sea también completo, un predicado tal que

$$(Ey)\, R(x, y) \equiv P(x). \tag{48}$$

Supóngase ahora que $P(x)$ es el predicado $(y)\, \overline{T}_1(x, x, y)$. Entonces, no hay un $R$ recursivo general tal que valga (48) para todo $x$; pues entonces, por el Teorema V (12), dado cualquier $R$ recursivo general, hay un número $f$ tal que (48) falla $x = f$. Así:

TEOREMA XIII (PARTE I). *No hay un sistema formal correcto y completo para el predicado* $(y)\, \overline{T}_1(x, x, y)$. (Una forma generalizada del Teorema de Gödel, Kleene 1943).

Al objeto de examinar la situación con más detalle, considérese cualquier sistema formal $S$ y cualquier elección de fórmulas $A(\mathfrak{x})$ en $S$ para expresar $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$, para $x = 0, 1, 2, \ldots$ Sea $R$ el predicado recursivo general tal que vale (44) (dado por la Tesis II); y considérese la $f$ de (9) para este $R$. Supóngase que $S$ es correcto para $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$; entonces, por (45),

$$(49) \qquad \vdash A(\mathfrak{x}) \rightarrow (y)\,\overline{T}_1(x, x, y).$$

Por el correlato informal de *86 § 35, (9) y (44),

$$(50) \qquad (y)\,\overline{T}_1(f, f, y) \equiv (\overline{Ey})\,T_1(f, f, y) \equiv (\overline{Ey})\,R(f, y) \equiv \overline{\vdash A(\mathfrak{f})}.$$

Supóngase $\vdash A(\mathfrak{f})$. Entonces, por (49), $(y)\,\overline{T}_1(f, f, y)$; y por (50), $\overline{\vdash A(\mathfrak{f})}$. Por reductio ad absurdum, $\vdash A(\mathfrak{f})$; y, por (50), $(y)\,\overline{T}_1(f, f, y)$. Así:

TEOREMA XIII (PARTE II). *En particular, supóngase que $S$ es un sistema formal con distintas fórmulas $A(\mathfrak{x})$ designadas como expresivas de las proposiciones $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces, puede hallarse un número $f$ tal que: Si $S$ es correcto para $(y)\,\overline{T}_1(f, f, y)$, entonces $(y), \overline{T}_1(f, f, y)$ & $\overline{\vdash A(\mathfrak{f})}$; esto es, la proposición $(y)\,\overline{T}_1(f, f, y)$ es verdadera, pero la fórmula $A(\mathfrak{f})$ que la expresa es indemostrable.*

Así pues, ningún sistema formal puede ser completo con vistas a la tarea de demostrar las proposiciones verdaderas (y sólo las verdaderas) tomadas como los valores de cierto predicado intuitivo $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$ fijado de antemano. Nada se supone acerca del sistema formal, excepto que cumpla el requisito estructural expresado en la Tesis II, y que dé lugar tan sólo a resultados correctos cuando se interpreten las fórmulas $A(\mathfrak{x})$ como expresivas de los valores del predicado $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$.

Estos supuestos constituyen una muy considerable abstracción con respecto a los sistemas formales particulares que hemos estudiado. En ellos, una demostración consistía en aplicaciones de los postulados de una lista. Teníamos razones para creer en la corrección de cada uno de esos postulados separadamente y, por tanto, en el sistema como un todo. La incompletud de Gödel, como vemos ahora, no depende de la naturaleza de esta evidencia intuitiva.

Para poner esto de relieve, podemos imaginar un omnisciente teórico de la aritmética. Cabría esperar que su capacidad para captar a la vez una infinidad de hechos le permitiera reconocer como correctos algunos principios de deducción que, por nosotros mismos, no podríamos descubrir. Pero cualquier sistema formal correcto para $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$ que él pudiera revelarnos, diciéndonos cómo opera semejante sistema sin decirnos por qué, seguiría siendo incompleto.

Para comprender el significado de las proposiciones $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$, sólo se requiere la noción de un predicado particular efectivamente calculable (realmente, de uno recursivo primitivo), y la noción de cuantificador universal usado constructivamente. Es difícil concebir menos presupuestos conceptuales si ha de permitirse cualquier infinito matemático.

Al usar este predicado $(y)\,\overline{T}_1(x, x, y)$ en el plano metateórico, como ya se habrá comprendido, no hemos supuesto que cada uno de sus valores sea o bien verdadero o bien falso. Lo que podemos concluir, por un razonamiento puramente finitista, con este predicado, es suficiente, junto con la Tesis II, para determinar siempre nuestra posibilidad de tener un sistema formal correcto y completo para él.

Aquí hemos estado tratando de la incompletud de cualquier sistema formal (correcto) que sea la formalización de la existente teoría intuitiva del predicado $(y)\,\overline{T}_1\,(x, x, y)$. Ya que esta interpretación ha sido desarrollada de un modo finitista, el teorema puede considerarse metamatemático en el más amplio sentido del término.

Para sistemas formales que tengan algunas de las habituales propiedades formativas y deductivas, el teorema puede también formularse metamatemáticamente en un sentido más restringido, reemplazando la referencia a la interpretación de las fórmulas $\mathrm{A}(\mathfrak{x})$ como expresivas de los valores del predicado $(y)\,\overline{T}_1\,(x, x, y)$ por la consistencia y la completud definidas como propiedades intrínsecas del sistema; por ejemplo, y brevemente, como sigue:

TEOREMA XIII (PARTE III). *Sea S un sistema formal teniendo fórmulas diferentes* $\mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathrm{A}(\mathfrak{x})$ (también escrita "$\forall y\ \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, y)$") $y$ $\neg\,\mathrm{A}(\mathfrak{x})$ (también escrita "$\neg\ \forall y\ \neg\ \mathrm{T}(\mathfrak{x}, y)$") $(x, y = 0, 1, 2, \ldots)$. Supóngase que (A) $T_1\,(x, x, y) \rightarrow \vdash \mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\ y\ \overline{T}_1\,(x, x, y) \rightarrow \vdash \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$,
(B) $\vdash \forall y \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, y) \rightarrow (y)\,\{\vdash \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\}$, $y$ (C) *para cierto R recursivo general, vale* (44). *Entonces, puede encontrarse un número f tal que: Si S es simplemente consistente en el sentido de que, para ningunos x, y, valgan tanto* $\vdash \mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *como* $\vdash \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, *entonces,* $\vdash \mathrm{A}(\mathfrak{f})$. *Si S es además ω-consistente en el sentido de que, para ningún x, valga tanto* $(y)\,\{\vdash \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\}$ *como* $\vdash \neg\,\forall y\,\neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{x}, y)$, *entonces* $\vdash \neg\,\mathrm{A}(\mathfrak{f})$. *Así pues, si S es simplemente y ω-consistente, entonces es simplemente incompleto en el sentido de que, para algún x, no valen ni* $\vdash \mathrm{A}(\mathfrak{x})$ *ni* $\vdash \neg\,\mathrm{A}(\mathfrak{x})$.

DEMOSTRACION. Supóngase que $S$ es simplemente consistente y (por reductio ad absurdum) que $\vdash \mathrm{A}(\mathfrak{f})$. Entonces, por (44), $(Ey)\,R\,(f, y)$; por (9), $(Ey)\,T_1\,(f, f, y)$; y, por (A), $\vdash \mathrm{T}(\mathfrak{f}, \mathfrak{y})$ para algún $y$. Pero, también, a partir de $\vdash \mathrm{A}(\mathfrak{f})$ por (B), $\vdash \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{f}, \mathfrak{y})$ para este $y$, contradiciendo la consistencia simple. Por reductio ad absurdum, $\vdash \mathrm{A}(\mathfrak{f})$. Supongamos ahora que $S$ es también ω-consistente. A partir de $\vdash \mathrm{A}(\mathfrak{f})$, por (50), $(y)$, $\overline{T}_1\,(f, f, y)$; por (A), $(y)\,\{\vdash \neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{f}, \mathfrak{y})$; y, por la ω-consistencia, $\vdash \neg\,\forall y\,\neg\,\mathrm{T}(\mathfrak{f}, y)$, esto es, $\vdash \neg\,\mathrm{A}(\mathfrak{f})$.

Mostowski 1952, que no fue asequible durante la redacción del presente libro, compara varias demostraciones del teorema de Gödel.

Los teoremas de incompletud XII y XIII aparecen en nuestra presentación como aplicaciones de los casos del Teorema V para las respectivas formas de predicado $R\,(x)$ y $(Ey)\,R\,(x, y)$. Este tema está extensamente desarrollado en Kleene 1943*. Concluimos esta sección con algunas notas adicionales acerca de la forma de predicado $(Ey)\,R\,(x, y)$.

CONVERSA DE LA TESIS II (PARTE I). *Hay un sistema formal correcto y completo para cualquier predicado de la forma* $(Ey)\,R\,(x, y)$ *con R recursivo general. (De modo similar para* $(Ey_1) \ldots (Ey_m)\,R\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *con R recursivo general* $(n, m \geq 0)$).

*Más en detalle* (para $n = m = 1$): *Dado cualquier predicado recursivo general* $R\,(x, y)$, *puede encontrarse un sistema formal S con distintas fórmulas* $\mathrm{A}(\mathfrak{x})$ *para* $x = 0, 1, 2, \ldots$ *tal que vale* (44).

En el Ejemplo 1, la corrección del sistema permanece como una hipótesis. Sin embargo, el Ejemplo 3 proporciona una demostración rápida e impecable. (Aquí, (44) es el (viii) de § 59, pero, en general, (iv) adolece de falta de resolubilidad).

EJEMPLO 1. Por el Corolario del Teorema IV § 57, no hay pérdida de generalidad cuando se toma $R$ como recursivo primitivo. Sea $S$ el sistema formal de teoría de números del Capítulo IV, sea R (x, y) una fórmula que exprese numeralmente $R(x, y)$ (Corolario del Teorema 27 § 49), y sea A $(\mathbf{x})$ la fórmula $\exists$yR $(\mathbf{x}$, y). Es claro entonces que $(Ey)R(x, y) \rightarrow \vdash$A $(\mathbf{x})$. Así, (44) vale si el sistema tiene la propiedad de que $\vdash$ $\exists$yR $(\mathbf{x}$, y) sólo cuando $(Ey)R(x, y)$. Esta es una propiedad de consistencia que (si $(Ex)(\overline{Ey})R(x, y)$), implica la consistencia simple, de modo que, por el segundo teorema de Gödel (Teorema 30 § 42), no cabe esperar que se encuentre una demostración elemental de ella; y, de hecho, para el sistema formal clásico, no está claro cómo puede darse una demostración de ella sin hacer uso de la lógica clásica en el metalenguaje.

EJEMPLO 2. Similarmente si se toma como $S$ el sistema de Robinson (Lema 18b § 49) con sólo trece axiomas de teoría de números. En §§ 77–79 se dará una demostración, prolongada pero elemental, de la requerida propiedad de consistencia (para una R (x, y) construida como en la demostración del Corolario del Teorema 27) (cfr. Teorema 53 (b) § 79).– A fortiori (o directamente, cfr. Teorema 53 (a)), el sistema de Robinson es simplemente consistente.

EJEMPLO 3. Sea E un sistema de ecuaciones en el formalismo de las funciones recursivas que define recursivamente la función representante de $R$, con $f$ como letra de función principal. Añádase al acervo de símbolos formales la letra de predicado $\mathcal{A}$. Sea $S$ el sistema que tiene por axiomas a las ecuaciones de E, y, por reglas de inferencia, R1, R2 y la siguiente, donde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son numerales:

$$\frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0}{\mathcal{A}(\mathbf{x}).}$$

La propiedad de consistencia (con $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ como la A $(\mathbf{x})$) es inmediata.

EJEMPLO 4. Sea que los símbolos formales de $S$ comprenden sólo 0, ′, y las dos letras predicativas $\mathcal{R}$ y $\mathcal{A}$ (con coma y paréntesis). Las fórmulas serán las expresiones $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ para $x, y = 0, 1, 2, \ldots$ Los postulados serán un esquema de axioma 1 y una regla de inferencia 2, como sigue. Para el Esquema de Axioma 1, se estipula que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son numerales tales que $R(x, y)$.

1. $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 2. $\dfrac{\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\mathcal{A}(\mathbf{x}).}$

Este sistema formal puede parecer no ortodoxo. Pero la estipulación relativa a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ para el Esquema Axiomático 1 es efectiva (puesto que $R$ es recursivo general), al igual que, por ejemplo, la relativa a la t para los Esquemas Axiomáticos 10 y 11 § 19.

Un quinto ejemplo se da como Ejemplo 2 al final de § 73.

CONVERSA DE LA TESIS II (PARTE II). *Hay un sistema formal S tal que, dado cualquier predicado recursivo general R (x, y), pueden hallarse distintas fórmulas* A (**x**) *para* $x = 0, 1, 2, \ldots$ *tales que vale* (44). *(Similarmente para cualesquiera n,m; para todo n, m simultáneamente).*

DEMOSTRACION. Sean A (**z**, **x**) ($z, x = 0, 1, 2, \ldots$) las fórmulas obtenidas por aplicación de la Parte I (para $n = 2$, $m = 1$) a $T_1(z, x, y)$; y sea que A (**x**) ($x = 0, 1, 2, \ldots$) es A (**f**, **x**) para la $f$ de (9) § 57.

OBSERVACION 2. Por adición de nuevos postulados a $S$ (en la Parte I o en la II), obtenemos sistemas $S'$ tales que $(Ey) R(x, y) \rightarrow \vdash$ A (**x**), pero no necesariamente $\vdash$ A (**x**) $\rightarrow (Ey) R(x, y)$.

Por la Tesis II y su conversa, los mismos predicados que son expresables en la forma $(Ey) R(x, y)$ para algún $R$ recursivo general son expresables también por medio de $\vdash$A(**x**) para algún sistema formal $S$ y designación efectiva de fórmulas A (**x**) para $x = 0, 1, 2, \ldots$ Dicho brevemente, la forma de predicado $(Ey) R(x, y)$ coincide con la noción de demostrabilidad en algún sistema formal.

Por el resultado mencionado al final de § 53 (con el Corolario del Teorema IV), las definiciones inductivas (con cláusulas directas constructivas) conducen precisamente a la misma clase de predicados. Este hecho está estrechamente relacionado con lo precedente, teniendo en cuenta el papel que a menudo se da a las definiciones inductivas cuando se definen sistemas formales.

ENUMERABILIDAD RECURSIVA. Un conjunto o clase $C$ de números naturales es *recursivamente enumerable*, si hay una función recursiva general $\varphi$ que lo enumera (admitiendo repeticiones), es decir, tal que $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ es una enumeración (admitiendo repeticiones) de los miembros de $C$. (Post 1944 incluye también la clase vacía como recursivamente enumerable).

TEOREMA XIV. *Una clase C que tenga un miembro es recursivamente enumerable si y sólo si el predicado* $x \in C$ *es expresable en la forma* $(Ey) R(x, y)$ *con un R recursivo general.*

Más en detalle: (a) *Si* $\varphi$ *enumera C, entonces* $x \in C \equiv (Ey) R(x, y)$ *con un R recursivo primitivo en* $\varphi$. (b) *Si* $x \in C \equiv (Ey) R(x, y)$ *y C tiene un miembro m, entonces C es enumerada por una función* $\theta$ *recursiva primitiva en R* (Kleene 1936).

DEMOSTRACIONES. (a) $x \in C \equiv (Ey) [\varphi(y) = x]$ (cfr. # 14 § 45) (b) Téngase

$$\theta(y) = \begin{cases} (y)_0 & \text{si } R((y)_0, (y)_1), \\ m & \text{si } \bar{R}((y)_0, (y)_1) \end{cases}$$

(cfr. # # D, F, 19).

Así pues, la Tesis II equivale a decir que la clase $C$, de los números $x$ para los cuales A (**x**) es demostrable, es recursivamente enumerable (si tiene un miembro). Llamamos a un conjunto o clase *C recursivo general*, si el predicado $x \in C$ es recursivo general. Parafraseando los resultados de § 57: Si tiene un miembro, una clase recursiva general $C$ es, a fortiori, recursivamente enumerable (Teorema VI (a)); similarmente su complemento $\bar{C}$ (# D § 45). Clásicamente, una clase $C$ es

recursiva general si tanto $C$ como $\overline{C}$ son recursivamente enumerables (Teorema VI (b) o (c)). La clase de los $x$ tales que $(Ey)\,T_1\,(x,\,x,\,y)$ (en símbolos $\hat{x}(Ey)\,T_1\,(x,x,y)$) es recursivamente enumerable por (29) § 58, $(Ey), T_1\,(e,e,y)$, de modo que $e$ es un miembro), pero no recursiva general (Teorema V (15)); su complemento $\hat{x}\,(y)\,\overline{T}_1\,(x,\,x,\,y)$ no es recursivamente enumerable ni recursiva general (Teorema V (12) y (14)).

COROLARIO. *Si una clase puede ser enumerada (admitiendo repeticiones) por una función recursiva general, puede ser enumerada (admitiendo repeticiones) por una función recursiva primitiva.* (Rosser 1936).

Usando (a), entonces Corolario del Teorema IV, entonces (b).

EJEMPLO 5. Una clase infinita $C$ es recursiva general si y sólo si es recursivamente enumerable sin repeticiones en orden de magnitud (Kleene 1936). (SUGERENCIA: Utilícese el Teorema III). Toda clase infinita recursivamente enumerable contiene una subclase infinita recursiva general (Post 1944). Si una clase infinita es recursivamente enumerable admitiendo repeticiones, es recursivamente enumerable sin repeticiones (Kleene 1936).

EJEMPLO 6. PROBLEMA: definir constructivamente (esto es, intuicionísticamente), 'función recursiva general' a partir de 'clase recursivamente enumerable'. Hemos de evitar la aplicación de la ley de tercero excluido que ocurre al decir que una clase o bien es vacía o tiene un miembro, y hemos de evitar asimismo los pasos no-intuicionistas en la demostración del Teorema VI (b). SOLUCIÓN: combinando la primera de las dos proposiciones siguientes, Teorema VI (c), con la segunda (o con Teorema XIV): Una función $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es recursiva general si, y sólo si, la clase de los números $2^{\varphi(x_1,\ldots,x_n)} \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$ es recursiva general. Un predicado $x \in C$ es expresable en la forma $(Ey)\,R\,(x,y)$ con $R$ recursivo general si, y sólo si, la clase (llámesela $\{0\} + C'$) formada por 0 y por los sucesores de los miembros de $C$ es recursivamente enumerable.

Obtenemos una noción de 'recursivamente enumerable en $\Psi$' leyendo "función $\varphi$ recursiva general en $\Psi$" en lugar de "función $\varphi$ recursiva general" en la definición de enumerabilidad recursiva. Los resultados se extienden a ella.

**§ 61. Una forma simétrica del teorema de Gödel.** El teorema XIII § 60 generaliza el Teorema 28 § 42 (teorema de Gödel en la forma original), con $\mathrm{A}(\boldsymbol{f})$ correspondiendo a $\mathrm{A}_p\,(\boldsymbol{p})$. La Parte III del Teorema XIII fue formulada metamatemáticamente en el sentido más estricto. Así pues, vamos a exponer una generalización del Teorema 29 (la respectiva forma de Rosser del teorema de Gödel).

En lugar de $(y)\,\overline{T}_1\,(x,x,y)$, usamos ahora el predicado, ligeramente más complicado, $(y)\,[T_1\,((x)_1,\,x,\,y)\ \mathbf{V}\ (Ez)_z \leq_y T_1\,((x)_0,\,x,\,z)]$, o su equivalente $(Ey)\,[T_1\,((x)_1,x,y)\,\&\,(z)_z \leq_y \overline{T}_1\,((x)_0,x,z)]$.

Sea que "$W_0\,(x,\,y)$" abrevie $T_1\,((x)_1,\,x,\,y)\,\&\,(z)_z \leq_y \overline{T}_1\,((x)_0,\,x,\,y)$, y que "$W_1\,(x,y)$" abrevie $T_1\,((x)_0,x,y)\,\&\,(z)_z \leq_y \overline{T}_1\,((x)_1,x,z)$.

Sea fijado $x$. Supóngase que hay un número $y_1$ tal que (i) $T_1\,((x)_0,\,x,\,y_1)$ y (ii) $(z)_z \leq_{y_1} \overline{T}_1\,((x)_1,\,x,\,z)$. Entonces, no puede haber ningún número $y_0$ tal

que (iii) $T_1((x)_1, x, y_0)$ y (iv) $(z)_z \leq_{y_0} \overline{T}_1((x)_0, x, z)$. Pues (i) y (iv) implican $y_1 > y_0$, y (ii) y (iii) implican $y_0 > y_1$. Así pues

(51) $$(Ey)\, W_1(x,y) \rightarrow (\overline{Ey})\, W_0(x,y).$$

Puesto que los predicados $W_0(x,y)$ y $W_1(x,y)$ son recursivos primitivos (usando # # A, C, D, E, 19 § 45), la teoría del predicado $(Ey)\, W_0(x,y)$ puede ser completamente formalizada, y similarmente, por lo menos, vale tanto de la teoría del predicado $(\overline{Ey})\, W_0(x,y)$, cuanto esté dado por la condición suficiente $(Ey)\, W_1(x,y)$ de (51) (por la conversa de la Tesis II y la Observación 2 § 60). Mostraremos ahora que un sistema formal $S$, que formalice hasta ese tanto por lo menos, si es consistente, no puede ser completo.

De acuerdo con ello, sea $S$ cualquier sistema formal en el que haya fórmulas $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ y $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$, siendo todas distintas. No haremos suposición restrictiva alguna acerca de qué tipo de simbolismo tenga $S$, o, en particular, acerca de que $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ proceda de una fórmula $\mathrm{B}(x)$ al sustituir una variable x por un numeral $\mathbf{x}$, o que $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$ proceda de $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ prefijando a ésta un cierto símbolo $\neg$. Las reglas deductivas de $S$ serán tales que

(52) $$(Ey)\, W_0(x,y) \rightarrow \vdash \mathrm{B}(\mathbf{x}),$$

(53) $$(Ey)\, W_1(x,y) \rightarrow \vdash \neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x}).$$

El sistema $S$ debe cumplir el propósito de dar un criterio explícito de lo que constituye una demostración para las fórmulas $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ y $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$, y, por lo tanto (aunque ahora evitemos especificar que $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ y $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$ expresarían ciertos predicados), se requiere como antes, por la Tesis II, que existan predicados recursivos generales $R_0(x,y)$ y $R_1(x,y)$ tales que

(54) $$(Ey)\, R_0(x,y) \equiv \vdash \mathrm{B}(\mathbf{x}),$$

(55) $$(Ey)\, R_1(x,y) \equiv \vdash \neg\, \mathrm{B}(x).$$

Por la *consistencia (simple)* de $S$ entenderemos que, para ningún número natural $x$, se dé tanto $\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})$ como $\vdash \neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$; y por la *completud (simple)* que, para todo $x$, o bien $\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})$, o $\vdash \neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$.

TEOREMA XV. *No hay un sistema formal simplemente consistente y completo que satisfaga* (52)–(55).

Más en detalle: *Dado cualquier sistema formal $S$ con distintas fórmulas* $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ *y* $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ *y predicados recursivos generales* $R_0(x,y)$ *y* $R_1(x,y)$ *y tal que* (52)–(55) *valen, puede hallarse un número f tal que, si S es simplemente consistente, entonces ni* $\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ *ni* $\vdash \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$. (Forma de Rosser del teorema de Gödel, en una versión generalizada).

DEMOSTRACION. Supóngase que $S$ es simplemente consistente o, en símbolos,

(56) $$\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x}) \,\&\, \vdash \neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})}.$$

Por el Teorema IV (6) § 57, hay números $f_0$ y $f_1$ tales que, si hacemos $f = 2^{f_0} \cdot 3^{f_1}$, entonces

(57) $$(Ey)\, R_0(x,y) \equiv (Ey)\, T_1(f_0, x, y) \equiv (Ey)\, T_1((f)_0, x, y),$$

(58) $$(Ey)\,R_1(x,y) \equiv (Ey)\,T_1(f_1,x,y) \equiv (Ey)\,T_1((f)_1,x,y).$$

En el resto de la demostración, cada vez que usemos (52)–(58), sustituiremos la variable $x$ por el número $f$. Para mostrar por reductio ad absurdum que $\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$, supóngase que

(a) $$\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f}).$$

Entonces, por (54), $(Ey)\,R_0(f,y)$; y, por (57),

(b) $$(Ey)\,T_1((f)_0,f,y).$$

Además, por (a) y la consistencia simple ((56)),

(c) $$\overline{\vdash \neg\, \mathrm{B}(\boldsymbol{f})}.$$

De ahí que, por (55), $(\overline{Ey})\,R_1(f,y)$; por (58), $(Ey)\,T_1((f)_1,f,y)$; de donde

(d) $$(y)\,\overline{T}_1((f)_1,f,y).$$

Por (b) y (d), $(Ey)\,[T_1((f)_0,f,y) \,\&\, (z)_{z \leq y}\,\overline{T}_1((f)_1,f,z)]$, esto es, $(Ey)\,W_1(f,y)$; y, por (53), $\vdash \neg\, \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$, lo que contradice (c). Por tanto, rechazando la suposición (a) por reductio ad absurdum, $\overline{\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f})}$.

Mediante pasos similares o, simplemente, observando la simetría entre (52), (54), (56), (57) y (53), (55), (56), (58): $\vdash \neg\, \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$.

DISCUSION. Justificábamos las condiciones para $S$ sugiriendo que $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ expresaría $(Ey)\,W_0(x,y)$ y $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$ su negación. Llamemos a ésta, por conveniencia, la *interpretación preferida*. Bajo la interpretación preferida, $\neg\, \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ corresponde a la $\mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ de § 42 y expresa una proposición verdadera. Sin embargo, la interpretación preferida no es mencionada en el teorema mismo. Las condiciones para $S$ son enteramente simétricas. No hay nada que nos impida interpretar, con idéntico provecho, $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$ como expresando $(Ey)\,W_1(x,y)$ y $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ la negación de ello. Entonces, $\mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ corresponde a $\mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ y expresa una proposición verdadera, mientras que $\neg\, \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ es falsa. Entre estos extremos, hay muchas posibilidades intermedias de interpretación. Ello se ilustrará de nuevo en conexión con los siguientes ejemplos de sistemas $S$ para el Teorema XV.

EJEMPLO 1. En el formalismo de teoría de números del Capítulo IV, puesto que $T_1((a)_1,a,b)$ y $T_1((a)_0,a,c)$ son recursivos primitivos, por el Corolario del Teorema 27 § 49 son numeralmente expresados por las fórmulas $\mathrm{A}(a,b)$ y $\mathrm{B}(a,c)$, respectivamente. Que $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ sea $\exists b\,[\mathrm{A}(\mathbf{x},b) \,\&\, \forall c\,(c \leq b \supset \neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x},c))]$, y que $\neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$ sea $\neg\, \exists b\,[\mathrm{A}(\mathbf{x},b) \,\&\, \forall c\,(c \leq b \supset \neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x},c))]$. Entonces, mediante métodos utilizados en la primera parte de la demostración del Teorema 29 § 42, puede mostrarse que vale (52). También, por los pasos aquí mostrados e $\supset$-introd., $\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x}) \supset \neg\, \forall b\,[\neg\, \mathrm{A}(\mathbf{x},b) \vee \exists c\,(c \leq b \,\&\, \mathrm{B}(\mathbf{x},c))]$. Contraponiendo (por *13), $\vdash \forall b\,[\neg\, \mathrm{A}(\mathbf{x},b) \vee \exists c\,(c \leq b \,\&\, \mathrm{B}(\mathbf{x},c))] \supset \neg\, \mathrm{B}(\mathbf{x})$. Esto, con el método de la segunda parte de la demostración del Teorema 29, da (53). Adviértase que esta demostración requiere, aparte del cálculo de predicados con igualdad, los Axiomas 14–21 y el Corolario del Teorema 27, sólo *166a, *168, *166 y *169 (siendo t un numeral). Por tanto, por Lema 18a (fin § 41) y Lema 18b (fin § 49), vale perfectamente para el sistema de Robinson. Mediante el Teorema 31 § 52 (y, para

el sistema de Robinson, mediante el método de la demostración del Teorema 31) tenemos, para el sistema de teoría de números del Capítulo IV, (54) y (55), para algunos $R_0$ y $R_1$ recursivos. En este ejemplo, el $\neg$ de $\neg$ B $(\mathfrak{x})$ para el Teorema XV es en este momento realmente el $\neg$ del formalismo de teoría de números; y, bajo la interpretación usual del simbolismo de teoría de números, B $(\mathfrak{x})$ y $\neg$ B $(\mathfrak{x})$ tienen la interpretación preferida. Sea ahora $S$ el sistema de teoría de números del Capítulo IV (o el de Robinson), con esta elección de B $(\mathfrak{x})$ y $\neg$ B $(\mathfrak{x})$. Por el Teorema $S$ (si es simplemente consistente) es simplemente incompleto, y asimismo lo es para toda ampliación de $S$ simplemente consistente obtenida añadiendo más postulados (de modo tal que (54) y (55) continúen valiendo para algunos $R_0$ y $R_1$ recursivos). Una tal ampliación de $S$ puede incluso mostrar variedad con la interpretación preferida de B $(\mathfrak{x})$ y $\neg$ B $(\mathfrak{x})$ en $S$, a condición sólo de que los nuevos postulados no entren en conflicto con la interpretación preferida de un modo que sea lo bastante elemental como para dar lugar a una inconsistencia simple.

EJEMPLO 2. Sea que el simbolismo para un sistema formal $S$ incluya los numerales y cuatro símbolos de predicado $W_0$, $W_1$, B y $\neg$ B (o, en lugar del último, un operador $\neg$). Tenga $S$ como postulados dos esquemas de axioma y dos reglas de inferencia, como sigue. Para el Esquema de Axioma 1, $\mathfrak{x}$ e $\mathfrak{y}$ son numerales tales que $W_0(x, y)$, y, para el Esquema de Axioma 2, tales que $W_1(x, y)$.

1. $W_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.
2. $W_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.
3. $\dfrac{W_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{B(\mathfrak{x})}$.
4. $\dfrac{W_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\neg B(\mathfrak{x})}$.

La consistencia simple de este sistema es inmediata a partir de (51). Este sistema $S$, o cualquier extensión suya simplemente consistente obtenida por adición de más postulados (permaneciendo (54) y (55) verdaderos para ciertos $R_0$ y $R_1$ recursivos), es simplemente incompleto. En este $S$, las fórmulas B$(\mathfrak{x})$ y $\neg$ B $(\mathfrak{x})$ son demostrables sólo como es requerido por (52) y (53). No quedamos sujetos a restricción alguna por la interpretación al ampliar $S$.

El Teorema XIII § 60 es el caso del Teorema V § 57 para la forma de predicado $(Ey)\,R(x, y)$, es una aplicación metamatemática. De modo similar, el Teorema XV admite una versión enteramente en términos de formas de predicado. Vamos a comparar los Teoremas XIII y XV haciendo uso del lenguaje de clases recursivamente enumerables (cfr. Teorema XIV § 60).

OBSERVACION 1. Los Teoremas XIII y XV hacen absurdo que cualquiera de las tres clases $\hat{x}\,(Ey)\,T_1(x, x, y)$, $\hat{x}\,(Ey)\,W_0(x, y)$ y $\hat{x}\,(Ey)\,W_1(x, y)$ sea vacía.– Pueden encontrarse miembros así como sigue. Usando (29) Teorema IX § 58, $(Ey)\,T_1(e, e, y)$. Elíjase cualquier $R$ recursivo tal que $(x)\,(Ey)\,R(x, y)$, y elíjase $f$ para este $R$ por (6) Teorema IV § 57; elíjase también cualquier $R$ recursivo tal que $(x)\,(y)\,R(x, y)$, y elíjase $g$ para este $R$ por (7). Sea $e_0 = 2^g \cdot 3^f$ y $e_1 = 2^f \cdot 3^g$. Entonces, $(Ey)\,W_0(e_0, y)$ y $(Ey)\,W_1(e_1, y)$.

En el Teorema XIII tenemos una clase fijada recursivamente enumerable $C_0$ de números naturales (a saber: $\hat{x}\,(Ey)\,T_1(x, x, y)$) cuyo complemento $C_3$ $(= \hat{x}\,(y)\,\overline{T}_1(x, x, y))$ no es recursivamente enumerable (Figura 1). En el Teore-

ma XV, tenemos dos clases fijadas $C_0$ y $C_1$ recursivamente enumerables (a saber: $\hat{x}\,(Ey)\,W_0\,(x,\,y)$ y $\hat{x}\,(Ey)\,W_1\,(x,\,y)$ respectivamente) que son disjuntas (por (51)) y tales que, para toda separación de todos los números naturales en dos clases disjuntas $C_2$ y $C_3$ con $C_0 \subset C_2$ y $C_1 \subset C_3$, las clases $C_2$ y $C_3$ no son ambas recursivamente enumerables (Figura 2). (En lugar de $\overline{(x)\,(x \in C_2 \vee x \in C_3)}$, basta tener $(x)\,\overline{(x \in C_2 \vee x \in C_3)}$, lo cual es intuicionistamente más débil). Sólo para la interpretación preferida es $C_3$ el complemento de $C_0$. Al demostrar el Teorema XIII (Parte II), suponíamos dada cualquier clase recursivamente enumerable $D_3$ conteni-

Figura 1.

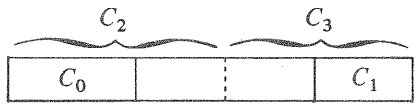



Figura 2.

da en $C_3$ (a saber, $\hat{x}\,(Ey)\,R\,(x,\,y)$), y hallado un número $f$ no contenido ni en $C_0$ ni en $D_3$ (Figura 1a). Al demostrar el Teorema XV, suponíamos dadas dos clases disjuntas recursivamente enumerables $D_2$ y $D_3$ que contenían $C_0$ y $C_1$ respectivamente (a saber, $\hat{x}\,(Ey)\,R_0\,(x,\,y)$ y $\hat{x}\,(Ey)\,R_1\,(x,\,y)$), y hallado un número $f$ no contenido ni en $D_2$ ni en $D_3$ (Figura 2a). La fraseología metamatemática de

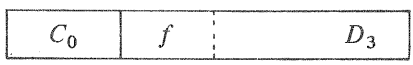



Figura 1a.

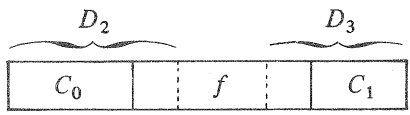



Figura 2a.

la anterior demostración puede sin duda ser obviada, utilizando primero (54) y (55) en (52), (53) y (56), de modo que las hipótesis se convierten en

(52a) $\quad (Ey)\,W_0\,(x,y) \rightarrow (Ey)\,R_0\,(x,y),$

(53a) $\quad (Ey)\,W_1\,(x,y) \rightarrow (Ey)\,R_1\,(x,y),$

(56a) $\quad \overline{(Ey)\,R_0\,(x,y)\ \&\ (Ey)\,R_1\,(x,y)}$

(Kleene 1950). Estos resultados se extienden a clases recursivamente enumerables en $\Psi$; cfr. el final de § 60 y el Teorema X § 58.

Los números $x$ para los que B $(\mathfrak{x})$ es demostrable son recursivamente enumerables ((54), Teorema XIV; por (52) y Observación 1, $\vdash$B $(\mathfrak{e}_0)$).

TEOREMA XVI. *Si S, tal y como se lo ha descrito en el Teorema* XV (*omitiendo* (55)), *es similarmente consistente, los números x para los que* B $(\mathfrak{x})$ *es indemostrable en S no son recursivamente enumerables o, equivalentemente, no hay predicado recursivo general Q (x, y) tal que* $(Ey)\,Q\,(x,y) \equiv \overline{\vdash \mathrm{B}\,(\mathfrak{x})}$. (Según Rosser 1936).

DEMOSTRACION. Pues si $\hat{x}\,[\overline{\vdash \mathrm{B}\,(\mathfrak{x})}]$ fuese recursivamente enumerable, entonces, tomando $C_2 = \hat{x}\,[\vdash \mathrm{B}\,(\mathfrak{x})]$ y $C_3 = \hat{x}\,[\overline{\vdash \mathrm{B}\,(\mathfrak{x})}]$, tendríamos la situación mostrada en la Figura 2 siendo $C_2$ como $C_3$ recursivamente enumerables. (Intuicionistamente, $\overline{(x)\,(x \in C_2 \vee x \in C_3)}$; cfr. *51a § 27). La demostración puede darse también

observando que (52)–(56) valdrían reemplazando "$R_1$" por "$Q$" y "$\vdash \neg \mathrm{B}(\mathfrak{x})$" por "$\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{x})}$", después de lo cual la anterior demostración de $\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{f})}$ & $\vdash \neg \mathrm{B}(\mathfrak{f})$ se convierte en una deducción de la contradicción lógica $\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{f})}$ & $\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{f})}$. (Usamos las hipótesis considerando $\neg \mathrm{B}(\mathfrak{x})$ y la consistencia simple únicamente para inferir $(Ey)\, W_1(x, y) \rightarrow \overline{\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{x})}$).

EL PROBLEMA DE DECISION PARA UN SISTEMA FORMAL (cfr. § 30). Por la Tesis I § 60, 'efectivamente decidible (calculable)' significa 'recursivo general' en el caso de un predicado (función), de teoría de números. A fin de dar un sentido exacto a 'efectivamente decidible (calculable)' para un predicado (función) metamatemático, podemos requerir que el predicado de teoría de números correspondiente (una función de teoría de números correspondiente) sea recursivo general, en el caso de cualquier sistema formal particular $S$ cuyos objetos admitan una numeración de Gödel efectiva (como tienen que admitirla, si $S$ ha de servir a nuestro propósito al formalizar, al comienzo de § 60). Por ejemplo, dar un 'procedimiento de decisión' para la demostrabilidad en $S$, o sea, para el predicado $\vdash \mathrm{A}$ (donde A es una variable metamatemática cuyo rango comprende todas las fórmulas, o todos los objetos formales, de $S$), significa entonces dar un predicado recursivo general $R(a)$ tal que $R(a) \equiv \vdash \mathrm{A}_a$, en la notación de la Observación 1 § 60. (Un segundo método de hacer que 'efectivamente decidible (calculable)' sea exacto para un predicado (función) metamatemático se indica al final de § 70). Lo que sigue puede leerse, o bien en términos de nuestra concepción intuitiva de un procedimiento de decisión que se aplica a fórmulas de $S$, o bien en términos de esta exacta definición matemática. Si $S$ debe servir al propósito de formalización para las fórmulas $\mathrm{B}(\mathfrak{x})$, ha de ser satisfecha la condición de que $\mathrm{B}(\mathfrak{x})$ sea una función metamatemática efectiva de $x$ (o de que su número de Gödel $\beta(x)$ sea una función de teoría de números recursiva general).

COROLARIO. *Sea S como se ha descrito en el Teorema* XV (*omitiendo* (54) *y* (55)), *y, tal que* $\mathrm{B}(\mathfrak{x})$ *pueda ser efectivamente hallada a partir de x* (*o que, en alguna numeración efectiva de Gödel,* $\beta(x)$ *sea una función de x recursiva general*). *Si S es simplemente consistente, entonces su problema de decisión es insoluble, esto es, no hay un procedimiento de decisión para determinar si una fórmula es demostrable en S.*

DEMOSTRACION. Pues si hubiese un método para determinar efectivamente si cualquier fórmula dada del sistema es demostrable, podríase, dado un número $x$, hallar la fórmula $\mathrm{B}(\mathfrak{x})$ correspondiente y aplicar entonces el método de esta fórmula. Por la Tesis I § 60, ello implicaría que la clase $\hat{x}\ [\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{x})]$ es recursiva general. Entonces, a fortiori, las clases $\hat{x}\ [\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{x})]$ y $\hat{x}\ [\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{x})}]$ serían ambas recursivamente enumerables y, por tanto, habría predicados recursivos generales $R_0$ y $Q$ tales que $(Ey)\, R_0(x, y) \equiv \vdash \mathrm{B}(\mathfrak{x})$ (para 54)) y $(Ey)\, Q(x, y) \equiv \overline{\vdash \mathrm{B}(\mathfrak{x})}$ (cfr. el final de §60, y la Observación 1), contradiciendo el teorema.– Establecido de otra forma: Si hubiera un $R$ recursivo general tal que $R(a) \equiv \vdash \mathrm{A}_a$, entonces, tomando $R_0(x, y) \equiv R(\beta(x))$ y $Q(x, y) \equiv \bar{R}(\beta(x))$ contradiríamos, como antes, el teorema.

TEOREMA 33. *Si el sistema formal de teoría de números del Capítulo* IV (*o el sistema de Robinson descrito en Lema* 18b § 49) *es simplemente consistente,*

*entonces su problema de decisión es insoluble; y permanece insoluble cuando se extiende el sistema por adición de postulados de forma tal que el sistema continúe siendo simplemente consistente.*

Por el corolario junto con el Ejemplo 1. Puesto que, en el Ejemplo 1, el $\neg$ de de $\neg$ B (x) es el $\neg$ del sistema de teoría de números, 'consistencia simple'— tal como fue definida (en § 28) para el sistema de teoría de números. (Para la definición de 'decidible' mediante el uso de una numeración de Gödel, puede entenderse que la numeración es la de §§ 50, 52. Usando el Ejemplo 2 § 52, $\beta(x)$ es recursiva primitiva).

REDUCIBILIDAD, GRADOS DE INSOLUBILIDAD. Buena parte del trabajo sobre problemas de decisión se consagra no a la directa obtención de soluciones sino a reducciones de un problema de decisión a otro.

'Reducir' el problema de decisión para un predicado $P$ (o el problema de calculación para una función $\varphi$) de $n$ variables a los respectivos problemas para $l$ funciones y predicados $\psi_1, ..., \psi_{l_1}, Q_1, ..., Q_{l_2}$ (en abreviatura $\Psi$) significa, intuitivamente, hallar un método uniforme de procedimiento por el que, dado cualquier $n$-tuplo de argumentos $x_1, ..., x_n$, uno podría decidir si $P(x_1, ..., x_n)$ es verdadero o no (calcular el valor en cada caso de $\varphi(x_1, ..., x_n)$, si, a cada paso del procedimiento tuviese a su disposición los valores de las funciones $\psi_1, ..., \psi_{l_1}$ y la verdad o falsedad de los valores de los predicados $Q_1, ..., Q_{l_2}$, para los argumentos que hasta entonces haya podido nombrar; o, dicho brevemente, establecer que $P$ es efectivamente decidible ($\varphi$ es efectivamente calculable) a partir de $\Psi$.

Para obtener una noción matemática precisa que corresponde a esta noción intuitiva, extendemos naturalmente las tesis de Church (Tesis I § 60) para incluir el caso de $l > 0$ funciones y predicados supuestos $\Psi$ (llamando entonces la Tesis I*). La evidencia para la Tesis I se aplicará también a la Tesis I*. La conversa de la Tesis I* es válida.

Por ejemplo, *reducir* el problema de decisión para un predicado $P(a)$ a otro predicado $Q(a)$ significa, ahora, hallar un predicado $R(a)$ recursivo general en $Q(a)$ y tal que $P(a) \equiv R(a)$ o, dicho brevemente, establecer que $P(a)$ es recursivo general en $Q(a)$. Ello lo inferimos a partir de nuestra noción intuitiva de reducción por la Tesis I*; o, si lo tomamos como una definición, apelamos a la Tesis I* al afirmar que la noción definida está de acuerdo con nuestra concepción intuitiva de reducción.

Post 1944 formuló varios conceptos de reducibilidad matemática. El más general de ellos, que Post toma de Turing 1939, es equivalente a la noción que obtenemos a partir de la Tesis I*. Si el problema de decisión para $P(a)$ es reducible al que corresponde para $Q(a)$, y es insoluble, Post añade que es de *igual* o *más bajo grado de insolubilidad* que el correspondiente para $Q(a)$, según que el problema de decisión para $Q(a)$ sea o no reducible al correspondiente para $P(a)$ (cfr. § 3). Los grados de insolubilidad son, por lo menos, parcialmente ordenados (cfr. § 8). Cada uno de los predicados $(Ex)\, T_1(a, a, x)$, $(x)\,(Ey)\, T_2(a, a, x, y)$, $(Ex)\,(y)\, T_3(a, a, x, y, z)$, ... (cfr. Teorema V, Parte II (b), § 57) tiene un problema de decisión del más alto grado de insolubilidad para predicados de las formas respectivas $(Ex)\, R(a, x)$, $(x)\,(Ey)\, R(a, x, y)$, $(Ex)\,(y)\,(Ez)\, R(a, x, y, z)$, ... con $R$ recursivo, como demostraremos más adelante (Ejemplo 2 § 65; esto vale intuicionistamente si se toma como significando sencillamente que cada uno de los predicados de cada una de las respectivas formas con un $x$ recursivo es recursivo en este

predicado no-recursivo, que es lo que se demuestra directamente). Entonces, clásicamente, cada uno de esos predicados después del primero tiene un problema de decisión de un grado de insolubilidad más alto que el precedente (usando también el Corolario del Teorema XI § 58), y el predicado $M(a, k)$ del Teorema VIII § 57 lo tiene de un grado de insolubilidad todavía más alto (por el Corolario (b) del Teorema X § 58 y la demostración del Teorema VIII). Usando $T_n^M$ en lugar de $T_n$, obtenemos grados de insolubilidad ascendente a partir de aquí (por el Teorema XI* del final de § 58 y el Ejemplo 2 § 56 para $l > 0$). Davis (resumen 1950) explora esos grados de insolubilidad. Post 1944 plantea, sin responderla, la cuestión de si existe un grado de insolubilidad más bajo que el del problema de decisión para $(Ex)\, T_1\, (a, a, x)$.

EJEMPLO 3. Sea restablecido el Teorema 33 utilizando la propiedad de consistencia –más fuerte– del Ejemplo 1 (o 2) § 60 en lugar de la consistencia simple. En esta forma más débil, el Teorema 33 puede ser demostrado a partir del Ejemplo 1 (o 2) § 60, tomando el $R(x, y)$ de allí $\equiv T_1(x, x, y)$ y usando el Teorema XII § 60. De esta demostración se sigue, por los resultados del recién citado Ejemplo 2 § 65, que, bajo la hipótesis de consistencia más fuerte, el problema de decisión para el sistema formal del Capítulo IV (o el de Robinson, Lema 18b), o para cualquier extensión que tenga esta propiedad de consistencia para el mismo o algún otro $R(x, y)$ que exprese numeralmente $R(x, y)$ $(\equiv T_1(x, x, y))$, es del más alto grado de insolubilidad para predicados de 1-cuantificador.– Para el sistema del Capítulo IV (o el de Robinson), podemos también mostrar esto (con otra elección de $R(x, y)$ y $R(x, y)$ en la hipótesis de consistencia más fuerte) a partir de la demostración del Teorema 33, tal como se ha dado, así. Sea $f$ elegido por (6) con $T_1((x)_2, (x)_2, y)$ como el $R$, y sea $g$ elegido por (7) para cualquier $R$ recursivo tal que $(x)(y)R(x, y)$. Entonces, $(Ey)\, T_1(x, x, y) \equiv (Ey)\, W_0(2^g \cdot 3^f \cdot 5^x, y)$. Esto reduce el problema de decisión para $(Ey)\, T_1(x, x, y)$ al correspondiente para $(Ey)\, W_0(x, y)$. Así pues, el problema de decisión para el sistema es del más alto grado para predicados de 1-cuantificador si el sistema tiene la propiedad de que la conversa de (52) valga para la B $(\mathbf{x})$ del Ejemplo 1 (como la tiene el sistema de Robinson, por Teorema 53 (c) § 79. (Esta B $(\mathbf{x})$ es de la forma $\exists y R(\mathbf{x}, y)$, donde R (x, y) expresa numeralmente $W_0(x, y)$, por § 41 (C) y (E)).

En el caso de que $\Psi$ sean funciones y predicados no especificados, cabe discutir la reducción del problema de decisión para $P$ (el problema de cálculo para $\varphi$) a los respectivos problemas para $\Psi$ en el sentido de obtener un procedimiento uniforme en $\Psi$ así como en $x_1, \ldots, x_n$; o, dicho brevemente, de establecer que $P$ es efectivamente decidible ($\varphi$ efectivamente calculable) uniformemente a partir de $\Psi$. Entonces, la Tesis I* y su Conversa han de establecerse leyendo "uniformemente" en la hipótesis y la conclusión.

CAPITULO XII

# FUNCIONES RECURSIVAS PARCIALES

§ 62. **Tesis de Church.** Uno de los objetivos principales de éste y el siguiente capítulo es presentar la evidencia de la Tesis de Church (Tesis I § 60).

Puesto que nuestra noción original de calculabilidad efectiva de una función (o de decidibilidad efectiva de un predicado) es un tanto vaga e intuitiva, la tesis no puede ser demostrada.

La noción intuitiva, no obstante, es real, por cuanto permite garantizar muchas funciones particulares como efectivamente calculables (§ 30), y por otra parte nos capacita para reconocer que nuestro conocimiento acerca de muchas otras funciones es insuficiente para colocarlas en la categoría de funciones efectivamente calculables.

A título de ejemplo de las últimas, sea $R(x, y)$ un predicado efectivamente decidible, y considérese la función $\varepsilon y R(x, y)$ (Gödel 1931) clásicamente definida así,

$$\varepsilon y R(x, y) = \begin{cases} \text{el mínimo } y \text{ tal que } R(x, y), \text{ si } (Ey) R(x, y), \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Esta definición (por sí misma) no suministra un procedimiento de cálculo. Dado $x$, podemos investigar a lo largo de las proposiciones $R(x, 0)$, $R(x, 1)$, $R(x, 2)$, ... sucesivamente, buscando una que sea verdadera, tan lejos como nos plazca; es decir, podemos, en principio, completar el examen de las primeras $n$ de ellas, para cualquier número finito $n$. Si el $x$ dado es tal que $(Ey) R(x, y)$, persistiendo lo bastante, encontraremos eventualmente un primer $y$ para el cual $R(x, y)$ es verdadero, siendo $y$ el valor de la función $\varepsilon y R(x, y)$. Pero si $x$ es tal que $(\overline{Ey}) R(x, y)$, nunca lo llegaremos a saber, por más que persistamos en la búsqueda, que por siempre permanecerá incompleta. El examen completo de todas las $\aleph_0$ proposiciones, que considera la definición clásica, es imposible para un computador humano.

Para algunas elecciones de $R(x, y)$, la función $\varepsilon y R(x, y)$ puede ser, no obstante, efectivamente calculable, no "inmediatamente" sobre la base de su definición, sino a causa de la existencia de algún otro procedimiento para determinar el valor, que, a diferencia del sugerido por la definición, es efectivo por sí mismo. Por ejemplo, cuando $R(x, y) \equiv (x)_0 (y)_0 + (x)_1 (y)_1 = (x)_2$, se sabe que existe un tal procedimiento (cfr. Ejemplo 2 § 30).

La función $\varepsilon y R(x, y)$ es efectivamente calculable, si y solamente si el predicado $(Ey) R(x, y)$ es efectivamente decidible. Porque si $(Ey) R(x, y)$ es efectivamente decidible, entonces dado $x$, para calcular $\varepsilon y R(x, y)$, podemos decidir primeramente si $(Ey) R(x, y)$ es verdadero o no, y según la respuesta o bien buscar el mínimo $y$ tal que $R(x, y)$, o bien tomar 0 como el valor. Inversamente, si $\varepsilon y R(x, y)$ es efectivamente calculable, entonces dado $x$, podemos decidir si $(Ey) R(x, y)$ es verdadero o no, calculando en primer lugar $\varepsilon y R(x, y)$, y asegurándose después de si $R(x, \varepsilon y R(x, y))$ es verdadero o no.

El intuicionista no encuentra justificación a la creencia de que siempre podamos

decir, para un predicado dado $P(y)$, sí o no $(Ey)P(y)$. Este es el fundamento de su no aceptación de la ley de tercero excluido *A o no A*, con el significado que él da a "o" (§ 13). El argumento del intuicionista, aplicado a $R(x, y)$ haciendo el papel de $P(y)$, consiste en que no tenemos base para suponer que, para cualquier $R$, el predicado $(Ey)R(x, y)$ es efectivamente decidible.

La tesis de Church, proporcionando una delimitación precisa de "todas las funciones efectivamente calculables", hace posible demostrar, para ciertos predicados $R(x, y)$, p. ej. $T_1(x, x, y)$ (Teorema XII § 60), que no existe un método uniforme para resolver el problema de sí o no $(Ey)R(x, y)$. Con ello, el argumento de Brouwer, según el cual la creencia de Hilbert en la solubilidad de todo problema matemático es indemostrable, cobra ahora el rigor de una demostración real de no existencia si se toma solubilidad en el sentido de solubilidad uniforme y se acepta la tesis de Church. La relación entre la tesis de Church y el intuicionismo será discutida más adelante (§ 82).

A falta de una prueba de calculabilidad efectiva, el intuicionista no considera a la definición dada anteriormente para $\varepsilon y R(x, y)$ como propiamente definitoria de una función. Pero nuestra discusión de $\varepsilon y R(x, y)$ puede referirse intuicionistamente al predicado $\{R(x, w) \,\&\, (z)_z <_w \bar{R}(x, z)\} \vee \{(\bar{E}y)R(x, y) \,\&\, w = 0\}$. Clásicamente, este predicado, llamémosle "$P(x, w)$", es el predicado representante de $\varepsilon y R(x, y)$. Pero intuicionistamente, podemos no estar capacitados para demostrar que $(x)(E!\, w)P(x, w)$, esto es, que $P(x, w)$ es un predicado representante de una función (cfr. § 41; $(x)[(Ew)P(x, w) \equiv (E!\, w)P(x, w)]$, cfr. *174b, *171).

Aun cuando no podamos demostrar la tesis de Church, puesto que su papel es delimitar de modo preciso una totalidad hasta ahora vagamente concebida, requerimos en cambio evidencia de que no pueda entrar en conflicto con la noción intuitiva a la que se supone completar; es decir, requerimos evidencia de que toda función particular que nuestra noción intuitiva autentificaría como efectivamente calculable, es recursiva general. La tesis puede ser considerada como una hipótesis acerca de la noción intuitiva de calculabilidad efectiva, o una definición matemática de calculabilidad efectiva; en el último caso, se requiere evidencia para dar a la teoría basada en la definición la significación adecuada.

La conversa de la tesis de Church, esto es, que toda función recursiva general $\varphi$ es efectivamente calculable, la tomamos como ya confirmada por la noción intuitiva (cfr. § 60). Utilizamos aquí la definición de 'E define a $\varphi$ recursivamente' que dice que, dado $x_1, \ldots, x_n$, existe siempre una deducción a partir de E de una ecuación $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = \mathfrak{x}$, que expresa que el valor $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es $x$ (o si basamos el procedimiento de computación en el Teorema IX (30), utilizamos (29); o si lo basamos en el Corolario del Teorema IX, utilizamos (1)). Al concluir que poseemos un procedimiento efectivo de computación, el cuantificador existencial que aparece en la definición de 'E define a $\varphi$ recursivamente' (o en (29), o en (1)) ha de ser entendido constructivamente (§ 13); y de modo semejante el cuantificador existencial en la definición de '$\varphi$ es recursiva general', que establece que existe un E que define a $\varphi$ recursivamente (o en el Teorema IX, que puede ser hallado un número de Gödel $e$; o en el Corolario del Teorema IX, que puede ser hallada una secuencia finita de aplicaciones de (I)–(VI)).

En otras palabras, no sostendríamos que una función sea efectivamente calculable sobre la base de que se ha mostrado que es recursiva general, a menos que la demostración de que es recursiva general fuese efectiva (cfr. Church 1936 Nota 10).

Resumimos ahora la evidencia en favor de la tesis de Church (y de la Tesis I*,

final de § 61) bajo tres principales encabezamientos (A)–(C), y un cuarto (D) que puede ser incluido bajo (A). Algo de esta evidencia será dado con más detalle en secciones posteriores.

(A) Evidencia heurística.

(A1) Toda función particular efectivamente calculable, y toda operación para definir efectivamente una función a partir de otras funciones, para las cuales haya sido investigada la cuestión, han resultado ser recursivas generales. Ha sido investigada una gran variedad de funciones efectivamente calculables, de clases de funciones efectivamente calculables, y de operaciones para definir efectivamente funciones a partir de otras funciones, seleccionadas con la intención de agotar tipos conocidos.

(A2) Los métodos para mostrar qué funciones efectivamente calculables son funciones recursivas generales han sido desarrollados hasta un grado que virtualmente excluye la duda de que pudiera describirse un proceso efectivo para determinar los valores de una función que no pudiese ser transformada por estos métodos en una definición recursiva general de la función.

(A3) La exploración de varios métodos de los que pudiera esperarse que condujesen a una función fuera de la clase de las funciones recursivas generales, ha mostrado en todo caso que o bien el método nos conduce realmente fuera de tal clase, o que la nueva función obtenida no puede ser considerada como efectivamente definida, es decir, su definición no proporciona ningún proceso efectivo de cálculo. En particular, esto último es el caso del método de la diagonal de Cantor. (Una ilustración de lo primero será dada en el Ejemplo 1, § 65).

(B) Equivalencia de diversas formulaciones.

(B1) Existen varias caracterizaciones de una clase de funciones efectivamente calculables con la misma propiedad heurística ((A)). Estas han resultado ser equivalentes a la recursividad general, es decir, las clases de funciones descritas por ellas son coextensivas.

Tres nociones surgieron de hecho independiente y casi simultáneamente, a saber, ***recursividad general***, ***λ-definibilidad*** (pasos sucesivos hacia ella fueron dados por Church 1933 y Kleene 1935; cfr. Church 1941), y ***computabilidad*** (Turing 1936-7, Post 1936). La equivalencia (esto es, la coextensividad) de las funciones λ-definibles con las funciones recursivas generales fue demostrada por Church 1936 y Kleene 1936a (cfr. también la referencia al trabajo de Rosser, en Church 1936, Nota 16). La equivalencia de las funciones computables con las λ-definibles (y por tanto con las funciones recursivas generales) fue demostrada por Turing 1937.

La noción de una función ***precisable*** (§ 59), en un cierto sistema formal $S_1$ descrito (muy brevemente) en Gödel 1936, es un cuarto equivalente de recursividad general, bajo la hipótesis de que $S_1$ es simplemente consistente (como señaló Rosser en una recensión 1936a).

Todavía otro intento es dado por Post (1943, 1946) en términos de lo que él llama ***sistemas canónicos y normales***. Lo que este intento da directamente, tal como es presentado, es un equivalente de la enumerabilidad recursiva, pero entonces, como en el Ejemplo 6 § 60, obtenemos un equivalente de la recursividad.

El hecho de que varias nociones que difieren ampliamente conduzcan a la misma clase de funciones es una seria indicación de que esta clase es fundamental.

(B2) De menos peso, pero digna de mención, es la circunstancia de que dife-

rentes formulaciones de las principales nociones son equivalentes; esto es, las nociones poseen una suerte de "estabilidad".

Así, para la recursividad general, puede ser elegido el formalismo en diferentes modos (§ 55). Puede también darse una formulación (***μ-recursividad***) no basada en ningún formalismo, sino utilizando en su lugar los Esquemas (I)–(VI) (Teorema III § 57 y Corolario del Teorema IX § 58), o una que utilice los Esquemas (III), (IV) y (VI) con $x+y, x \cdot y$ y $\delta_y^x$ ($=1$ si $x=y$, $=0$ si $x \neq y$) como funciones iniciales (Kleene 1936b). (Cfr. también Julia Robinson 1950).

La noción de λ-definibilidad tiene las variantes ***λ-K-definibilidad*** (estudiada por Rosser, cfr. Kleene 1936a Nota 12) y ***λ-δ-definibilidad*** (Church 1935). Hay también un desarrollo paralelo, comenzado por Schönfinkel 1924 y Curry (1929, 1930, 1932) y continuado por Rosser (1935, 1942a*) (cfr. también Curry 1948-49), que conduce a una noción que podemos llamar ***definibilidad combinatoria***, demostrada por Rosser ser equivalente a la λ-definibilidad.

Los detalles de la definición de computabilidad pueden ser también variados, como veremos más adelante (Capítulo XIII).

El sistema $S_1$ de Gödel 1936 es el primero en una jerarquía de sistemas $S_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots$) que utilizan tipos de variables sucesivamente más altos (cfr. § 12). Gödel hace notar: "Puede ser mostrado además, que una función que es precisable en uno de los sistemas $S_i$, o incluso en un sistema de orden transfinito, es precisable ya en $S_1$, de suerte que el concepto 'precisable' es en un cierto sentido 'absoluto', mientras que casi todos los conceptos metamatemáticos conocidos hasta el presente (p. ej. demostrable, definible, etc.) dependen muy esencialmente del sistema que se haya tomado como la base". Exactamente las mismas funciones son precisables en nuestro sistema de teoría de números del Capítulo IV, o el de Robinson descrito en el Lema 18b § 49 (por el Teorema 32 § 59 y la equivalencia de reconocibilidad en el sistema $S_1$ de Gödel con la recursividad general). La equivalencia de precisabilidad en estos sistemas descansa en la hipótesis de la simple consistencia para los sistemas de Gödel y nuestro sistema del Capítulo IV. (La simple consistencia del sistema de Robinson será demostrada como Teorema 53 (a) § 79). Otros dos sistemas ($Z^0$) y ($Z_{00}$) que tienen la misma clase de fórmulas precisables son suministrados por Hilbert-Bernays 1939, Suplemento II; son formalizaciones de la $\mu$-recursividad (($Z_{00}$) que utilizan también la forma normal). (Mostowski 1947, basa su versión del Teorema V § 57 en la noción de resolubilidad de un predicado $P$ en un sistema $S$ (§ 59), con $S$ sujeto solamente a algunas condiciones bastante generales. Como más abajo veremos en relación con (D1) y la Tesis II, sólo una función recursiva general puede ser precisable en un sistema $S$ que sea un sistema formal con reglas efectivas; pero Mostowski considera también generalizaciones no-constructivas de sistemas formales en nuestro sentido).

(C) El concepto formulado por Turing de una máquina de computar.

Las funciones computables de Turing (1936-7) son aquéllas que pueden ser computadas por una máquina de un tipo que está diseñado, de acuerdo con el análisis del referido autor, para reproducir todas las clases de operaciones que un computador humano podría llevar a cabo, ejecutándolas de conformidad con instrucciones preasignadas. La noción de Turing es así el resultado de un intento directo de formular matemáticamente la noción de calculabilidad efectiva, mientras las otras nociones surgieron de modo diferente y fueron identificadas después con la calculabilidad efectiva. La formulación de Turing constituye por tanto una aser-

ción independiente de la tesis de Church (en términos equivalentes). Post 1936 adujo una formulación similar.

No todas las investigaciones mencionadas bajo el encabezamiento (A) (especialmente (A1)) fueron realizadas originalmente con vistas a la recursividad general o a las nociones especiales de recursividad subsumidas bajo la recursividad general (§ 55), sino que muchas de ellas lo fueron en orden a la λ-definibilidad (en Kleene 1935) o a la computabilidad (en Turing 1936-7). Pero, en virtud de (B), los varios tipos de evidencia, heurística y no heurística, acumulada en el estudio de las varias nociones se refuerzan mutuamente. La acumulación de métodos, de los que se ha mostrado que son recursivos generales en (A1), constribuye a la admisibilidad de (A2).

El caso comprendido por (A2) será presentado en este capítulo en relación con la teoría de funciones recursivas parciales (cfr. § 66). En el capítulo siguiente nos ocuparemos de la computabilidad, demostrando la equivalencia de ésta con la recursividad general en §§ 68, 69 (cfr. (B1)) e incidentalmente, la equivalencia de ciertas formulaciones diferentes de la computabilidad (cfr. (B2)); en § 70, suministraremos la evidencia en favor de (C).

(D) Lógicas simbólicas y algoritmos simbólicos.

Church 1936 dio (en sustancia) los siguientes argumentos para mostrar "que no es posible obtener, por ninguno de los dos métodos naturalmente aconsejables, una definición de calculabilidad efectiva más general que la anteriormente expuesta" (pág. 358).

(D1) Supóngase que nos las habemos con una función $\varphi(x)$ y un sistema formal con las siguientes características. El conjunto de los axiomas es finito o (si infinito) efectivamente enumerable, y similarmente el conjunto de las reglas de inferencia; y cada regla de inferencia es una operación efectivamente realizable. Podemos reconocer efectivamente una fórmula $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ que atribuye un número $w$ como valor a $\varphi$, para un argumento dado $x$, y leer efectivamente ese numéro partiendo de ella. Las fórmulas $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ que atribuyen a $\varphi$ los valores correctos y solamente los correctos, son demostrables en el sistema; esto es, $\varphi$ es 'precisable' § 59 (salvo que aquí no insistimos en que $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ proceda de algún $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{w})$ al sustituir a x, w por $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}$). Si es legítima la interpretación según la cual la efectividad de las funciones y predicados metamatemáticos cabalmente mencionados implica que las funciones y predicados de teoría de números que les corresponden con arreglo a una numeración de Gödel adecuada, son recursivos generales, entonces $\varphi$ es recursiva general. Pues razonando al igual que en la demostración del Teorema IX § 58 o (c) § 59, para alguna $\psi$ y algún $R$ que sean recursivos generales, $(x)(Ey)R(x,y)$ y $\varphi(x) = \psi(\mu y R(x,y))$; donde tiene aplicación el Teorema III § 57.

(D2) Considérese un algoritmo simbólico para el cálculo de los valores de una función $\varphi(x)$, que consistirá en un método mediante el cual, dado cualquier $x$, puede ser obtenida una secuencia finita de expresiones $\mathrm{E}_{x0}, \mathrm{E}_{x1}, \ldots, \mathrm{E}_{xr_x}$ (en alguna notación) de la siguiente manera. Dado $x$, la primera expresión $\mathrm{E}_{x0}$ puede ser hallada efectivamente. Dados $x$ y las expresiones $\mathrm{E}_{xi}$, para $i \leq j$, puede reconocerse efectivamente si el algoritmo ha terminado (esto es, si $j = r_x$), y si ello es así, el valor $\varphi(x)$ puede ser hallado efectivamente; mientras que en el caso contrario, puede ser hallada efectivamente la expresión subsiguiente $\mathrm{E}_{x,\,j+1}$. Nuevamente pues, si las funciones y predicados efectivos descritos se tornan en

recursivos generales merced a una numeración de Gödel, entonces $\varphi$ es recursiva general. Porque podemos razonar al igual que en (D1), considerando ahora a $(x, E_{x0})$ como análoga a un axioma, y a las operación consistente en pasar de $(x, E_{x0}, ..., E_{xj})$ a $(x, E_{x0}, ..., E_{xj}, E_{x,j+1})$ como análoga a una regla de inferencia.

En resumen, (D1) y (D2) muestran que si las operaciones o reglas individuales de un sistema formal o algoritmo simbólico utilizadas para definir una función son recursivas generales, entonces la totalidad es recursiva general. Así podríamos incluir a (D1) y (D2) como ejemplos particulares de operaciones o métodos de definición bajo (A1).

Obsérvese que (D1) y (D2) se refieren a sistemas formales y algoritmos simbólicos que poseen un tipo especial de estructura, lo que se ejemplifica mediante sistemas formales y algoritmos particulares que ya conocemos. En otros lugares (§§ 30, 60, 61), hemos utilizado "algoritmo" más ampliamente para significar cualquier procedimiento de cálculo (o decisión); y hemos generalizado similarmente la noción de sistema formal en relación con la Tesis II y el Teorema XIII (§ 60). Es obvio que no hay circularidad al añadir la evidencia suministrada por algoritmos y sistemas formales de tipos especiales al caso de la tesis de Church, y aplicar después esa tesis (como en §§ 60, 61) a la discusión de algoritmos y sistemas formales en sentido más amplio.

Si consideramos solamente sistemas que satisfacen la Tesis II (para $n + 1$ variables), la funciones (de $n$ variables) que son precisables en varios sistemas formales (es decir, cada una de ellas en algún sistema), son todas recursivas generales, y por tanto, todas son reconocibles en un sistema (p. ej., cualquiera de los sistemas mencionados en (B2)).

§ 63. **Funciones recursivas parciales.** Sea $R(x, y)$, como se dijo al comienzo de § 62, un predicado efectivamente decidible. Considérese el procedimiento consistente en decidir, para un $x$ dado, sobre la verdad o falsedad de cada una de las proposiciones $R(x, 0)$, $R(x, 1)$, $R(x, 2)$, ..., sucesivamente, hasta encontrar una que sea verdadera, y en tomar el segundo argumento $y$ de tal proposición $R(x, y)$. Este procedimiento conduce, en un número finito de pasos, a un número natural $y$ si y sólo si $(Ey)R(x, y)$. Se lo puede considerar, por tanto, como un algoritmo para calcular una función matemática de $x$ definida sobre el subconjunto $\hat{x}(Ey)R(x, y)$ de los números naturales. La función calculada es 'el mínimo $y$ tal que $R(x, y)$', o, en símbolos, '$\mu y R(x, y)$'.

Puede que sea imposible extender la definición de esta función $\mu y R(x, y)$ a todos los números naturales, de un modo tal que haya un algoritmo para calcular la función de teoría de números, completamente definida, que así resulta. Observábamos en § 62 que la expresión particular $\varepsilon y R(x, y)$ es efectivamente calculable si y solamente si el predicado $(Ey)R(x, y)$ es efectivamente decidible; y el método muestra que ninguna extensión de $\mu y R(x, y)$ a todos los números naturales es efectivamente calculable, a menos que $(Ey)R(x, y)$ sea efectivamente decidible.

Ello puede ser establecido en términos de la teoría de funciones recursivas generales. Church 1936 denominaba *potencialmente recursiva* a una función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ definida sobre un subconjunto de los $n$-tuplos de los números naturales, si existe una función recursiva general $\varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\varphi'(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n)$ para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$, con respecto al cual

es definida $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Pero si $R(x, y)$ es recursivo general, entonces $\mu y R(x, y)$ es potencialmente recursiva si y sólo si $(Ey) R(x, y)$ es recursivo general. Porque

$$(59) \qquad \varepsilon y R(x, y) = \mu w [R(x, w) \vee \{(\overline{Ey}) R(x, y) \& w = 0\}];$$

y, por lo tanto, por # D § 45 y el Teorema II § 57, si $(Ey) R(x, y)$ es recursivo general, entonces $\varepsilon y R(x, y)$ es una extensión recursiva general $\varphi'(x)$ de $\mu y R(x, y)$. Recíprocamente, si $\mu y R(x, y)$ es potencialmente recursiva, con $\varphi'(x)$ como una extensión recursiva general, entonces $(Ey) R(x, y) \equiv R(x, \varphi'(x))$, y por lo tanto $(Ey) R(x, y)$ es recursivo general.

EJEMPLO 1. Por tanto, por el Teorema V (15) § 57, $\mu y T_1(x, x, y)$ no es potencialmente recursiva (Kleene 1938, 1943*), y $\varepsilon y T_1(x, x, y)$ no es recursiva general (Kleene 1936).

Un algoritmo para calcular una función $\varphi$ puede, para un $x$ dado, no conducirnos a un número que sea valor de $\varphi(x)$, bien por no ser terminativo (de suerte que, independientemente del número de pasos que ya se hayan ejecutado, las reglas del algoritmo requieran un siguiente paso), o bien por ser terminativo pero sin aducir un número como valor. Podemos modificar cualquier algoritmo dado de forma que siempre que, para un $x$ dado, el algoritmo dado termine sin producir un número como valor, el nuevo algoritmo dé 0 como valor. El nuevo algoritmo calcula una extensión $\varphi'$ de $\varphi$, definida exactamente cuando el algoritmo original (y el nuevo) es terminativo.

EJEMPLO 1 (continuación). Por tanto, ningún algoritmo que conduzca al número $\mu y T_1(x, x, y)$, para todo $x$ tal que $(Ey) T_1(x, x, y)$, puede ser terminativo para todo $x$ (utilizando la Tesis I § 60).

Si hay un algoritmo para decidir, dado $x$, si la función $\varphi(x)$, calculada por un algoritmo dado, es definida o no, entonces puédese construir un nuevo algoritmo que calcule una extensión $\varphi'(x)$ de $\varphi(x)$ a todos los números naturales (Cfr. asimismo Ejemplo 5 § 64).

EJEMPLO 1 (continuación). Por tanto no hay algoritmo para decidir, dado $x$, si $\mu y T_1(x, x, y)$ es definida o no, como podemos ver también directamente por su condición de definición $(Ey) T_1(x, x, y)$ (cfr. Teorema XII § 60).

Podemos también modificar un algoritmo dado sin necesidad de extender la función $\varphi(x)$ de suerte que, para un $x$ dado, el algoritmo no termine siempre que $\varphi(x)$ sea no definida (como ya fue el caso del algoritmo relativo a $\mu y R(x, y)$ más arriba descrito). Para llevar a cabo tal modificación, disponemos que, cuando el algoritmo dado llegue a término sin dar un número como valor de $\varphi(x)$, el nuevo algoritmo requiera pasos adicionales que continuarán ad infinitum. Al discutir sobre algoritmos en el resto del presente capítulo, asumiremos a menudo tácitamente que los algoritmos son de ese tipo.

Supóngase que $\chi(x)$ es definida sobre todos los números naturales, y que $\psi(x)$ lo es sobre un subconjunto propio de ellos que contiene a todos los números tomados como valores por $\chi(x)$, y que ambas funciones son efectivamente calculables. Entonces $\psi(\chi(x))$ es completamente definida y es efectivamente calcula-

ble. La función $\psi(x)$ podría ser $\mu y T_1(x, x, y)$. Así pues, una función efectivamente calculable que esté restringida a un subconjunto propio de los números naturales, puede ser útil para la construcción de otra función efectivamente calculable definida sobre todos los números naturales.

Existen también problemas en fundamentación de la matemática, que exigen una función que sea efectivamente calculable, y restringida tan sólo a un subconjunto propio de los números naturales. Tal ocurre en la teoría de ordinales constructivos (Church-Kleene 1936, Kleene 1938, Church 1938), y en estudios de lógica intuicionista (cfr. § 82).

Estas consideraciones son indicio de que es deseable incluir funciones parcialmente definidas en nuestro tratamiento de la calculabilidad efectiva. De acuerdo con ello, extenderemos la clase de las funciones recursivas generales tomando en consideración ciertas funciones incompletamente definidas, y denominando a la clase de funciones resultante las 'funciones recursivas parciales'. Las ventajas técnicas de tal extensión de la clase de funciones recursivas generales, aun suponiendo que nuestro propósito fuese tan sólo dar soporte a la tesis de Church para el caso de funciones completamente definidas (Tesis I y I*), se pondrán de manifiesto en §§ 65 y 66. Al final de la presente sección, utilizamos las funciones recursivas parciales en el establecimiento de la tesis de Church para el caso de funciones parcialmente definidas (Tesis I† y I*†).

Al objeto de fijar nuestra terminología, damos el nombre de *función parcial* a una función de cualquier subconjunto (propio o impropio) de $n$-tuplos de números naturales a los números naturales. En otras palabras, una función parcial $\varphi$ es una función que, para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ de números naturales como argumentos, toma todo lo más un número natural $\varphi(x_1, ..., x_n)$ como valor. Para un $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$, con respecto al cual tenga $\varphi$ como valor un número natural, decimos que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ (o $\varphi(x_1, ..., x_n)$) es *definida*; para un $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$, respecto al cual no tenga $\varphi$ un número natural como valor, decimos que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ (o $\varphi(x_1, ..., x_n)$) es *no definida* (escrito, a veces, "u"). El *rango de definición* de una función parcial es el conjunto de los $n$-tuplos $x_1, ..., x_n$ para los cuales $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es definida. Cuando este conjunto consta de todos los $n$-tuplos, tenemos una función de teoría de números ordinaria (*completamente definida*); en caso contrario, una función *incompletamente definida.* Cuando ese conjunto es vacío, tenemos la función *completamente no definida.*

Para obtener la definición de 'función recursiva parcial' (Kleene 1938), adaptamos del modo que sigue a funciones parciales la definición de Herbrand-Gödel de 'función recursiva general'.

Para el caso en que $\psi_1, ..., \psi_l$ sean funciones parciales de $(m_1, ..., m_l$ variables, respectivamente) entendemos ahora naturalmente que $E_{g_1 ... g_l}^{\psi_1 ... \psi_l}$ (cfr. § 54) es el conjunto de las ecuaciones $g_j(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_{m_j}) = \boldsymbol{y}$ donde $\psi_j(y_1, ..., y_{m_j}) = y$, para todo $j = 1, ..., l$, y en el caso de cada $j$, para aquellos $m_j$-tuplos $y_1, ..., y_{m_j}$ para los cuales $\psi_j$ es definida. Entonces, para una función parcial $\varphi$, la definición de E *define a* $\varphi$ *recursivamente en* (o *a partir de*) $\psi_1, ..., \psi_l$, dada en § 54, se leerá correctamente si (a efectos de énfasis) reemplazamos ahora "si y solamente si $\varphi(x_1, ..., x_n) = x''$ por "si y solamente si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es definida y $\varphi(x_1, ..., x_n) = x''$. Podemos utilizar la segunda versión de la definición allí dada (con una propiedad de completud y una de consistencia) si entendemos ahora a $E_f^{\varphi}$ por referencia a una función parcial $\varphi$, en un sentido similar al que se acaba de explicar para $E_{g_1 ... g_l}^{\psi_1 ... \psi_l}$

Finalmente, decimos (en correspondencia con la definición dada en § 55) que una función parcial $\varphi$ es *recursiva parcial en* $\psi_1, ..., \psi_l$, si hay un sistema E de ecuaciones que define $\varphi$ recursivamente a partir de $\psi_1, ..., \psi_l$.

En el caso de un esquema $\varphi = \mathsf{F}(\psi_1, ..., \psi_l)$ donde el rango de $\psi_1, ..., \psi_l$ comprende funciones parciales (sujetas a cualesquiera restricciones establecidas), decimos que $\mathsf{F}$ es *recursivo parcial*, o que $\varphi$ es *uniformemente recursiva parcial en* $\psi_1, ..., \psi_l$, si (para $n, l, m_1, ..., m_l$ fijados) hay un tal sistema E que sea independiente de $\psi_1, ..., \psi_l$. Como ya se hizo antes, omitimos la palabra "uniformemente" salvo a efectos de énfasis.

Tenemos ahora, para el caso en que $\varphi$ no sea previamente conocida (como al final de § 55): Un sistema E de ecuaciones define recursivamente a una función recursiva parcial de $n$ variables, a partir de funciones parciales $\psi_1, ..., \psi_l$, si para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ de números naturales hay todo lo más un numeral $\mathbf{x}$ tal que $\mathrm{E}^{\psi_1 ... \psi_l}_{\mathrm{g}_1 ... \mathrm{g}_l}$, $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ (donde f, $\mathrm{g}_1, ..., \mathrm{g}_l$ son tal como antes se estableció). Aquí no se requiere propiedad de completud. La función definida recursivamente por E es la función $\varphi$ tal que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ sea definida para un $n$-tuplo dado $x_1, ..., x_n$, si y solamente si hay un $\mathbf{x}$ relacionado con este $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$, en cuyo caso $\varphi(x_1, ..., x_n) = x$, donde $x$ es el número del que $\mathbf{x}$ es el numeral.

Las funciones recursivas parciales incluyen a las funciones recursivas generales como a aquéllas para las cuales el rango de definición comprende todos los $n$-tuplos $x_1, ..., x_n$ de números naturales.

Cuando $R(x_1, ..., x_n, y)$ es un predicado recursivo general, la función parcial $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ (definida si y solamente si $(Ey) R(x_1, ..., x_n, y)$, en cuyo caso su valor es el mínimo y tal que $R(x_1, ..., x_n, y)$) es recursiva parcial. Ello ha sido mostrado (sin la actual terminología) como aserción (iv) en la primera parte de la demostración del Teorema IV § 57. (Así pues, $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ es recursiva general exactamente cuando (1b) § 57 sea válida).

EJEMPLO 1 (conclusión). $\mu y T_1(x, x, y)$ es recursiva parcial.

Para funciones parciales $\chi_1, ..., \chi_m$, $\psi$, consideramos a $\psi(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n))$ como definidas cuando y solamente cuando $\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n)$ sean todas definidas y sus valores constituyan un $m$-tuplo para el cual sea definida $\psi$, a no ser que lo hayamos especificado de otra manera. Hablamos entonces del *sentido débil* de $\psi(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n))$. Tal convención se aplicará similarmente a definiciones por sustitución que no aparezcan en esta forma standard (cfr. § 44). La ambigüedad que remueve esa convención surge cuando $\psi$ es una función constante, o se torna tal en una variable por causa de alguna sustitución relativa a otras variables. Por ejemplo ¿tendrá $0 \cdot \chi(x)$ el valor 0 o será no definida, para un $x$ que haga no definida a $\chi(x)$? De acuerdo con nuestra convención, será no definida.

Asimismo empleamos *predicados parciales* con idéntica convención. Por ejemplo, introduciendo por sustitución las funciones parciales $\psi(x_1, ..., x_n)$ y $\chi(x_1, ..., x_n)$ en el predicado completamente definido $y_1 = y_2$, obtenemos un predicado parcial $\psi(x_1, ..., x_n) = \chi(x_1, ..., x_n)$. Este predicad es definido, para $x_1, ..., x_n$ dadas, si y solamente si $\psi$ y $\chi$ son ambas definidas, en cuyo caso el predicado toma como valor una proposición verdadera si $\psi$ y $\chi$ tienen el mismo valor, y una proposición falsa si $\psi$ y $\chi$ tienen valores diferentes.

De modo similar, introduciendo por sustitución los predicados parciales $Q(x_1, ..., x_n)$ y $R(x_1, ..., x_n)$ en la función veritativa $Y_1 \equiv Y_2$ ('equivalencia', § 45), obtenemos un predicado parcial $Q(x_1, ..., x_n) \equiv R(x_1, ..., x_n)$, definido si y solamente si $Q(x_1, ..., x_n)$ y $R(x_1, ..., x_n)$ son ambos definidos, en cuyo caso el predicado obtenido afirma la equivalencia de aquellas dos proposiciones, siendo verdadero o falso según que esas dos proposiciones sean equivalentes o no.

Introducimos ahora "$\psi(x_1, ..., x_n) \simeq \chi(x_1, ..., x_n)$" con objeto de expresar, para $x_1, ..., x_n$ particulares, que si una de las dos funciones $\psi(x_1, ..., x_n)$ y $\chi(x_1, ..., x_n)$ es definida, también lo es la otra y los valores son los mismos (y por tanto, si una de las dos $\psi(x_1, ..., x_n)$ y $\chi(x_1, ..., x_n)$ es no definida, también lo es la otra). La diferencia en el significado de (i) "$\psi(x_1, ..., x_n) = \chi(x_1, ..., x_n)$" y de (ii) "$\psi(x_1, ..., x_n) \simeq \chi(x_1, ..., x_n)$" surge cuando una de las dos funciones $\psi(x_1, ..., x_n)$ y $\chi(x_1, ..., x_n)$ es no definida. Entonces (i) es no definido, mientras (ii) es verdadero o falso según que el otro sea o no no definido. Distinguimos entre $=$ y $\simeq$ como *igualdad débil* y *completa*, respectivamente. Nuestro uso de $\simeq$ constituye una excepción a la convención establecida anteriormente.

De modo similar, "$Q(x_1, ..., x_n) \cong R(x_1, ..., x_n)$" expresará, para $x_1, ..., x_n$ particulares, que si uno de los dos predicados $Q(x_1, ..., x_n)$ y $R(x_1, ..., x_n)$ es definido, también lo es el otro y los dos valores son proposiciones equivalentes (y por tanto, si uno de los dos es no definido, también lo es el otro). Distinguimos $\equiv$ y $\cong$ como *equivalencia débil* y *completa.*

Ahora bien, $(x_1) ... (x_n) [\psi(x_1, ..., x_n) \simeq \chi(x_1, ..., x_n)]$, o $\psi(x_1, ..., x_n) \simeq \chi(x_1, ..., x_n)$ cuando $x_1, ..., x_n$ comportan la interpretación de generalidad, expresan que $\psi$ y $\chi$ son iguales como funciones, es decir, tienen el mismo rango de definición, y sobre este rango común coinciden en valor. Similarmente, $(x_1) ... (x_n) [Q(x_1, ..., x_n) \cong R(x_1, ..., x_n)]$, o $Q(x_1, ..., x_n) \cong R(x_1, ..., x_n)$, bajo la interpretación de generalidad de $x_1, ..., x_n$, expresan que $Q$ y $R$ son iguales como predicados.

Decimos que una función parcial $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es la *función representante* de un predicado $P(x_1, ..., x_n)$, si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ toma como valores solamente a 0 y 1, y

$$P(x_1, ..., x_n) \cong \varphi(x_1, ..., x_n) = 0;$$

o, en otras palabras, si según que el valor de $P(x_1, ..., x_n)$ sea t, f o u, el de $\varphi(x_1, ..., x_n)$ sea 0, 1 ó u.

Decimos que una función parcial $\varphi$ o predicado parcial $P$ es *recursivo parcial en* predicados y funciones $\Psi$, si es válida la aserción correspondiente que surge al reemplazar los predicados que figuran en $P$, $\Psi$, por sus funciones representantes.

El papel de los predicados de igualdad $=$ y $\simeq$ será diferente. La igualdad débil $=$ servirá como operación para construir predicados recursivos parciales. Veremos de inmediato (Teorema XVII # # 14, C†) que $\psi(x_1, ..., x_n) = \chi(x_1, ..., x_n)$ es recursivo parcial en $\psi$ y en $\chi$. La igualdad completa $\simeq$ será utilizada para dar expresión a nuestra teoría acerca de funciones recursivas parciales. El predicado $\psi(x_1, ..., x_n) \simeq \chi(x_1, ..., x_n)$ no es siempre recursivo parcial cuando $\psi$ y $\chi$ son recursivas parciales (cfr. Ejemplo 7 § 64).

Observaciones similares se aplican a las dos equivalencias $\equiv$ y $\cong$ (cfr. Teorema XVII # D† y Ejemplo 8 § 64).

Las funciones y predicados particulares de # # 1–21 (§§ 44, 45), al ser recursivos primitivos, son recursivos generales (Teorema II § 55) y por tanto, recur-

sivos parciales. Reescribiendo los Esquemas (IV) y (V) (§ 43) con "$\simeq$" en lugar de "$=$", y haciendo uso de nuestra convención para leer las expresiones de la derecha en el sentido débil, la noción '$\varphi$ es recursiva primitiva en $\Psi$' toma un significado para el caso en que las funciones y predicados supuestos sean parcialmente definidos. Por ejemplo, en una recursión primitiva (Va), para un $y$ dado, $\varphi(y')$ es definida si y solamente si $\varphi(y)$ es definida y $\chi(y, z)$ es definida cuando $z$ es el valor de $\varphi(y)$ (de donde, por inducción, solamente si todas las funciones $\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(y)$ son definidas). La noción se extiende de funciones a predicados por medio de las funciones representantes. Ahora tienen aplicación las anteriores demostraciones de # # A–G (§§ 44, 47), supuesto que entendamos a las funciones y predicados resultantes en los apropiados sentidos débiles, p. ej., $\sum_{y<z} \psi(y)$ es definida cuando y solamente cuando todas las funciones $\psi(0), ..., \psi(z-1)$ son definidas, $Q \vee R$ cuando y solamente cuando ambos $Q$ y $R$ son definidos, $(Ey)_{y<z} R(y)$ cuando y solamente cuando $R(0), ..., R(z-1)$ lo son, etc. En cada uno de los anteriores casos, el sentido débil apropiado es fácilmente inferido de la demostración. Pero también, con estos mismos sentidos para (IV) y (V), la demostración del Teorema II (§§ 54, 55) continúa manteniéndose. De donde:

TEOREMA XVII. (a) *Cualquier función $\varphi$, definible a partir de funciones parciales $\Psi$ por una sucesión de aplicaciones de esquemas recursivos parciales, es recursiva parcial en $\Psi$. Los Esquemas* (I)–(V) *son recursivos parciales.* (b) *Las funciones y predicados de* # # 1–21 *son recursivos parciales; y* # # A–G *son válidos leyendo "recursivo parcial" en lugar de "recursivo primitivo", y utilizando los sentidos débiles de las funciones y predicados resultantes* (a efectos de lo cual hablaremos de # # $A^{\dagger}$–$G^{\dagger}$).

Anteriormente hemos utilizado el operador $\mu$ para formar $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ como una función parcial a partir de un predicado completamente definido $R(x_1, ..., x_n, y)$. Ahora, cuando $R(x_1, ..., x_n, y)$ es cualquier predicado parcial, consideramos a $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ como definida cuando y solamente cuando hay un $y$ tal que $R(x_1, ..., x_n, y)$ es verdadero, y $R(x_1, ..., x_n, y), ..., R(x_1, ..., x_n, y-1)$ son todos definidos, en cuyo caso el valor de esa función es el mínimo $y$ que cumpla tales condiciones. Por ejemplo, si $R(0) \cong R(1) \cong \mathfrak{f}, R(2) \cong \mathfrak{t}$, entonces $\mu y R(y) \simeq 2$; pero si $R(0) \cong \mathfrak{f}$, $R(1) \cong \mathfrak{u}$, $R(2) \cong \mathfrak{t}$, entonces $\mu y R(y) \simeq \mathfrak{u}$.

Podemos ahora considerar (VI) § 57, leyendo "$\simeq \mu y$" en lugar de "$= \mu y$", como un esquema para cualquier función parcial dada $\chi(x_1, ..., x_n, y)$ o predicado parcial dado $R(x_1, ..., x_n, y)$. Sean establecidas las ecuaciones E tal y como lo fueron en la demostración del Teorema III. Si $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ es definida, entonces $E_h^{\chi}$, $E \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ cuando $x = \mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ y para ningún otro numeral $\mathbf{x}$, tal y como anteriormente ((iii) § 57). Y a la inversa, si $E_h^{\chi}$, $E \vdash f(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ donde $\mathbf{x}$ es un numeral, entonces son satisfechas las actuales condiciones para que $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ sea definida (observando que para # $B^{\dagger}$, $\prod_{s<y} \chi(x_1, ..., x_n, s)$ es definida solamente si $\chi(x_1, ..., x_n, s)$ para $s = 0, 1, ..., y-1$ son todos definidos). Así:

TEOREMA XVIII (= Teorema III†). *El Esquema* (VI) *es recursivo parcial.* De donde, por el Teorema XVII: *Toda función* $\varphi$ *definible a partir de funciones y predicados parciale.* $\Psi$ *por aplicaciones de* (I)–(VI) *es recursiva parcial en* $\Psi$.

Vemos ahora qué sucede en la demostración del Teorema de la forma normal (Teorema IX § 58) cuando tomamos a $\varphi(x_1, ..., x_n)$ como una función recursiva parcial. Supóngase que E define a $\varphi$ recursivamente. Ahora (24) y (26) no son necesariamente válidos, pero en cambio, omitiendo los cuantificadores universales, obtenemos (de (26)) $(Ey)S_n(e, x_1, ..., x_n, y)$ como la condición impuesta sobre $x_1, ..., x_n$ de que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ sea definida. También (25) y, por tanto, (27) son válidos con "$\simeq$" en lugar de "$=$"; y (28) es válido no con la interpretación de generalidad, sino por cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ respecto al cual sea definida $\varphi(x_1, ..., x_n)$. Pero según nuestro significado del $\mu$-operador aplicado a un predicado completamente definido, $U(\mu y S_n(e, x_1, ..., x_n, y))$ es definido exactamente cuando $(Ey)\, S_n(e, x_1, ..., x_n, y)$. Por tanto los dos miembros de (28) tienen el mismo rango de definición, y así (28) con "$=$" reemplazado por "$\simeq$" es válido para todo $x_1, ..., x_n$. La demostración dada para el Teorema IX* (englobado en el Teorema X) discurre con las mismas modificaciones, requiriéndose que las funciones supuestas $\psi_1, \ldots, \psi_l$ sean completamente definidas (en otro caso, p. ej. $(Eu_1)_{u_1 < y}\, [Nu((y)_{0,1,1}, u_1)\ \&\ Nu((y)_{0,2}, \psi(u_1))]$ en 0Df12*, e igualmente $\widetilde{\psi}(y)$, podrían ser no definidos en algún caso en el que, con vistas a la demostración, necesitásemos que fuesen definidos). Así:

TEOREMA XIX. (a) (= Teorema IX†). *Dada cualquier función recursiva parcial* $\varphi(x_1, ..., x_n)$, *puede ser hallado un número* $e$ *tal que*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) \simeq U(\mu y T_n(e, x_1, ..., x_n, y)) \tag{60}$$

*(de suerte que* $(Ey)\, T_n(e, x_1, ..., x_n, y)$ *es la condición de definición de la función* $\varphi(x_1, ..., x_n)$*), y*

$$(x_1) ... (x_n)\, (y)\, [T_n(e, x_1, ..., x_n, y) \to U(y) \simeq \varphi(x_1, ..., x_n)]. \tag{61a}$$

(b) (= Teorema IX*†). *De manera similar, leyendo "recursiva parcial en* $\Psi$", "$T_n^{\Psi}$" *en lugar de "recursiva parcial", "*$T_n$", *respectivamente, donde "*$\Psi$" *hace las veces de cualesquiera funciones y predicados completamente definidos* $l$ ($\geq 0$) *de* $m_1, ..., m_l$ *variables, respectivamente.*

Extendiendo las definiciones dadas en § 58, decimos que cualquier número $e$ tal que haga válido a (60) (y por tanto a (61a)) *define recursivamente a* $\varphi$ o es un *número de Gödel de* $\varphi$; y similarmente en el caso de una función $\varphi$ recursiva parcial en funciones completamente definidas $\Psi$. Estas nociones se extienden a un predicado $P$ con función representante $\varphi$, al igual que anteriormente.

Por la demostración del Teorema XIX, si E es un sistema de ecuaciones que define recursivamente a $\varphi$ (recursivamente a partir de una $\Psi$ completamente definida, con apropiadas letras de función dadas), y $e$ es el número de Gödel de E, entonces $e$ define recursivamente a $\varphi$ (recursivamente a partir de $\Psi$).

EJEMPLO 2. Sean $f$ y $g$ números de Gödel de funciones recursivas parciales $\psi$ y $\chi$, respectivamente. Entonces el predicado $\psi(x) \simeq \chi(x)$ está expresado por

$$(y)\,[\{T_1\,(f,x,y)\rightarrow(Ez)\,(T_1\,(g,x,z)\,\&\,U\,(y)=U\,(z))\}$$
$$\&\ \{T_1(g,x,y)\rightarrow(Ez)\,(T_1\,(f,x,z)\,\&\,U\,(y)=U\,(z))\}\,].$$

COROLARIO. *Toda función recursiva parcial* $\varphi$ (*función* $\varphi$ *recursiva parcial en funciones y predicados* $\Psi$ *completamente definidos*) *es definible* (*definible a partir de* $\Psi$) *por aplicaciones de los Esquemas* (I)–(VI).

El algoritmo suministrado por (60) para calcular una función recursiva parcial $\varphi$, es del tipo no-terminativo cuando $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es no definida.

Según el teorema, una función recursiva parcial $\varphi(x_1, ..., x_n)$ tiene un rango de definición de la forma $\hat{x}\,(Ey)\,R\,(x_1, ..., x_n, y)$ donde $R$ es recursivo primitivo, o, en otras palabras, para $n = 1$ el rango de definición (si tiene un miembro) es recursivamente enumerable (Teorema XIV § 60).

EJEMPLO 3. De donde, por el Teorema V (12) § 57, ninguna función parcial con $\hat{x}\,(y)\,\overline{T}_1\,(x, x, y)$ como su rango de definición, es recursiva parcial. Es imposible idear un algoritmo que conduzca a algún número natural para exactamente aquellas $x$'s tales que $(y)\,\overline{T}_1\,(x, x, y)$ y ningunas otras (por la Tesis I† (a) más adelante). En particular, la función $\varphi$ definida así,

$$\varphi(x) \simeq \begin{cases} 0 \text{ si } (y)\,\overline{T}_1\,(x,x,y), \\ u \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

no es recursiva parcial. Esta función es efectivamente calculable para las $x$'s en su rango de definición, y es potencialmente recursiva.

Establecemos ahora la tesis de Church para el caso de funciones parciales, teniendo en cuenta los Ejemplos 1 y 3. Denominamos *potencialmente recursiva parcial* a una función parcial $\varphi(x_1, ..., x_n)$, si hay una función recursiva parcial $\varphi'(x_1, ..., x_n)$ tal que $\varphi'(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n)$ sobre el rango de definición de $\varphi$. La tesis será establecida en dos partes, según que deseemos que el procedimiento efectivo de cálculo no conduzca a ningún valor de función que esté fuera del rango de definición de la función en cuestión, o simplemente nos desentendamos de lo que suceda fuera de este rango.

EJEMPLO 4. Muéstrese que: Si $\varphi(x)$ es potencialmente recursiva parcial y tiene un rango de definición de la forma $\hat{x}\,(Ey)\,R\,(x, y)$ donde $R$ es recursivo general, entonces $\varphi(x)$ es recursiva parcial.

TESIS I†. (a) *La función que cualquier algoritmo calcula* (*siendo la función no definida con respecto a cada n-tuplo de argumentos para los cuales no conduce el algoritmo a un número natural como valor*) *es recursiva parcial.* (b) *Toda función parcial que es efectivamente calculable* (*en el sentido de que hay un algoritmo mediante el cual puede ser calculado su valor para todo n-tuplo que pertenezca a su rango de definición*) *es potencialmente recursiva parcial.*

La tesis puede ser también redactada con aplicación a predicados.

Para $l$ ($\geq 0$) funciones y predicados $\Psi$ supuestos, tenemos una Tesis I*† correspondiente que incluye el caso de uniformidad.

La mayor parte de nuestro tratamiento de funciones recursivas parciales en $l$ funciones y predicados $\Psi$ supuestos, estará limitado (para $l > 0$) al caso en que cada una de las funciones y predicados $\Psi$ sea completamente definido, o que sea incompletamente definido pero recursivo parcial, o que sea recursivo parcial en funciones completamente definidas. Estos tipos de funciones incompletamente definidas han sido introducidos para satisfacer las exigencias de la teoría de algoritmos (incluyendo reducciones de problemas de decisión), porque puede que sea imposible completar la definición de una tal función y disponer, aún, de un algoritmo para ella. Fuera de la teoría de algoritmos, una razón similar para no completar las definiciones de funciones de teoría de números incompletamente definidas, no es claramente patente (cfr. Ejemplo 4 § 64).

EJEMPLO 5. Si $\psi(x)$ es una función parcial con el rango de definición $\hat{x}(Ey) R(x, y)$ (o $\hat{x} R(x)$) donde $R$ es un predicado completamente definido, entonces hay una función completamente definida $\psi^{c}(x)$ recursiva primitiva en $\psi$, $R$ tal que $\psi$ es recursiva parcial en $\psi^{c}$. Porque sea $C = \hat{x}(Ey) R(x, y)$; supóngase que $\theta$ enumera recursivamente a $\{0\} + C'$ (cfr. Ejemplo 6 § 60); y sea

$$\psi^{c}(\hat{y}) = 2^{\theta(y)} \cdot 3^{\eta(\theta(y))} \text{ donde } \eta(0) = 0, \eta(x') \simeq \psi(x).$$

Ahora $\psi(x) \simeq (\psi^{c}(\mu y [(\psi^{c}(y))_0 = x']))_1$.

EJEMPLO 6. $W_0(x, \mu y [W_0(x, y) \vee W_1(x, y)])$ es un predicado recursivo parcial (cfr. § 61), pero no es potencialmente recursivo.

**§ 64. La lógica trivalente.** En la presente sección introducimos nuevos sentidos de las conectivas proposicionales, donde p. ej., $Q(x) \vee R(x)$ será definido en algunos casos en los que $Q(x)$ o $R(x)$ sean no definidos.

Será conveniente utilizar tablas veritativas, con tres "valores de verdad" t ('verdadero'), f ('falso') y u ('no definido'), al describir los sentidos que ahora tendrán las conectivas.

Procede hacer algunas observaciones para justificar el uso que hacemos aquí de tablas de verdad desde el punto de vista finitista, y para explicar cómo nos hemos inclinado a elegir las tablas particulares que se ofrecen más adelante.

Desde el punto de vista intuicionista, estaba justificado que recurriésemos a la lógica clásica bivalente al hacer uso de las conectivas para la construcción de predicados recursivos primitivos y generales, puesto que, para todo predicado recursivo general, hay un procedimiento decisorio; es decir, está demostrado intuicionistamente que la ley de tercero excluido se aplica a predicados recursivos generales.

Ahora bien, si $Q(x)$ es un predicado recursivo parcial, hay un procedimiento decisorio para $Q(x)$ sobre su rango de definición, y así la ley de tercero o "medio" excluido (que dice que, para cada $x$, $Q(x)$ es o t o f) se aplica intuicionistamente sobre dicho rango de definición. Pero puede que no haya un algoritmo para decidir, dado $x$, si $Q(x)$ es definido o no (p.ej., no lo hay cuando $Q(x)$ es $\mu y T_1(x, x, y) = 0$). Por tanto, sólo desde el punto de vista clásico, pero no desde el intuicionista, poseemos una ley de cuarto excluido (que dice que, para cada $x$, $Q(x)$ es o t, o f, o u).

De este modo, el tercer "valor de verdad" u no guarda semejanza con los

otros dos t y f en nuestra teoría. La consideración de su estatuto mostrará que estamos limitados a un tipo especial de tabla de verdad.

Al afirmar p. ej. que $Q(x) \vee R(x)$ es (uniformemente) recursivo primitivo o parcial en $Q$ y $R$, afirmamos la existencia de un algoritmo para obtener el valor de verdad de $Q(x) \vee R(x)$ a partir de los de $Q(x)$, y $R(x)$. A su vez, en el caso parcial u tendrá un estatuto diferente del de t y f.

Supóngase que vamos a seleccionar una tabla de verdad para $Q \vee R$, de suerte que $Q(x) \vee R(x)$ sea (uniformemente) recursivo parcial en $Q$ y $R$. Discutamos ello, de momento, heurísticamente, identificando recursividad parcial con decidibilidad efectiva, preguntamos si somos capaces de decidir mediante un algoritmo si, dado $x$, $Q(x) \vee R(x)$ es t o f (si es definido), partiendo de la información de que $Q(x)$ es t o es f (si es definido), y de igual información acerca de $R(x)$. La información de que $Q(x)$ es u no es utilizable por el algoritmo; u significa tan sólo la ausencia de información de que $Q(x)$ es t o es f. Si en el caso de que $Q(x)$ sea u, el algoritmo da, p. ej., t como valor a $Q(x) \vee R(x)$, la decisión para llegar a tal resultado (para los $x$ y $R(x)$ dados) no debe haber dependido de la información acerca de $Q(x)$ (puesto que no había ninguna al respecto que fuese disponible). En particular, si se cambiase el valor de $Q(x)$ a t o a f, sin cambiar el de $R(x)$, se llegaría también a idéntica decisión.

La misma conclusión se obtiene si, en lugar de ello, suponemos simplemente que $Q(x) \vee R(x)$ es recursivo parcial siempre que $Q$ y $R$ sean recursivos parciales. En general, un algoritmo para $Q(x) \vee R(x)$ (ab initio) tendrá acceso a información acerca de $Q(x)$ y $R(x)$, sólo por el uso de algoritmos para $Q(x)$ y $R(x)$ que estén incorporados en él. Una decisión alcanzada por aplicación del algoritmo para $Q(x) \vee R(x)$, p. ej. que t es el valor, debe haberse basado en información acerca de $Q(x)$ y acerca de $R(x)$, que haya sido producida en algunos estadios finitos de la aplicación de los algoritmos correspondientes a $Q(x)$ y $R(x)$. En cualquier estadio del algoritmo correspondiente a $Q(x)$, o bien habremos hallado que $Q(x)$ es t, o bien que $Q(x)$ es f, o no habremos averiguado el valor de verdad de $Q(x)$. Si $Q(x)$ es realmente u, no podemos averiguarlo prosiguiendo el algoritmo, sino en todo caso, y tan sólo, por cualquier otro medio, como por algún razonamiento metateórico acerca del algoritmo. Para ciertos $Q$ especiales, podríamos recurrir a otro algoritmo que nos dijese también cuándo $Q(x)$ es u, pero esto no puede hacerse en general. Así pues, si cuando $Q(x)$ es u, $Q(x) \vee R(x)$ recibe el valor t, la decisión debe (en el caso general) haber sido obtenida ignorando el valor de verdad de $Q(x)$, y contemplando la posibilidad de que, en algún estadio de la aplicación del algoritmo para $Q(x)$ posterior al último examinado, pueda hallarse que $Q(x)$ es t o es f.

Al final de esta sección (Teorema XXI y Ejemplos 6–8), se darán demostraciones en términos de la teoría de funciones recursivas parciales que confirman estos argumentos heurísticos (extendiéndolos a otros operadores distintos de las conectivas proposicionales).

Concluimos que, al objeto de que las conectivas proposicionales sean operaciones recursivas parciales (o, al menos, produzcan predicados recursivos parciales cuando se las aplique a predicados recursivos parciales), hemos de elegir para ellas tablas que sean *regulares*, en el siguiente sentido: Una columna (fila) dada contiene t en la fila (columna) de la u, solamente si la columna (fila) consta enteramente de casos de t's; y similarmente en lo que respecta a f.

Cuando extendimos # D desde la recursividad primitiva a la parcial, trasla-

dando sustancialmente a esta última las anteriores demostraciones (# $D^{\dagger}$ del Teoremos XVII § 63), estábamos utilizando las conectivas proposicionales en sus *sentidos débiles*, que son descritos por las tablas trivalentes (las *tablas débiles*) obtenidas de las tablas clásicas bivalentes introduciendo en ellas $\mathfrak{u}$ a lo largo de la fila y columna encabezada por $\mathfrak{u}$. Tales tablas son (trivialmente) regulares.

Ahora introducimos los *sentidos fuertes* de las conectivas proposicionales, descritos por las siguientes *tablas fuertes.*

| $\overline{Q}$ | |
|---|---|
| $Q$ t | f |
| f | t |
| u | u |

| $Q \vee R$ | $R$ t | f | u |
|---|---|---|---|
| $Q$ t | t | t | t |
| f | t | f | u |
| u | t | u | u |

| $Q \,\&\, R$ | $R$ t | f | u |
|---|---|---|---|
| $Q$ t | t | f | u |
| f | f | f | f |
| u | u | f | u |

| $Q \rightarrow R$ | $R$ t | f | u |
|---|---|---|---|
| $Q$ t | t | f | u |
| f | t | t | t |
| u | t | u | u |

| $Q \equiv R$ | $R$ t | f | u |
|---|---|---|---|
| $Q$ t | t | f | u |
| f | f | t | u |
| u | u | u | u |

De estas tablas, solamente las correspondientes a $\vee$, & y $\rightarrow$ difieren de las respectivas tablas débiles. De aquí en adelante $^{-}$, $\vee$, &, $\rightarrow$ y $\equiv$ aplicadas a predicados parciales, serán entendidas en esos sentidos fuertes, excepto cuando se establezca de otro modo.

EJEMPLO 1. Ahora cabe establecer (61a) así:

(61b) $\quad (x_1) \ldots (x_n)\,(y)\,[T_n\,(e, x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow U\,(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)]$.

Aserciones de la forma "Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es definida, entonces ...", donde la conclusión carece de sentido cuando $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es no definida, pueden ser entendidas así como usos de la $\rightarrow$ fuerte. (Tales aserciones ocurrieron ya en § 63).

Estas tablas fuertes están determinadas de modo único como las extensiones regulares de mayor fuerza posible de las tablas clásicas bivalentes, es decir, son regulares y tienen una t o una f en cada posición donde cualquier extensión regular de las tablas bivalentes pueda tener una t o una f (si t o f están determinadas de modo único).

Ofrecemos las tres tablas siguientes como ejemplos de tablas irregulares. La presente lógica trivalente fuerte (Kleene 1938) no es la misma que la original lógica trivalente de Lukasiewicz (1920; cfr. Lewis y Langford 1932 págs. 213 ss.), que difiere de ella por tener t en lugar de u en la Fila 3 Columna 3 de las tablas para $\rightarrow$ y $\equiv$ (que etiquetamos aquí como $\rightarrow_{\mathrm{L}}$ y $\equiv_{\mathrm{L}}$).

| $Q \rightarrow_{\mathrm{L}} R$ | $R$ t | f | u |
|---|---|---|---|
| $Q$ t | t | f | u |
| f | t | t | t |
| u | t | u | t |

| $Q \equiv_{\mathrm{L}} R$ | $R$ t | f | u |
|---|---|---|---|
| $Q$ t | t | f | u |
| f | f | t | u |
| u | u | u | t |

| $Q \cong R$ | $R$ t | f | u |
|---|---|---|---|
| $Q$ t | t | f | f |
| f | f | t | f |
| u | f | f | t |

De la discusión introductoria concluimos además que, para las definiciones de operaciones recursivas parciales, t, f, u han de ser susceptibles de admitir, junto al significado (i) 'verdadero', 'falso', 'no definido', otro distinto, a saber: (ii) 'ver-

dadero', 'falso', 'no conocido (o valor indiferente)'. Aquí, 'no conocido' es una categoría dentro de la cual podemos considerar que cae cualquier proposición, cuyo valor o bien no nos es conocido, o bien preferimos, de momento, no considerarlo; sin que ello excluya entonces las otras dos posibilidades, 'verdadero' y 'falso'.

EJEMPLO 2. Supóngase que, para un $x$ dado, sabemos que $Q(x)$ es no definido y que $R(x)$ es falso. Entonces, usando $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ como 'verdadero', 'falso', 'no definido' ((i)), podemos concluir, por la entrada de la Fila 3 Columna 2 en la tabla para $\vee$, que $Q(x) \vee R(x)$ es no definido.

EJEMPLO 3. Supóngase que, para un $x$ dado, sabemos que $Q(x)$ es verdadero. Entonces, usando $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ como 'verdadero', 'falso', 'no conocido', (ii), podemos concluir, por la entrada de la Fila 1 Columna 3, que $Q(x) \vee R(x)$ es verdadero. Para sacar esta conclusión utilizando las tablas con el Significado (i), necesitaríamos hacer uso de la ley clásica de cuarto excluido, del siguiente modo: $R(x)$ es, o bien $\mathfrak{t}$, o bien $\mathfrak{f}$, o bien $\mathfrak{u}$; y en cada una de las entradas: Fila 1 Columna 1, Fila 1 Columna 2, y Fila 1 Columna 3, aparecería una $\mathfrak{t}$.

Desde este punto de vista, el significado de $Q \vee R$ se revela claramente mediante el aserto en términos verbales: $Q \vee R$ es verdadero, si $Q$ es verdadero (nada se dice aquí acerca de $R$) o si $R$ es verdadero (similarmente); falso, si $Q$ y $R$ son ambos falsos; definido, solamente en estos casos (y por tanto, no definido en caso contrario).

La lógica trivalente fuerte puede ser aplicada a predicados completamente definidos $Q(x)$ y $R(x)$, a partir de los cuales se forman predicados compuestos mediante el uso de $\bar{}$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\equiv$ en los usuales significados bivalentes, a la manera siguiente. (iii) Supóngase que hay algoritmos fijos que deciden la verdad o falsedad de $Q(x)$ y de $R(x)$, cada uno de ellos sobre un subconjunto de los números naturales (como ocurre p. ej. después de completar las definiciones de cualesquiera dos predicados recursivos parciales al modo clásico). Supongamos que $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ significan 'decidible por los algoritmos (esto es, por el uso de sólo aquella información acerca de $Q(x)$ y $R(x)$ que pueda ser obtenida por los algoritmos) que es verdadero', 'decidible por los algoritmos que es falso', 'indecidible por los algoritmos si es verdadero o falso'. (iv) Supóngase un estado fijo de conocimiento acerca de $Q(x)$ y $R(x)$ (como ocurre p. ej. tras haber aplicado los algoritmos correspondientes a cada uno de ellos hasta un estadio dado). Asignemos a $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ el significado de 'conocido que es verdadero', 'conocido que es falso', 'no conocido si es verdadero o falso'.

Las tres equivalencias clásicas siguientes

(62) $Q \,\&\, R \cong \overline{\bar{Q} \vee \bar{R}}$,

(63) $Q \rightarrow R \cong \bar{Q} \vee R$,

(64) $$Q \equiv R \cong (Q \rightarrow R) \,\&\, (R \rightarrow Q)$$

son válidas, como podrá verificar el lector construyendo las tablas para los miembros de la derecha, y comparándolas con las tablas dadas para los miembros de la izquierda. Pero, p. ej., $Q \,\&\, (R \vee \bar{R}) \cong$ (cfr. *52 § 27) no es válida (cuando $Q$ es $\mathfrak{t}$ y $R$ es $\mathfrak{u}$, el miembro izquierdo es $\mathfrak{u}$ y el derecho es $\mathfrak{t}$).

Merced al uso de las tablas trivalentes cabe construir las demostraciones de (62)–(64), mostrando que si uno cualquiera de los miembros es definido, el otro también lo es y tiene el mismo valor (como afirma $\cong$), usando la ley de tercero excluido sobre los rangos de definición. Esta ley la hemos admitido en los casos en que $Q$ y $R$ sean recursivos parciales; y las equivalencias en el caso general, se sujetan a ella intuicionistamente a título de hipótesis. Observaciones similares se aplican a (65).

Los sentidos fuertes son aplicados a los cuantificadores ligados de la siguiente forma. Para cada $z > 0$, $(Ey)_{y<z} R(y) \cong R(0) \vee \ldots \vee R(z-1)$; y $(Ey)_{y<0} R(y) \cong \mathfrak{f}$. Expresado en palabras, $(Ey)_{y<z} R(y)$ es verdadero, si $R(y)$ es verdadero para algún $y < z$; falso, si $R(y)$ es falso para todo $y < z$; definido, solamente en estos casos.

Similarmente, para cada $z > 0$, $(y)_{y<z} R(y) \cong R(0) \,\&\, \ldots \,\&\, R(z-1)$; y $(y)_{y<0} R(y) \cong \mathfrak{t}$.

Tenemos entonces

$$(65) \qquad (y)_{y<z} R(y) \cong (\overline{Ey})_{y<z} \overline{R}(y).$$

De modo similar, damos sentidos fuertes a los cuantificadores no ligados, considerando que $(Ey) R(y)$ es la disyunción fuerte de $R(y)$ para $y = 0, 1, 2, \ldots$, y que $(y) R(y)$ es la conjunción fuerte.

Dicho en términos verbales, $(Ey) R(y)$ es verdadero, si $R(y)$ es verdadero para algún número natural $y$; falso, si $R(y)$ es falso para cada $y$; definido, solamente en estos casos. (Entonces, $(y) R(y) \cong \overline{(Ey)}\, \overline{R}(y)$). A diferencia de los cuantificadores ligados (Teorema XX (b)), los cuantificadores no ligados no son, sin duda, operaciones recursivas parciales (Teorema V § 57).

EJEMPLO 4. Considérese la clase de los predicados expresables en la forma $(Ey) R(x, y)$ siendo $R$ recursivo parcial. Las definiciones de todos los predicados incompletamente definidos de esta clase, pueden ser completadas sin salir fuera de esa clase (de hecho, con un $R$ recursivo primitivo). Porque si $r$ es un número de Gödel de $R(x, y)$, entonces $(Ey)[T_2(r, x, (y)_0, (y)_1) \,\&\, U((y)_1) = 0]$ es completamente definido y $\equiv (Ey) R(x, y)$ sobre el rango de definición del último. Similarmente para la forma $(y) R(x, y)$. (cfr. Kleene 1943 pág. 57 Teorema VI).

TEOREMA XX. (a) *El predicado (fuerte)* $\overline{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ *es recursivo parcial en el predicado* $Q$. *Los predicados (fuertes)*

$$Q(x_1, \ldots, x_n) \vee R(x_1, \ldots, x_n),\ Q(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, R(x_1, \ldots, x_n),$$

$$Q(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(x_1, \ldots, x_n) \text{ y } Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(x_1, \ldots, x_n)$$

*son recursivos parciales en los predicados* $Q$ *y* $R$.

(b) *Los predicados (fuertes)* $(Ey)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *y* $(y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *son recurivos parciales en el predicado* $R$.

(c) Definición (fuerte) por casos. *La función* $\varphi$ *definida por*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ si } Q_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \text{ si } Q_m(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

*donde* $Q_1, \ldots, Q_m$ *son mutuamente exclusivos (bajo la interpretación que dice que* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *será* $\simeq \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ *si* $Q_i(x_1, \ldots, x_n)$ *es verdadero, indepen-*

*dientemente de* $\varphi_j(x_1, ..., x_n)$ *y* $Q_j(x_1, ..., x_n)$ *para todo* $j \neq i$), *es recursiva parcial en* $\varphi_1, ..., \varphi_m, Q_1, Q_m$.

DEMOSTRACIONES. (a) Para tratar $Q \vee R$ por ejemplo, sean $\psi(x_1, ..., x_n)$, $\chi(x_1, ..., x_n)$ y $\varphi(x_1, ..., x_n)$ las funciones representantes de $Q(x_1, ..., x_n)$, $R(x_1, ..., x_n)$ y $Q(x_1, ..., x_n) \vee R(x_1, ..., x_n)$, respectivamente. Considérense las ecuaciones

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \sigma(0)=0, \qquad \tau(1,1)=1, \\ \varphi(x_1, ..., x_n) = \sigma(\psi(x_1, ..., x_n)), \\ \varphi(x_1, ..., x_n) = \sigma(\chi(x_1, ..., x_n)), \\ \varphi(x_1, ..., x_n) = \tau(\psi(x_1, ..., x_n), \chi(x_1, ..., x_n)), \end{cases}$$

donde $\sigma$ y $\tau$ son funciones auxiliares parcialmente definidas. Traduciendo estas ecuaciones (A) al simbolismo formal de funciones recursivas (§ 54), obtenemos un sistema E que define a $\varphi$ recursivamente a partir de $\psi$, $\chi$.— El método que se acaba de ilustrar es aplicable a cualquier tabla regular. (Alternativamente, cabe tratar así las otras conectivas, observando que $\bar{Q}$ ha sido ya tratada en $D^\dagger$ del Teorema XVII, puesto que la tabla fuerte para $\bar{Q}$ coincide con la tabla débil, y utilizando (62)–(64)).

(b) Por virtud de (65), bastará tratar $(Ey)_{y<z}$. Sean $\chi(x_1, ..., x_n, y)$ y $\varphi(x_1, \ldots, x_n, z)$ las funciones representantes de $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ y de $(Ey)_{y<z} R(x_1, ..., x_n, y)$, respectivamente. Entonces (utilizando $\# \# 6$, $B^\dagger$), las ecuaciones

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \sigma(0)=0, \qquad \tau(1)=1, \\ \varphi(x_1, ..., x_n, z') = \sigma(\chi(x_1, ..., x_n, z \dot{-} y)), \\ \varphi(x_1, ..., x_n, z) = \tau\left(\prod_{y<z} \chi(x_1, ..., x_n, y)\right) \end{cases}$$

se traducen a un sistema E que define a $\varphi$ recursivamente a partir de $\chi$.

(c) PRIMER METODO. Al igual que (a); p. ej., para $m=2$ y $n=1$,

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \sigma_1(0,x)=\varphi_1(x), \qquad \sigma_2(0,x)=\varphi_2(x), \\ \varphi(x)=\sigma_1(\psi_1(x), x), \quad \varphi(x)=\sigma_2(\psi_2(x), x). \end{cases}$$

SEGUNDO METODO, para $Q_1, ..., Q_m$, simultáneamente definidos

$$\varphi \simeq \mu y\, [(Q_1 \,\&\, y=\varphi_1) \vee ... \vee (Q_m \,\&\, y=\varphi_m)].$$

OBSERVACION 1. Para ser consistentes con nuestro uso en (VI′) § 57, y al principio de § 54 donde tratamos primero cuasi formalmente a "$=$" antes de traducir, escribimos aquí (A)–(C) con "$=$". Pero consideradas intuitivamente, como leyes respetadas por las funciones parciales que en ellas aparecen, (VI′) y (A)–(C), deberían ser escritas con "$\simeq$".

EJEMPLO 5. Si $\varphi(x)$ es recursiva parcial, y '$\varphi(x)$ es definida' es recursiva general, entonces $\varphi(x)$ es potencialmente recursiva. Pues supóngase que

$$\varphi'(x) \simeq \mu y\,[y = \varphi(x) \vee \overline{(\varphi(x) \text{ es definida}} \,\&\, y = 0)].$$

Sea $\Psi$ una secuencia de funciones parciales $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Por una *extensión* $\Psi'$ de $\Psi$ entendemos una secuencia $\psi_1', \ldots, \psi_l'$ de funciones parciales que son extensiones, respectivamente, de $\psi_1, \ldots, \psi_l$, es decir, tales que, para $i = 1, \ldots, l$, $\psi_i'(y_1, \ldots, y_{m_i}) = \psi_i(y_1, \ldots, y_{m_i})$ sobre el rango de definición de $\psi_i$. Similarmente si $\Psi$ incluye predicados.

El lector que desee llegar prontamente a los principales resultados de este capítulo, en § 66, puede omitir la Parte (b) del siguiente teorema.

TEOREMA XXI. (a) *Si* $\varphi \simeq \mathsf{F}(\Psi)$ *o* $\varphi(x) \simeq \mathsf{F}(\Psi; x)$ *es un funcional recursivo parcial, y* $\mathsf{F}(\Psi_1; x_1) \simeq k$, *donde* $\Psi_1$ *son funciones particulares y* $x_1$, $k$ *son números particulares, entonces para toda extensión* $\Psi_1'$ *de* $\Psi_1$, $\mathsf{F}(\Psi_1'; x_1) \simeq k$.

(b) *Sea* $\varphi$ *una función definida a partir de una función* $\psi$ *por una operación de la forma* $\varphi(x) \simeq \mathsf{F}(\psi(x))$ *donde* $\mathsf{F}(\alpha)$ *es una función de* $\{\mathfrak{u}, 0, 1, 2, \ldots\}$ *a* $\{\mathfrak{u}, 0, 1, 2, \ldots\}$. *Si* $\mathsf{F}(\mathfrak{u}) \simeq k$, *donde* $k$ *es un número natural, pero para algún número natural* $m$, *no se da el caso que* $\mathsf{F}(m) \simeq k$, *entonces hay una función recursiva parcial* $\psi$ *(que toma como valores únicamente a* $m$*) respecto a la cual la función resultante* $\varphi$ *no es recursiva parcial.*

Podemos leer "$x_1, \ldots, x_n$", "$x_{11}, \ldots, x_{1n}$" en lugar de "$x$", "$x_1$", respectivamente (donde $n \geq 0$ para (a); $\geq 1$ para (b)); y el teorema puede ser establecido para predicados, pasando a ocupar $\mathsf{t}$ y $\mathsf{f}$ el lugar de 0, 1, 2, ... como valores definidos.

DEMOSTRACIONES. (a) Por hipótesis, hay un sistema E de ecuaciones con letras de función dadas G y letra de función principal f, tal que para cualesquiera número natural $x$ y funciones parciales $\Psi$ : $\mathrm{E}_{\mathrm{G}}^{\Psi}$, $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ donde $\boldsymbol{y}$ es un numeral, si y solamente si, $\mathsf{F}(\Psi; x) = y$. Pero $\mathsf{F}(\Psi_1; x_1) = k$, donde $k$ es un número natural; así, $\mathrm{E}_{\mathrm{G}}^{\Psi_1}$, $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{k}$. Ahora bien, si $\Psi_1'$ es cualquier extensión de $\Psi_1$ entonces $\mathrm{E}_{\mathrm{G}}^{\Psi_1} \subset \mathrm{E}_{\mathrm{G}}^{\Psi_1'}$; de aquí también $\mathrm{E}_{\mathrm{G}}^{\Psi_1'}$, $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{k}$; y por lo tanto $\mathsf{F}(\Psi_1'; x_1) = k$. (Si el funcional $\mathsf{F}(\Psi)$ es definido sólo bajo alguna restricción sobre el rango de $\Psi$, el teorema se aplica únicamente a extensiones de $\Psi_1'$ que satisfagan la restricción).

(b) Sean $\psi(x) \simeq m + 0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$ y $\rho(x) \simeq \mu y\,[\varphi(x) = k \,\&\, y = 0]$. Por el Teorema XVIII, $\psi(x)$ es recursiva parcial, y $\rho(x)$ es recursiva parcial si $\varphi(x)$ lo es. Mostramos ahora que $\rho(x)$ no es recursiva parcial. Si $(\overline{Ey})\, T_1(x, x, y)$, entonces $\mu y T_1(x, x, y)$ es no definida, de donde $\psi(x)$ es no definida, de donde por hipótesis $\varphi(x) = k$, de donde $\rho(x)$ es definida. Así, $(\overline{Ey})\, T_1(x, x, y) \rightarrow \{\rho(x)$ es definido$\}$. Similarmente, $(Ey)\, T_1(x, x, y) \rightarrow \{\rho(x)$ es no definido$\}$; o por contraposición (cfr. *13 § 26), $\{\rho(x)$ es definida$\} \rightarrow (\overline{Ey})\, T_1(x, x, y)$. Así $\{\rho(x)$ es definida$\} \equiv (\overline{Ey})\, T_1(x, x, y) \equiv (y)\, \overline{T}_1(x, x, y)$. Por el Ejemplo 3 § 63, $\rho(x)$ no es, por lo tanto, recursiva parcial.

En los Ejemplos 6–8, ofrecemos separadamente las partes (a) y (b), como ilustraciones de ambas partes del teorema, aun cuando la conclusión de la parte (b) implica la de la parte (a).

EJEMPLO 6. ¿Podemos reforzar el Teorema XVIII constriñendo $\mu y R(x, y)$ de suerte que sea el mínimo $y$ tal que $R(x, y)$ es verdadero, sin que haya que tener en cuenta si $R(x, 0), \ldots, R(x, y-1)$ son todos definidos (escribiéndola entonces $\mu' y R(x, y)$)? (a) No, puesto que cuando $R(x, 1)$ es $\mathfrak{t}$, entonces $\mu' y R(x, y)$ cambia de 1 a 0 cuando $R(x, 0)$ ha cambiado de $\mathfrak{u}$ a $\mathfrak{t}$. Dicho más detalladamente: Sea $\chi(x, y)$ la función representante de $R(x, y)$ y sea $\varphi(x) \simeq \mu' y R(x, y) \simeq \mathsf{F}(\chi; x)$ Sean $\chi_1, x_1$ elecciones de $\chi, x$ tales que $\chi_1(x_1, 0) \simeq \mathfrak{u}, \chi_1(x_1, 1) \simeq 0$. Entonces $\mathsf{F}(\chi_1; x_1) \simeq 1$. Ahora bien, por (a) del teorema, si $\varphi$ es recursiva parcial en $\chi$, entonces $\mathsf{F}(\chi_1'; x_1) \simeq 1$ para toda extensión $\chi_1'$ de $\chi_1$. Pero $\mathsf{F}(\chi_1'; x_1) \simeq 0$ para una extensión $\chi_1'$ tal que $\chi_1'(x_1, 0) \simeq 0$. Por tanto $\varphi$ no es recursiva parcial en $\chi$. (b) Podemos incluso hallar un $R$ particular que sea recursivo parcial para el cual $\mu' y R(x, y)$ no es recursiva parcial. Para comprobarlo, sea $R(x, y)$ de la forma $y = \psi(x) \vee y = 1$. Entonces $\mu' y R(x, y)$ cambia de 1 a 0 cuando $\psi(x)$ sea cambiada de $\mathfrak{u}$ a 0. En detalle: Sea $\varphi(x) \simeq \mu' y R(x, y) \simeq \mathsf{F}(\psi(x))$. Entonces $\mathsf{F}(\mathfrak{u}) \simeq 1$, pero $\mathsf{F}(0) \simeq 0$. De donde, por (b) del teorema, puede ser elegida una $\psi$ recursiva parcial tal que $\varphi$ no sea recursiva parcial.

EJEMPLO 7. Cuando $\chi(x) \simeq 0$, entonces $\psi(x) \simeq \chi(x)$ cambia de $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{t}$ cuando $\psi(x)$ sea cambiada de $\mathfrak{u}$ a 0. Por tanto, (a) $\psi(x) \simeq \chi(x)$ no es recursiva parcial en $\psi, \chi$. Asimismo sucede que (b), para algunas $\psi$ y $\chi$ recursivas parciales, $\psi(x) \simeq \chi(x)$ no es recursiva parcial. (Supóngase primero que $\chi$ es $C_0^1$ § 44; elíjase luego una $\psi$ para acompañar a esta $\chi$ de acuerdo con (b) del teorema).

EJEMPLO 8. La tabla para $Q \cong R$ es irregular; p. ej., cuando $R \cong \mathfrak{t}$, entonces $Q \cong R$ cambia de $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{t}$ cuando $Q$ sea cambiado de $\mathfrak{u}$ a $\mathfrak{t}$. Por tanto (a) $Q(x) \cong R(x)$ no es recursivo parcial en $Q$ y en $R$; y (b), para algún $Q$ y algún $R$ recursivos parciales, $Q(x) \cong R(x)$ no es recursivo parcial.— Cualquier tabla irregular puede ser tratada similarmente.

§ 65. **Números de Gödel.** Abreviamos ahora $U(\mu y T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y))$ como "$\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$" o incluso como "$\{z\}(x_1, \ldots, x_n)$" o "$z(x_1, \ldots, x_n)$". Por el Teorema XVIII, $\Phi_n$ es una función recursiva parcial de $n+1$ variables (y por tanto, para cada $z$ fija, $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ es una función recursiva parcial de las $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$). Volviendo a escribir el Teorema XIX (60), cualquier función recursiva parcial $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $n$ variables, puede ser obtenida a partir de $\Phi_n$, del siguiente modo,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \Phi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq e(x_1, \ldots, x_n), \tag{66}$$

donde $e$ es cualquier número de Gödel de $\varphi$. Similarmente, $U(\mu y T_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n, y))$ se escribirá "$\Phi_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n)$", "$\{z\}^{\Psi}(x_1, \ldots, x_n)$" o "$z^{\Psi}(x_1, \ldots, x_n)$" para funciones $\Psi$ completamente definidas, con las observaciones correspondientes. Resumiendo:

TEOREMA XXII (= Teoremas XVIII + XIX). *La función $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ es recursiva parcial, y $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$, para $z = 0, 1, 2, \ldots$, es una enumeración (con repeticiones) de las funciones recursivas parciales de n variables. De modo similar, para funciones $\Psi$ completamente definidas, $\Phi_n^{\Psi}$ es recursiva parcial en $\Psi$ y enumera (con repeticiones) las funciones de n variables que son recursivas parciales en $\Psi$.* (Teorema de enumeración para funciones recursivas parciales).

Este teorema es posible únicamente porque una función recursiva parcial puede ser no definida para algunos conjuntos de argumentos.

Recapitulemos el usual argumento de la diagonal de Cantor para funciones completamente definidas. Supóngase que $C$ es una clase de tales funciones de varios números de variables; y que $\Phi(z, x_1, ..., x_n)$ enumera (con repeticiones) las funciones de $C$ de $n$ variables (para alguna $n \geq 1$ fija). Entonces $\Phi(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) + 1$ no puede $\varepsilon$ $C$, porque de otro modo tendríamos

$$\Phi(q, q, x_2, ..., x_n) + 1 = \Phi(q, q, x_2, ..., x_n)$$

para algún número $q$, lo cual es imposible. Si $C$ es cerrada bajo la operación de pasar de una función $\varphi(z, x_1, ..., x_n)$ a $\varphi(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) + 1$, entonces $\Phi(z, x_1, ..., x_n)$ no puede $\varepsilon$ $C$. Ello muestra, en particular, que no hay un correspondiente teorema de enumeración para las funciones recursivas generales.

Pero tratándose de funciones parciales, tendríamos en cambio

$$\Phi(q, q, x_2, ..., x_n) + 1 \simeq \Phi(q, q, x_2, ..., x_n),$$

lo cual no es imposible, sino que significa simplemente que $\Phi(q, q, x_2, ..., x_n)$ ha de ser no definida. En particular, demostramos así que la función recursiva parcial $\Phi_n(z, x_1, ..., x_n)$ es no definida, cuando $z = x_1 = q$, donde $q$ es cualquier número de Gödel de $\Phi_n(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) + 1$.

La paradoja de Richard (§ 11) surgió como resultado del intento de mantener simultáneamente que $\Phi(z, x_1, ..., x_n)$ está dentro de la clase y es completamente definida. (En § 11, $n = 1$).

Del razonamiento de la diagonal con funciones parciales haremos ventajoso uso más adelante al establecer el Teorema XXVII § 66.

EJEMPLO 1. Sea $\eta(z_1, ..., z_r)$ una función recursiva parcial dada. Para cada $z_1, ..., z_r$, sea $\varphi z_1, ..., z_r(x_1, ..., x_n)$ la función recursiva parcial que es definida para un $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ solamente si $\eta(z_1, ..., z_r)$ es definida, y de la cual en este caso es $\eta(z_1, ..., z_r)$ un número de Gödel. Entonces $\varphi z_1, ..., z_r(x_1, ..., x_n)$, considerada como una función $\varphi(z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_n)$ de todas las $r + n$ variables, es recursiva parcial. Porque

$$(67) \qquad \varphi(z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_n) \simeq \Phi_n(\eta(z_1, ..., z_r), x_1, ..., x_n).$$

(Ello constituye un ejemplo para la primera alternativa en (A3) § 62).

TEOREMA XXIII. *Para cada $m$, $n \geq 0$, hay una función recursiva primitiva $S_n^m(z, y_1, ..., y_m)$ (definida más adelante) tal que, si $e$ define recursivamente a $\varphi(y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n)$ como una función de las $m + n$ variables $y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n$, entonces para cada $m$-tuplo fijo $y_1, ..., y_m$ de números naturales, $S_n^m(e, y_1, ..., y_m)$ define recursivamente a $\varphi(y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n)$ como una función de las $n$ variables restantes $x_1, ..., x_n$.* Establecido en la $\lambda$-notación (§ 10): *Si $e$ define a $\lambda y_1 ... y_m x_1 ... x_n \varphi(y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n)$ recursivamente, entonces $S_n^m(e, y_1, ..., y_m)$ define a $\lambda x_1 ... x_n \varphi(y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n)$ recursivamente. Similarmente, si se lee "función recursiva primitiva $S_n^{m, m_1, ..., m_l}(z, y_1, ..., y_m)$", "define recursivamente a partir de $\Psi$" en lugar de "función recursiva primitiva $S_n^m(z, y_1, ..., y_m)$", "define recursivamente", respectivamente, donde $\Psi$ son $l$ funciones y predicados completamente definidos de $m_1, ..., m_l$ variables, respectivamente.*

DEMOSTRACION (para $l = 0$). Sea $S_n^0(z) = z$. Para $m > 0$, elíjanse números $y_1, ..., y_m$. Con tales números fijos, escribamos "$\varphi(x_1, ..., x_n)$" en lugar de $\varphi(y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n)$. Ahora

$$\varphi(x_1, ..., x_n) \simeq \Phi_{m+n}(e, y_1, ..., y_m, x_1, ..., x_n). \tag{68}$$

Sea D un sistema de ecuaciones que define recursivamente a $\Phi_{m+n}$, con $g$ como letra de función principal, y que no contiene a $f$. Supongamos que C consta de las ecuaciones de D seguidas por la ecuación

$$f(a_1, ..., a_n) = g(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m, a_1, ..., a_n)$$

que ha sido obtenida traduciendo (68). Este sistema C define a $\varphi(x_1, ..., x_n)$ recursivamente. Sean $d, f, g, a_1, ..., a_n$ los números de Gödel D, $f, g, a_1, ..., a_n$, respectivamente. Y sea $S_n^m(z, y_1, ..., y_m) =$

$$d^* [2 \exp 2^{15} \cdot 3^{2^f} \cdot p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_n^{a_n} \cdot 5^{2^g} \cdot 3^{Nu(z)} \cdot p_2^{Nu(y_1)} \cdot ... \cdot p_{m+1}^{Nu(y_m)} \cdot p_{m+2}^{a_1} \cdot ... \cdot p_{m+n+1}^{a_n}]$$

(cfr. § 56, # 21 § 45, Ejemplo 2 § 52). Entonces $S_n^m(z, y_1, ..., y_m)$ es recursiva primitiva en tanto que función de $z, y_1, ..., y_m$; y para las $y_1, ..., y_m$ fijas, $S_n^m(e, y_1, ..., y_m)$ es el número de Gödel de C, y por tanto define a $\varphi(x_1, ..., x_n)$ recursivamente.

EJEMPLO 1 (conclusión). No obtendremos una clase más amplia de funciones $\varphi(z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_n)$, por el hecho de partir con una función recursiva parcial $\eta$ (como la anterior) que si partimos con una función recursiva primitiva $\eta$. Porque supongamos que $\varphi(z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_n)$ de (67) tiene a $e$ como número de Gödel. Entonces $S_n^r(e, z_1, ..., z_r)$ es un número de Gödel de $\varphi_{z_1,...,z_r}(x_1, ..., x_n)$, esto es, $S_n^r(e, z_1, ..., z_r)$ es una función recursiva primitiva "$\eta(z_1, ..., z_r)$" para la misma función $\varphi_{z_1,...,z_r}(x_1, ..., x_n)$.

EJEMPLO 2. Para cualquier predicado recursivo general $R(x_1, ..., x_n, y)$ (con $n \geq 1$), sea $e$ un número de Gödel de la función recursiva parcial $\lambda x_1 z x_2 ... x_n \mu y R(x_1, ..., x_n, y)$. Para cualquier $x_1$ fija, entonces $S_n^1(e, x_1)$ es un número de Gödel de $\lambda z x_2 ... x_n \mu y R(x_1, ..., x_n, y)$. Esta función es definida para un $n$-tuplo dado $z, x_2, ..., x_n$, si y solamente si $(Ey) R(x_1, ..., x_n, y)$. De donde por el Teorema XIX,

$$(Ey) R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (Ey) T_n(S_n^1(e, x_1), z, x_2, ..., x_n, y). \tag{69}$$

Sustituyendo $z$ por $S_n^1(e, x_1)$,

$$(Ey) R(x_1, ..., x_n, y) \equiv (Ey) T_n(S_n^1(e, x_1), S_n^1(e, x_1), x_2, ..., x_n, y). \tag{70}$$

Tomando $n = 1$ y escribiendo "$a$" en lugar de "$x_1$" y "$x$" en lugar de "$y$", lo anterior muestra que $(Ex) R(a, x)$ es recursivo primitivo en $(Ex) T_1(a, a, x)$. Así, el problema de decisión para $(Ex) T_1(a, a, x)$ posee el más alto grado de insolubilidad para predicados de la forma $(Ex) R(a, x)$ con $R$ recursivo general (cfr. final § 61). Además, por la definición de $S_1^1$, $a_1 \neq a_2 \rightarrow S_1^1(e, a_1) \neq S_1^1(e, a_2)$. Así, hay una función recursiva general $\psi(a)$ tal que
$\{a_1 \neq a_2 \rightarrow \psi(a_1) \neq \psi(a_2)\}$ & $\{(Ex) R(a, x) \equiv (Ex) T_1(\psi(a), \psi(a), x)\}$; en terminología de Post (1944), el problema de decisión para el conjunto $\hat{a}\,(Ex) R(a, x)$ es

*reducible* 1–1 al de $\hat{a}\,(Ex)\,T_1\,(a,\,a,\,x)$. Que ello es así para todo conjunto $\hat{a}\,(Ex)\,R\,(a,\,x)$ con $R$ recursivo general, es una propiedad del presente conjunto $\hat{a}\,(Ex)\,T_1\,(a,\,a,\,x)$ que Post mostró ser poseída por otro conjunto recursivamente enumerable "$K$" al que denominó "el conjunto completo" (1944 pág. 295 y Teorema pág. 297). Obtenemos iguales resultados para las formas con más cuantificadores y para $l>0$. Por ejemplo, de (70) con $n=3$ $(l=0)$, inferimos que

$$(Ex)\,(y)\,(Ez)\,R\,(a,x,y,z)\equiv(Ex)\,(y)\,(Ez)\,T_3\,(S_3^1\,(e,a),S_3^1\,(e,a),x,y,z)$$

(cfr. *71, *72 § 33). Así $(Ex)\,(y)\,(Ez)\,T_3\,(a,\,a,\,x,\,y,\,z)$ tiene un problema de decisión del más alto grado de insolubilidad para predicados de la forma $(Ex)\,(y)\,(Ez)\,R\,(a,\,x,\,y,\,z)$ con $R$ recursivo, y el problema de decisión para cualquier predicado de esta forma es reducible 1–1 al de su problema de decisión.

EJEMPLO 3. Omitiendo la $z$ en el Ejemplo 2, obtenemos que el problema de decisión para $\hat{a}\,(Ex)\,R\,(a,\,x)$ sea reducible 1–1 al de $\hat{a}\,(Ex)\,T_0\,(a,\,x)$ (y por tanto, por el Ejemplo 2, los predicados $(Ex)\,T_1\,(a,a,x)$ y $(Ex)\,T_0\,(a,x)$ tienen problemas de decisión del mismo grado de insolubilidad); y similarmente con más cuantificadores, p. ej.

$$(Ex)\,(y)\,(Ez)\,R\,(a,x,y,z)\equiv(Ex)\,(y)\,(Ez)\,T_2\,(S_2^1\,(e,a),x,y,z),$$

donde $e$ es un número de Gödel de $\mu z R\,(a,x,y,z)$.

La mayor parte de § 66 puede ser entendida omitiendo el resto de la presente sección.

LA Λ-NOTACION (para ser utilizada en § 82). Cuando

$$\lambda y_1 \ldots y_m x_1 \ldots x_n\,\varphi\,(y_1,\ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n)$$

sea recursiva parcial y $e$ la defina recursivamente, utilizaremos

$$\text{“}\Lambda_{(e)}\,x_1 \ldots x_n\,\varphi\,(y_1,\ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n)\text{”}$$

como una abreviatura de $S_n^m(e,y_1,\ldots,y_m)$. Omitiremos usualmente el suscrito "(e)". Así (para $m=0$) "$\Lambda x_1 \ldots x_n\,\varphi\,(x_1,\ldots,x_n)$" representará algún número de Gödel de la función $\lambda x_1 \ldots x_n\,\varphi\,(x_1,\ldots,x_n)$; y (para $m>0$) "$\Lambda x_1 \ldots x_n\,\varphi\,(y_1,\ldots,y_m,$ $x_1,\ldots,x_n)$" representará alguna función recursiva primitiva, cuyo valor, para cada $m$-tuplo $y_1,\ldots,y_m$ de números naturales como argumentos, es algún número de Gödel de la función

$$\lambda x_1 \ldots x_n\,\varphi\,(y_1,\ldots,y_m,\,x_1,\ldots,x_n).$$

Utilizando esta abreviatura además de la siguiente

$$\text{“}\{z\}\,(x_1,\ldots,x_n)\text{”}\ \text{en lugar de}\ \Phi_n\,(z,x_1,\ldots,x_n),$$

tenemos, para cualquier $n$-tuplo de números naturales $t_1,\ldots,t_n$,

$$\{\Lambda x_1 \ldots x_n\,\varphi\,(y_1,\ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n)\}\,(t_1,\ldots,t_n)$$

(71)
$$\simeq\varphi\,(y_1,\ldots,y_m,\,t_1,\ldots,t_n).$$

Igual notación con "$\Lambda^{m_1,\ldots,m_l}$" puede ser usada, cuando $\Psi$ sean funciones y predicados $l$ completamente definidos de $m_1, \ldots, m_l$ variables, respectivamente.

LEMA VI. *El Lema* I § 47 *es válido leyendo "recursiva parcial" en lugar de "recursiva primitiva". Así* (para $p=1$): *Si* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *es uniformemente recursiva parcial en funciones* $\theta$, $\Psi$, *y* $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n, c)$ *es la función obtenida cuando en la definición de* $\varphi$ *se toma a* $\theta$ *como una función* $\theta^*$ *que depende de un parámetro* $c$, *entonces* $\varphi^*$ *es uniformemente recursiva parcial en* $\theta^*$, $\Psi$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis, hay un sistema de ecuaciones E tal que, para cada elección de $\theta$, $\Psi$, el sistema E define recursivamente a la función resultante $\varphi$ a partir de $\theta$, $\Psi$. Supongamos que $\Psi$ es $\psi_1, \ldots, \psi_l$; y digamos que las letras de función dadas de E (que expresan respectivamente $\theta$, $\Psi$) son $t, g_1, \ldots, g_l$, y que la letra de función principal es f. Sea c una variable que no ocurre en E. Sea $E_2^*$ el resultado de cambiar simultáneamente en E cada parte $h(r_1, \ldots, r_s)$, donde h es una letra de función y $r_1, \ldots, r_s$ son términos, por $h(r_1, \ldots, r_s, c)$. Sea $E_1^*$ el sistema de ecuaciones

$g_1(a_1, \ldots, a_{m_1}, c) = \bar{g}_1(a_1, \ldots, a_{m_1}), \ldots, g_l(a_1, \ldots, a_{m_l}, c) = \bar{g}_l(a_1, \ldots, a_{m_l})$, donde $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_l$ son letras de función distintas que no ocurren en E. Supongamos que $E^*$ es $E_1^* E_2^*$. Mostramos que, para cada elección de $\theta^*$, $\Psi$, el sistema $E^*$ define recursivamente a $\varphi^*$ a partir de $\theta^*$, $\Psi$.

Considérese cualquier elección fija de $\theta^*$, $\Psi$ y $c$. Sea $(E_t^{\theta^*})_c$ el conjunto de las ecuaciones $t(\mathbf{s}_1, \ldots, s_q, \mathbf{c}) = \mathbf{u}$ que $\varepsilon$ $E_t^{\theta^*}$. Sea $(E_t^{\theta})_c$ el conjunto de las respectivas ecuaciones $t(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_q) = \mathbf{u}$, esto es, el conjunto de las ecuaciones que expresan los valores de la función $\theta$ cuando tomamos $\theta(s_1, \ldots, s_q) = \theta^*(s_1, \ldots, s_q, c)$ para la $c$ que ya se había fijado.

Es fácil observar que si $(E_t^{\theta})_c$, $E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$, $E \vdash f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$, entonces $(E_t^{\theta^*})_c$, $E_{\bar{g}_1 \ldots \bar{g}_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$, $E^* \vdash f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{c}) = \mathbf{x}$, a fortiori $E_{t\, \bar{g}_1 \ldots \bar{g}_l}^{\theta^* \psi_1 \ldots \psi_l}$, $E \vdash f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{c}) = \mathbf{x}$.

Demostramos ahora la conversa. Sea $(E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l})_c$ el conjunto de las ecuaciones $g_i(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{m_i}, \mathbf{c}) = \mathbf{y}$ donde $g_i(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{m_i}) = \mathbf{y}$ $\varepsilon$ $E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$. Sea $(E^*)_c$ el sistema de ecuaciones que resulta de sustituir c por $\mathbf{c}$ a lo largo de $E_2^*$. Decimos que una ecuación e es una *c-ecuación*, si hay una deducción de e a partir de $E_{\bar{g}_1 \ldots \bar{g}_l}^{\theta^* \psi_1 \ldots \psi_l}$, $E^*$ y o bien e $\varepsilon$ $(E_t^{\theta^*})_c$, o bien e $\varepsilon$ $(E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l})_c$, o la ecuación principal (§ 54) de esa deducción de e $\varepsilon$ $E_2^*$ y la rama principal contienen una aplicación de R1 que sustituye c por $\mathbf{c}$. Podemos demostrar (por inducción sobre la altura de una tal deducción dada de e) que, si e es una $c$-ecuación, entonces $(E_t^{\theta^*})_c, (E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l})_c, (E^*)_c \vdash e$. En esta deducción resultante, cada ocurrencia de un símbolo de función h es en una parte de la forma $h(r_1, \ldots, r_s, \mathbf{c})$. Cualquier ecuación de la forma $f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{c}) = \mathbf{x}$ deducible a partir de $E_{t\, \bar{g}_1 \ldots \bar{g}_l}^{\theta^* \psi_1 \ldots \psi_l}$, $E^*$ es una $c$-ecuación. Si en la deducción resultante recién descrita, cambiamos simultáneamente cada parte $h(r_1, \ldots, r_s, \mathbf{c})$ por $h(r_1, \ldots, r_s)$, obtenemos una deducción de $f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ a partir de $(E_t^{\theta})_c$, $E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$, E.

TEOREMA XXIV. (a) *Si* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *es uniformemente recursiva parcial en funciones recursivas parciales* $\theta_1, \ldots, \theta_r$, *entonces hay una función recursiva parcial*

$\varphi(z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_n)$ *tal que, cuando* $t_1, ..., t_r$ *son cualesquiera números de Gödel de* $\theta_1, ..., \theta_r$, *respectivamente,* $\varphi(x_1, ..., x_n) \simeq \varphi(t_1, ..., t_r, x_1, ..., x_n)$.

(b) *Si* $\varphi$ *es uniformemente recursiva parcial en funciones recursivas parciales* $\theta_1, ..., \theta_r$, *entonces hay una función recursiva primitiva* $\eta(z_1, ..., z_r)$ *tal que, cuando* $t_1, ..., t_r$ *son cualesquiera números de Gödel de* $\theta_1, ..., \theta_r$, *respectivamente,* $\eta(t_1, ..., t_r)$ *es un número de Gödel de* $\varphi$.

*Ambas partes son también válidas leyendo "recursiva parcial en* $\theta_1, ..., \theta_r, \Psi$", *"recursiva parcial en* $\Psi$", *"número de Gödel a partir de* $\Psi$" *en lugar de "recursiva parcial en* $\theta_1, ..., \theta_r$", *"recursiva parcial", "número de Gödel", respectivamente, donde* $\Psi$ *son funciones* $l$ *completamente definidas.*

DEMOSTRACIONES (para $l = 0$). (a) Por utilización del Lema VI, el resultado de reemplazar $\theta_i(s_1, ..., s_{q_i})$ por $\Phi_{q_i}(z_1, s_1, ..., s_{q_i})$ $(i = 1, ..., r)$ en la definición de $\varphi(x_1, ..., x_n)$ a partir de $\theta_1, ..., \theta_r$, es una función $\varphi(z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_n)$ recursiva parcial en $\Phi_{q1}, ..., \Phi_{q_r}$. Pero $\Phi_{q_1}, ..., \Phi_{q_r}$ son recursivas parciales, así pues $\varphi(z_1, ..., z_r, x_1, ..., x_n)$ es recursiva parcial. También
$\theta_i(s_1, ..., s_{q_i}) \simeq \Phi_{q_i}(t_i, s_1, ..., s_{q_i})$, y así $\varphi(x_1, ..., x_n) \simeq \varphi(t_1, ..., t_r, x_1, ..., x_n)$.

(b) Sea $e$ un número de Gödel de $\varphi(z_1, \ldots, z_r, x_1, \ldots, x_n)$, y tómese $\eta(z_1, ..., z_r) = S_n^r(e, z_1, ..., z_r)$.

EJEMPLO 4. Por nuestra demostración del Teorema XIII § 60 (retrocediendo a la del Teorema IV § 57), la $f$ de la Figura 1a § 61 puede ser cualquier número de Gödel de la función recursiva parcial $\mu y R(x, y)$. Dado que $\mu y R(x, y)$ es uniformemente recursiva parcial en $R$, por el Teorema XXIV (b) (aplicado a la función representante de $R$), hay una función recursiva general (de hecho, recursiva primitiva) $\eta(z)$ tal que, para cualquier número de Gödel $r$ de $R(x, y)$, $\eta(r)$ es una $f$ de la Figura 1a. Ello muestra que el conjunto recursivamente enumerable $C_0$ (a saber, $\hat{x}(Ey) T_1(x, x, y)$) es lo que Post 1944 denomina un *conjunto creativo.* (El número de Gödel $r$ de $R(x, y)$ toma aquí el lugar de la "base $B$" de Post para el conjunto recursivamente enumerable $\hat{x}(Ey) R(x, y)$).

EJEMPLO 5. Los ejemplos de predicados no recursivos generales dados en el Teorema V § 57 eran de $n \geq 1$ variables.– El predicado $(Ex) R(x)$ de 0 variables no es uniformemente recursivo general en el predicado $R$. Pues supóngase que lo fuera. Entonces, por el Teorema XXIV (a) para $n = 0$ (aplicado a las funciones representantes), habría un predicado recursivo parcial $Q(z)$ tal que $(Ex)R(x) \equiv Q(t)$ para cualquier número de Gödel $t$ de $R(x)$. Sea ahora $e$ un número de Gödel del predicado $T_1(a, a, x)$. Entonces $Q(S_1^1(e, a))$ sería un predicado recursivo general de $a$, y $(Ex) T_1(a, a, x) \equiv Q(S_1^1(e, a))$. Pero $(Ex) T_1(a, a, x)$ no es recursivo general (Teorema V (15)).

DESCRIPCION INDEFINIDA. TEOREMA XXV. *Para cada* $n \geq 0$, *hay una función parcial* $\nu_n(z, x_1, ..., x_n)$ *con la siguiente propiedad. Supóngase que* $r$ *es un número de Gödel de un predicado recursivo parcial* $R(x_1, ..., x_n, y)$. *Entonces* $\nu_n(r, x_1, ..., x_n)$ *es definida si y sólo si* $(Ey) R(x_1, ..., x_n, y)$, *en cuyo caso su valor es un número* $y$ *tal que* $R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Usualmente abreviamos $\nu_n(r, x_1, \ldots, x_n)$ como "$\nu y_{(r)} R(x_1, ..., x_n, y)$" o incluso como "$\nu y R(x_1, ..., x_n, y)$", y leemos "un $y$ (dependiendo de $r$) tal que $R(x_1, ..., x_n, y)$".

*Similarmente para l funciones y predicados completamente definidos* $\Psi$, *leyendo "recursivo parcial en* $\Psi$", "*número de Gödel a partir de* $\Psi$", "$\nu_n^{\Psi}$", "$\nu y_{(r)}^{\Psi}$" *en lugar de "recursivo parcial", "número de Gödel", "*$\nu_n$", "$\nu y_{(r)}$", *respectivamente.*

DEMOSTRACION (para $l=0$). Definimos

$$\nu_n(z, x_1, ..., x_n) \simeq (\mu y [T_{n+1}(z, x_1, ..., x_n, (y)_0, (y)_1) \,\&\, U((y)_1)=0])_0.$$

DISCUSION. El mínimo operador numérico $\mu y$ y la descripción indefinida $\nu y$ corresponden a dos diferentes procedimientos efectivos para calcular un $y$ tal que $R(x_1, ..., x_n, y)$, cada uno de ellos con las limitaciones respectivas.

Sea $R$ efectivamente decidible. Para calcular $\mu y R(x_1, ..., x_n, y)$, intentamos primero establecer, por el algoritmo para $R$, si $R(x_1, ..., x_n, 0)$ es verdadero o falso. Si es verdadero, tomamos a 0 como el número deseado; si es falso, intentamos entonces establecer seguidamente si $R(x_1, ..., x_n, 1)$ es verdadero o falso; y así sucesivamente. Si antes de hallar un $y$ para el cual $R(x_1, ..., x_n, y)$ es verdadero, alcanzamos uno para el cual $R(x_1, ..., x_n, y)$ es no definido, nos hallaremos incapacitados para pasar más allá de este $y$, pero habremos (obedeciendo a las reglas de nuestro procedimiento de cálculo) de continuar ad infinitum en el futil esfuerzo de establecer si $R(x_1, ..., x_n, y)$ es verdadero o falso para ese $y$. Podríamos hallar otro procedimiento que sortease este obstáculo para un $R$ particular, pero en general no podemos hacerlo (cfr. Ejemplo 6 § 64).

Para calcular $\nu y R(x_1, ..., x_n, y)$, distribuimos nuestros esfuerzos para establecer si $R(x_1, ..., x_n, y)$ es verdadero o falso para varios $y$, de suerte que, aunque vayan progresando nuestros intentos de establecer si $R(x_1, ..., x_n, 0)$ es verdadero o falso, si después de un cierto número de pasos no hemos logrado un criterio de decisión, dirigimos nuestra atención sobre $R(x_1, ..., x_n, 1)$, y así sucesivamente. La búsqueda, mientras no termine, procederá eventualmente a la aplicación, para cada $y$, del algoritmo para determinar la verdad o falsedad de $R(x_1, ..., x_n, y)$ por arbitrariamente alto que sea ese $y$. Tan pronto como se halle que $R(x_1, ..., x_n, y)$ es verdadero para algún $y$, aceptaremos ese $y$ sin tratar de establecer si tal $y$ es es el mínimo. El $y$ obtenido por este procedimiento puede variar según el algoritmo que se utilice para $R$ (o el número de Gödel $r$). De acuerdo con el siguiente ejemplo (establecido para $n=0$), ello es en general inevitable.

EJEMPLO 6. Supóngase que $\nu'(z)$ es una función parcial con las dos propiedades: (a) Si $r$ es un número de Gödel de un predicado recursivo parcial $R(y)$, entonces $(Ey) R(y) \to R(\nu'(r))$. (b) Si $r$ y $s$ son números de Gödel del mismo predicado, entonces $\nu'(r) \simeq \nu'(s)$. Mostraremos que entonces $\nu'$ no es recursiva parcial. Para cada $k$, sean definidos los predicados recursivos parciales $R_k$ y $S_k$ del siguiente modo:

$$R_k(y) \cong y=0 \vee y=1+0 \cdot \mu z T_1(k, k, s),\ S_k(y) \cong y=0 \cdot \mu z T_1(k, k, z) \vee y=1.$$

Sean $r_k$ y $s_k$ números de Gödel cualesquiera de $R_k$ y $S_k$, respectivamente. Dada $k$, $R_k(0)$ y $S_k(1)$ son verdaderos; así, por (a), $\nu'(r_k)$ y $\nu'(s_k)$ son ambas definidas. Si $(Ez) T_1(k, k, z)$, entonces $(y)[R_k(y) \cong S_k(y)]$, esto es, $R_k$ y $S_k$ son el mismo predicado; y por tanto, utilizando (b), $\nu'(r_k)=\nu'(s_k)$. Así
$(Ez) T_1(k, k, z) \to \nu'(r_k)=\nu'(s_k)$, o contraponiendo (cfr. *12 § 26),
$\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k) \to (\overline{Ez}) T_1(k, k, z)$. Recíprocamente, si $(\overline{Ez}) T_1(k, k, z)$, entonces

$R_k(y)$ es verdadero sólo para $y = 0$, y $S_k(y)$ sólo para $y = 1$; así, por (a), $\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k)$. De este modo $\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k) \equiv (\overline{Ez})\, T_1(k, k, z) \equiv (z)\, \overline{T}_1(k, k, z)$, Las expresiones que definen a $R_k(y)$ y a $S_k(y)$ son predicados recursivos parciales de las dos variables $k$, $y$; digamos, aquellos predicados que tienen números de Gödel $r$ y $s$, respectivamente. Podemos tomar $r_k = S_1^1(r, k)$ y $s_k = S_1^1(s, k)$ en lo que antecede, obteniendo la equivalencia $\nu'(S_1^1(r, k) \neq \nu'(S_1^1(s, k) \equiv (z)\, \overline{T}_1(k, k, z)$. Si $\nu'$ fuera recursiva parcial, el miembro izquierdo sería un predicado recursivo general de $k$; pero el miembro derecho no lo es (Teorema V (14)).

§ 66. **El teorema de recursión.** TEOREMA XXVI. *Para cualquier* $n \geq 0$, *sea* $\mathsf{F}(\zeta; x_1, ..., x_n)$ *un funcional recursivo parcial, en el cual la variable de función* $\zeta$ *fluctúa sobre funciones parciales de n variables. Entonces la ecuación*

$$\zeta(x_1, ..., x_n) \simeq \mathsf{F}(\zeta; x_1, ..., x_n)$$

*tiene una solución* $\varphi$ *para* $\zeta$ *tal que cualquier solución* $\varphi'$ *para* $\zeta$ *es una extensión de* $\varphi$, *y esta solución* $\varphi$ *es recursiva parcial.*

*Similarmente, cuando* $\Psi$ *son l funciones y predicados parciales,*

$$\zeta(x_1, ..., x_n) \simeq \mathsf{F}(\zeta, \Psi; x_1, ..., x_n)$$

*tiene una solución* $\varphi$ *para* $\zeta$ *tal que cualquier solución* $\varphi'$ *para* $\zeta$ *es una extensión de* $\varphi$, *y esta solución* $\varphi$ *es recursiva parcial en* $\Psi$. (El primer teorema de recursión).

DEMOSTRACION (para $l = 0$, $n = 1$). Sea $\varphi_0$ la función completamente no definida. Introdúzcanse luego $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...$ sucesivamente por

$$\varphi_1(x) \simeq \mathsf{F}(\varphi_0; x), (\varphi_2(x) \simeq \mathsf{F}(\varphi_1; x), \varphi_3(x) \simeq \mathsf{F}(\varphi_2; x), \ldots$$

Puesto que $\varphi_0$ es completamente no definida, $\varphi_1$ es una extensión de $\varphi_0$; entonces, por el Teorema XXI (a), $\varphi_2$ es una extensión de $\varphi_1$, $\varphi_3$ de $\varphi_2$, etc. Sea $\varphi$ la "función límite" de $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...$; es decir, para cada $x$, sea $\varphi(x)$ definida si y sólo si $\varphi_s(x)$ es definida para algún $s$, en cuyo caso su valor es el valor común de $\varphi_s(x)$, para todo $s \geq$ que el mínimo $s$ tal. Ahora:

(i) *Para cada* $x$, $\varphi(x) \simeq \mathsf{F}(\varphi; x)$. Pues considérese cualquier $x$. Supóngase que $\varphi(x)$ es definida. Entonces para algún $s$, $\varphi(x) \simeq \varphi_{s+1}(x)$ [por definición de $\varphi$] $\simeq \mathsf{F}(\varphi_s; x)$ [por definición de $\varphi_{s+1}$] $\simeq \mathsf{F}(\varphi; x)$ [por el Teorema XXI (a), puesto que $\varphi$ es una extensión de $\varphi_s$]. Recíprocamente, supóngase que $\mathsf{F}(\varphi; x)$ es definido; llamémosle $k$ a su valor. Puesto que $\mathsf{F}$ es recursivo parcial, hay un sistema $F$ de ecuaciones que definen recursivamente a $\mathsf{F}(\zeta; x)$ a partir de $\zeta$, digamos con f como símbolo de función principal y g como símbolo de función dado; así hay ahora una deducción de $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ a partir de $\mathrm{E}_{\mathrm{g}}^{\varphi}$, F. Sean $\mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{z}_1$, ..., $\mathrm{g}(\boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{z}_p$ (donde $z_i = \varphi(y_i)$), las ecuaciones de $\mathrm{E}_{\mathrm{g}}^{\varphi}$ que ocurren en esta deducción. Pero $\varphi(y_1) = \varphi_{s_1}(y_1), ..., \varphi(y_p) = \varphi_{s_p}(y_p)$ para algunos $s_1, ..., s_p$. Sea $s = \max(s_1, ..., s_p)$. Entonces $\varphi(y_1) = \varphi_s(y_1), \ldots, \varphi(y_p) = \varphi_s(y_p)$. Así, $\mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{z}_1, ..., \mathrm{g}(\boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{z}_p \in \mathrm{E}_{\mathrm{g}}^{\varphi_s}$. Por tanto, $\mathrm{E}_{\mathrm{g}}^{\varphi_s}$, F $\vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$. De donde $k \simeq \mathsf{F}(\varphi_s; x) \simeq \varphi_{s+1}(x) \simeq \varphi(x)$.

(ii) *Si para cada* $x$, $\varphi'(x) \simeq \mathsf{F}(\varphi'; x)$, *entonces* $\varphi'$ *es una extensión de* $\varphi$. Bastará mostrar por inducción sobre $s$, que para cada $x$, *si* $\varphi_s(x)$ es definida,

entonces $\varphi'(x) \simeq \varphi_s(x)$. BASE: $s = 0$. Vacuamente verdadera. PASO DE INDUCCION. Supóngase para un $x$ dado que $\varphi_{s+1}(x)$ es definida. Entonces $\varphi_{s+1}(x) \simeq \mathsf{F}(\varphi_s; x) \simeq \mathsf{F}(\varphi'; x)$ [por el Teorema XXI (a), puesto que por hip. de ind. $\varphi'$ es una extensión de $\varphi_s$] $\simeq \varphi'(x)$.

(iii) *Si* F *define a* $\mathsf{F}(\zeta; x)$ *recursivamente a partir de* $\zeta$, *y* E *proviene de* F *mediante la sustitución del símbolo de función dado* g *por el símbolo de función principal* f, *entonces* E *define a* $\varphi$ *recursivamente.* Bastará mostrar que $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$, si y sólo si $\varphi_s(x) \simeq k$ para algún $s$. Vemos fácilmente que si $\varphi_s(x) = k$, entonces $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$. Respecto a la conversa, mostramos por inducción sobre $h$ que si hay una deducción de $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ a partir de E con altura $h$, entonces $\varphi_s(x) = k$ para algún $s$. La deducción puede ser alterada si es necesario, de suerte que en cada inferencia mediante R2 con una premisa menor de la forma $\mathrm{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$, sólo una ocurrencia de $\mathrm{f}(\boldsymbol{y})$ es reemplazada por $\boldsymbol{z}$ en la premisa mayor (ACTO 1). Las ocurrencias de f en ecuaciones de la deducción pueden ser clasificadas de una manera evidente en aquéllas que provienen de una ocurrencia de f en F, y aquéllas que provienen, mediante la sustitución de g por f, de una ocurrencia de g en F. Considérense ahora las inferencias realizadas por R2 con premisa menor de la forma $\mathrm{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$, en donde la f de la parte $\mathrm{f}(\boldsymbol{y})$ reemplazada proviene de una g en F. Digamos que hay $p$ inferencias de esta índole, cuyas premisas menores $\mathrm{f}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \mathrm{f}(\boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{z}_p$ no están por encima de otras premisas del mismo carácter. Cada una de estas premisas $p$ ocurría por encima de la ecuación final de la deducción dada antes del Acto 1; así, utilizando la hipótesis de la inducción, $z_1 \simeq \varphi_{s_1}(y_1) \simeq \varphi_s(y_1), \ldots, z_p \simeq \varphi_{s_p}(y_p) \simeq \varphi_s(y_p)$ donde $s = \max(s_1, \ldots, s_p)$. Considérese ahora el árbol resultante de la deducción después del Acto 1, cuando todas las ecuaciones por encima de $\mathrm{f}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \mathrm{f}(\boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{z}_p$ son removidas (ACTO 2). En este árbol, supongamos que cada ocurrencia de f, que (antes del Acto 2) provenía de una g de F, se ha vuelto a cambiar en g (ACTO 3). Las f's en cuestión ocurrían todas en los miembros derechos de las ecuaciones, ya que siendo g el símbolo de función dado de F ocurre en F solamente a la derecha; así pues, ninguna f es cambiada por el Acto 3 en lo que era una premisa menor para R2, antes del Acto 3 o en la ecuación final $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$. Finalmente, sean cambiadas las f's de $\mathrm{f}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \mathrm{f}(\boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{z}_p$ por g (ACTO 4), lo cual restaura las inferencias realizadas mediante R2 que el Acto 3 había destruido. El árbol resultante es una deducción de $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ a partir de $\mathrm{E}_{\mathrm{g}}^{\varphi_s}$, F. De donde

$$k \simeq \mathsf{F}(\varphi_s; x) \simeq \varphi_{s+1}(x).$$

EJEMPLO 1. Considérese el problema: hallar una función recursiva parcial $\varphi$ tal que

(a) $$\varphi(x) \simeq \varphi(x);$$

esto es, resuélvase la ecuación $\zeta(x) \simeq \zeta(x)$ para $\zeta$. Obviamente cualquier función parcial satisface esta cuestión. La función parcial con el menor rango de definición que la satisface es la función completamente no definida. Tal es la solución $\varphi$ dada por el teorema (con $\mathsf{F}(\zeta; x) \simeq \zeta(x)$).

EJEMPLO 2. Hállese una función recursiva parcial $\varphi$ tal que

(a) $$\varphi(x) \simeq \varphi(x) + 1;$$

esto es, resuélvase $\zeta(x) \simeq \zeta(x) + 1$ para $\zeta$. Sólo la función parcial completamente no definida la satisface. Tal es, sin duda, la solución $\varphi$ dada por el teorema (con $\mathsf{F}(\zeta; x) \simeq \zeta(x) + 1$).

EJEMPLO 3. Hallar una función $\varphi$ recursiva parcial en $\chi$ tal que

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \varphi(0) \simeq q, \\ \varphi(y') \simeq \chi(x, \varphi(y)) \end{cases}$$

(Esquema (Va) § 43). Solamente una función $\varphi$ satisface lo anterior para una $\chi$ dada, y sabemos ya por el Teorema XVII (a) que es recursiva parcial en $\chi$. No obstante, para ver cómo se aplica el teorema, reescribimos (a) como

$$\text{(b)} \quad \varphi(x) \simeq \mathsf{F}(\varphi, \chi; x) \text{ donde } \mathsf{F}(\zeta, \chi; x) \simeq \begin{cases} q \text{ si } x = 0, \\ \chi(x \dot{-} 1, \zeta(x \dot{-} 1)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

(de modo equivalente,

$$\mathsf{F}(\zeta, \chi; x) \simeq \mu w\, [\{x = 0 \;\&\; w = q\} \;\mathsf{V}\; \{x > 0 \;\&\; w = \chi(x \dot{-} 1, \zeta(x \dot{-} 1))\}]).$$

Puesto que $\mathsf{F}(\zeta, \chi; x)$ es parcial recursivo (usando los Teoremas XVII, XX (c); o XVII, XVIII, XX (a)), $\varphi$ es recursiva parcial en $\chi$ por el teorema.

EJEMPLO 4. Ofrecemos una nueva demostración del Teorema XVIII (demostración que apareció en varios modos en Kleene, 1935, 1936, 1943). Sea $\varphi(x) \simeq \mu y\, [\chi(x, y) = 0]$. Entonces $\varphi(x) \simeq \varphi(x, 0)$ donde

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x, y) \simeq \mu t_{t \geq y}\, [\chi(x, t) = 0\,].$$

Pero $\varphi(x, y)$ es la función parcial $\varphi$ con el mínimo rango de definición tal que

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x, y) \simeq \begin{cases} y \text{ si } \chi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y') \text{ si } \chi(x, y) \neq 0. \end{cases}$$

Por el Teorema XX (c) (con la primera demostración), el lado derecho de (b) es de la forma $\mathsf{F}(\varphi, \chi; x, y)$ donde $\mathsf{F}(\zeta, \chi; x, y)$ es recursivo parcial; así, por el presente teorema, $\varphi(x, y)$, y en consecuencia $\varphi(x)$, es recursiva parcial en $\chi$.

DISCUSION. Para $l = 0$ el teorema afirma que podemos imponer cualquier tipo de relación de la forma

$$(72) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathsf{F}(\varphi; x_1, \ldots, x_n)$$

y que exprese el valor ambiguo $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de una función $\varphi$ en términos del mismo $\varphi$ y de $x_1, \ldots, x_n$ por métodos tratados ya en la teoría de funciones recursivas parciales; y concluye que la función parcial con el mínimo rango de definición que satisface esa relación es recursiva parcial.

Además el caso del teorema para $l > 0$, en el cual

$$(73) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathsf{F}(\varphi, \Psi; x_1, \ldots, x_n)$$

es la relación impuesta, puede ser usado para extender el cuerpo de métodos disponibles para ulteriores aplicaciones.

En nuestros ejemplos de tipos especiales de "recursión" (§§ 43, 46 y comienzo de § 55) el valor ambiguo de la función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ estaba expresado en términos de valores de la misma función para conjuntos de argumentos que precedían el $n$-tuplo dado $x_1, ..., x_n$ en términos de alguna especial ordenación de los $n$-tuplos. Tenemos ahora un tipo general de "recursión", en el cual el valor de $\varphi(x_1, ..., x_n)$ puede ser expresado en tanto que dependiendo de otros valores de la misma función de una manera bastante arbitraria, supuesto sólo que la regla de dependencia se pueda describir por métodos efectivos previamente tratados.

La "recursión" dada puede ahora ser ambigua como definición de una función $\varphi$ ordinaria (esto es, completamente definida) de teoría de números, en el sentido de que es satisfecha por más de una función de esa índole (Ejemplo 1, o (b) en el Ejemplo 4 cuando $\chi(x, y)$ no desaparece para un número infinito de valores de $y$). Pero ahora elegimos, como la solución que nos interesa, esa función parcial que es definida sólo cuando la recursión requiera que lo sea. La "recursión" dada puede ser inconsistente como definición de una función ordinaria (Ejemplo 2); de nuevo es obviada ahora la dificultad merced al hecho de que es sólo una función parcial lo que estamos buscando como solución. Las dos situaciones pueden surgir cuando **F** es recursivo general (Ejemplos 1 y 2). Cuando **F** es incompletamente definido, la recursión puede también exigir directamente, según nuestra usual convención (§ 63), que $\varphi$ sea no definida para algunos argumentos (p. ej. Ejemplo 3 cuando $\chi$ es dada como la función completamente no definida), como también indirectamente mediante una inconsistencia (no necesariamente de modo tan obvio como en el Ejemplo 2).

Dada una relación particular de la forma (72) o (73), puede resultar un difícil problema el reconocer para qué argumentos $x_1, ..., x_n$ ha de ser definido el valor de la función $\varphi(x_1, ..., x_n)$. Dicho problema está separado del problema, que resuelve el primer teorema de recursión, de reconocer la recursividad parcial de la solución $\varphi$ que tenga el mínimo rango de definición.

Podemos utilizar el teorema al presentar el caso bajo (A2) § 62. Nuestros métodos para mostrar que funciones dadas efectivamente calculables son recursivas parciales (y por tanto, cuando están completamente definidas son recursivas generales) se encuentran ahora desarrollados hasta un punto que parecen adecuados para elaborar una definición efectiva de cualquier función que pueda ser propuesta. Para describir en lenguaje ordinario un procedimiento de cálculo de una nueva función $\varphi$, tendríamos que explicar efectivamente cómo habría de obtenerse cualquier valor de una función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ a partir de valores de $\varphi$ de antemano calculados. En esta explicación, emplearíamos normalmente funciones efectivamente calculables previamente estudiadas, las conectivas del cálculo proposicional, posiblemente también cuantificadores ligados (cuantificadores no ligados no serían efectivos), y descripciones de la forma 'el mínimo número tal que'. Este vocabulario sería traducido a operaciones ya tratadas en nuestra teoría (cfr. en particular los Teoremas XVIII y XX). La explicación tomada en su totalidad entraría entonces bajo el primer teorema de recursión; es decir, podríamos expresarla como un enunciado que dijese que $\varphi$ ha de satisfacer (72) para un cierto **F**, y que ha de ser definida sólo cuando la explicación conduzca a un valor; esto es, $\varphi$ ha de ser la función del mínimo rango de definición que satisfaga (72). Entonces, por el teorema, podemos concluir que $\varphi$ es recursiva parcial.

Algunas otras operaciones, junto a las recién mencionadas, pueden ser realizadas por métodos ya considerados, p. ej. la definición de varias funciones simultánea-

mente (cfr. Ejemplo 4 § 46). Y aún podríamos emplear otras nociones que podrían ser explicadas primero en términos del anterior vocabulario. Nuestros resultados están formulados de manera que constituyen no sólo métodos para mostrar que funciones particulares son recursivas parciales (o generales), sino también herramientas que permiten aumentar nuestro arsenal de métodos cuando tal necesidad pueda surgir.

TEOREMA XXVII. *Para cada* $n > 0$: *Dada cualquier función recursiva parcial* $\psi(z, x_1, ..., x_n)$, *puede ser hallado un número* $e$ *que define a* $\psi(e, x_1, ..., x_n)$ *recursivamente, es decir, tal que*

$$\{e\}(x_1, ..., x_n) \simeq \psi(e, x_1, ..., x_n). \tag{74a}$$

*Similarmente, para l funciones y predicados* $\Psi$ *completamente definidos, leyendo "recursivo parcial en* $\Psi$", "*define recursivamente a partir de* $\Psi$", "$\{\ \}^{\Psi}$ *en lugar de "recursivo parcial", "define recursivamente", "*$\{\ \}$", *respectivamente.* (El teorema de recursión, Kleene 1938).

DEMOSTRACION (para $l = 0$). La función $\psi(S_n^1(y, y), x_1, ..., x_n)$ es recursiva parcial (cfr. Teorema XXIII). Supóngase que $f$ la define recursivamente, y tómese $e = S_n^1(f, f)$. Entonces $e$ define recursivamente a la función de $n$ variables obtenida al sustituir la variable $y$ en $\psi(S_n^1(y, y), x_1, ..., x_n)$ por el número $f$; es decir, $e$ define recursivamente a $\psi(S_n^1(f, f), x_1, ..., x_n)$; o sea, $e$ define recursivamente a $\psi(e, x_1, ..., x_n)$, como había que mostrar.

DISCUSION. Puede leerse el teorema como expresando que para cualquier función recursiva parcial $\psi$, la ecuación

$$z(x_1, ..., x_n) \simeq \psi(z, x_1, ..., x_n)$$

puede ser resuelta para $z$. En lo que respecta a la notación, cfr. § 65, especialmente (66). Si escribimos $\varphi(x_1, ..., x_n)$ por la función $e(x_1, ..., x_n)$, definida recursivamente mediante la solución $e$ de esta ecuación, (74a) puede ser escrita:

$$\varphi(x_1, ..., x_n) \simeq \psi(e, x_1, ..., x_n). \tag{74b}$$

Pero $\psi(z, x_1, ..., x_n)$ puede ser cualquier función recursiva parcial de $n + 1$ variables. Así el teorema dice que puede hallarse una función recursiva parcial $\varphi$ cuyo valor ambiguo $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es dado a partir de un número de Gödel $e$ de sí misma y los números $x_1, ..., x_n$ por una función recursiva parcial $\psi$ preasignada. Luego puede utilizarse $\varphi$ para construir su propio valor ambiguo, puesto que al construir $\psi(e, x_1, ..., x_n)$ podemos utilizar $e$ en partes que tienen la forma $\Phi_n(e, u_1, ..., u_n)$ (brevemente, $e(u_1, ..., u_n)$), y $\Phi_n(e, u_1, ..., u_n)$ es $\varphi(u_1, ..., u_n)$. Puede subrayarse este punto estableciendo un corolario. (Se deja al lector la versión del corolario para $l > 0$).

COROLARIO. *Dado un funcional recursivo parcial* $\mathsf{F}(\zeta; z, x_1, ..., x_n)$, *donde* $\zeta$ *fluctúa sobre funciones recursivas parciales de n variables, puede hallarse una función recursiva parcial* $\varphi$ *y un número de Gödel e de* $\varphi$ *tal que*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) \simeq \mathsf{F}(\varphi; e, x_1, ..., x_n). \tag{75}$$

*Dado un funcional recursivo parcial* $\mathbf{F}(\zeta, \theta_1, ..., \theta_r; z, w_1, ..., w_r, x_1, ..., x_n)$, *donde* $\zeta$ *fluctúa sobre funciones recursivas parciales de n variables, y* $\theta_1, ..., \theta_r$ *fluctúan sobre funciones recursivas parciales de números especificados de variables, puede hallarse una función recursiva parcial* $\varphi(w_1, ..., w_r, x_1, ..., x_n)$ *y un número de Gödel e de* $\varphi$ *tal que, cuando* $t_1, ..., t_r$ *son cualesquiera números de Gödel de* $\theta_1, ..., \theta_r$, *respectivamente,*

(76) $\varphi(t_1, ..., t_r, x_1, ..., x_n) \simeq \mathbf{F}(\varphi, \theta_1, ..., \theta_r; e, t_1, ..., t_r, x_1, ..., x_n)$.

DEMOSTRACION (para $r = 0$). Por el Teorema XXIV (a), podemos hallar una función recursiva parcial $\psi$ de $n+2$ variables tal que

$$\mathbf{F}(\zeta; z, x_1, ..., x_n) \simeq \psi(s, z, x_1, ..., x_n)$$

cuando $s$ es cualquier número de Gödel de $\zeta$. Sea ahora $\psi(z, x_1, ..., x_n) \simeq (z, z, x_1, ..., x_n)$. Entonces, por el teorema hallamos un número $e$ para (74). Escribiendo $\varphi(x_1, ..., x_n)$ para la función definida recursivamente por $e$, tenemos $\varphi(x_1, ..., x_n) \simeq \psi(e, x_1, ..., x_n) \simeq \psi(e, e, x_1, ..., x_n) \simeq \mathbf{F}(\varphi; e, x_1, ..., x_n)$.

DISCUSION (conclusión). Cuando $\varphi$ es uniformemente recursiva parcial en $\zeta$, podemos considerar que $\varphi$ depende de modo recursivo parcial de $\zeta$ como una función; cuando $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es una función recursiva parcial de $x_1, ..., x_n$ y un número de Gödel de $\zeta$, esa $\varphi$ depende de modo recursivo parcial de $\zeta$ como un objeto. La ventaja del Teorema XXVII sobre el XXVI consiste en que ahora al imponer una relación que exprese el valor ambiguo de $\varphi(x_1, ..., x_n)$ de un modo recursivo parcial en términos de la misma $\varphi$ y de $x_1, ..., x_n$, podemos permitir que $\varphi$ entre no sólo como una función sino también como un objeto. Nuestra conclusión es, pues, que alguna función recursiva parcial $\varphi$ satisface dicha relación; pero en general se obtendrán diferentes soluciones $\varphi$ a partir de diferentes selecciones de los números de Gödel $f$ de $\psi(S_n^1(y, y), x_1, ..., x_n)$ en la demostración del Teorema XXVII.

El Teorema XXVII no incluye enteramente al XXVI dado que el caso $\varphi$ entra en la "recursión" sólo a título de función (de manera que el $\mathbf{F}(\zeta; z, x_1, ..., x_n)$ del corolario se reduce a $\mathbf{F}(\zeta; x_1, ..., x_n)$), porque el método de demostración del Teorema XXVII no muestra (al menos sin algún argumento ulterior) que la solución recursiva parcial obtenida $\varphi$ es necesariamente aquélla que tiene el mínimo rango de definición. Así el Teorema XXVII mediante su corolario puede tomar el lugar del Teorema XXVI en apoyo de las Tesis I, I*, I$^\dagger$ (b) y I*$^\dagger$ (b), pero no de I$^\dagger$ (a) y I*$^\dagger$ (a).

Sin duda que sólo después de haber dispuesto de la tesis de Church es cuando tenemos los medios para considerar a toda función efectivamente calculable como un objeto de teoría de números. Que pueda hallarse una función efectivamente calculable que satisfaga cualquier "recursión" en la que dicha función entre como un objeto además de como función, es, pues, una consecuencia de esa tesis cuya utilidad se demuestra en el análisis de ulteriores cuestiones.

EJEMPLO 2 (conclusión). Para tratar este punto por el Teorema XXVII en lugar del XXVI, tómese $\psi(z, x)$ en el Teorema XXVII $\simeq \Phi_1(z, x) + 1$.

EJEMPLO 3 (conclusión). Similarmente tomando $\psi(z, x) \simeq$ $\mathbf{F}(\lambda x \Phi_1(z, x), \chi; x) \simeq \mu w [\{x = 0 \,\&\, w = q\} \vee \{x > 0 \,\&\, w = \chi(x \dot{-} 1, \Phi_1(z, x \dot{-} 1))\}]$.

EJEMPLO 5. Dadas funciones recursivas parciales fijas $\theta_1, ..., \theta_5$, hallar una función recursiva parcial $\varphi$ con las siguientes propiedades. Si $\theta_1(x) = 0$, $\varphi(x) = 1$. Si $\theta_1(x) = 1$, $\varphi(x) \simeq \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))$. Si $\theta_1(x) = 2$, $\varphi(x) \simeq \theta_4(a_{\varphi,x})$ donde $a_{\varphi,x}$ es algún número que define a $\lambda y \varphi(\theta_5(x, y))$ recursivamente. Obsérvese en primer lugar que si $e$ es cualquier número de Gödel de $\varphi$, entonces $\varphi(\theta_5(x, y)) \simeq \Phi_1(e, \theta_5(x, y))$. Ahora bien, $\lambda zxy\, \Phi_1(z, \theta_5(x, y))$ es una función recursiva parcial fija. Si $g$ es un número de Gödel de ella, entonces $S_1^2(g, e, x)$ es un número de Gödel de $\lambda y \Phi_1(e, \theta_5(x, y))$, esto es, de $\lambda y \varphi(\theta_5(x, y))$. Las tres propiedades anteriores son impuestas ahora sobre $\varphi$ por la ecuación

$$\text{(a)}\quad \varphi(x) \simeq \mu w\,[\{\theta_1(x) = 0 \,\&\, w = 1\} \vee \{\theta_1(x) = 1 \,\&\, w = \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))\} \vee \{\theta_1(x) = 2 \,\&\, w = \theta_4(S_1^2(g, e, x))\}].$$

Lo cual es de la forma (75) en el corolario, puesto que (utilizando los Teoremas XVII, XVIII, XX, XXIII) el lado derecho es de la forma $\mathsf{F}(\varphi; e, x)$ donde $\mathsf{F}(\zeta; z, x)$ es un esquema de función recursivo parcial fijo, y $e$ puede ser cualquier número de Gödel de $\varphi$. Para el teorema

$$\psi(z, x) \simeq \mu w\,[\{\theta_1(x) = 0 \,\&\, w = 1\} \vee \{\theta_1(x) = 1 \,\&\, w = \theta_2(\Phi_1(z, \theta_3(x)))\} \vee \{\theta_1(x) = 2 \,\&\, w = \theta_4(S_1^2(g, e, x))\}].$$

El problema, tal como precede, surgió con respecto a funciones particulares $\theta_1, ..., \theta_5$ en Kleene 1938. Podemos generalizarlo si consideramos a $\theta_1, ..., \theta_5$ como funciones recursivas parciales no especificadas. Sean $t_1, ..., t_5$ cualesquiera números de Gödel de ellas. Si $h$ es un número de Gödel de $\lambda zwxy\, \Phi_1(z, \Phi_2(w, x, y))$, entonces $S_1^3(h, e, t_5, x)$ es un número de Gödel de $\lambda y \Phi_1(e, \Phi_2(t_5, x, y))$, esto es, de $\lambda y \varphi(\theta_5(x, y))$. Ahora las propiedades son impuestas sobre $\varphi$ por

$$\text{(b)}\quad \varphi(x) \simeq \varphi(t_1, ..., t_5, x) \simeq \mu w\,[\{\theta_1(x) = 0 \,\&\, w = 1\} \vee \{\theta_1(x) = 1 \,\&\, w = \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))\} \vee \{\theta_1(x) = 2 \,\&\, w = \theta_4(S_1^3(h, e, t_5, x))\}].$$

Por la segunda parte del corolario, podemos hallar una función recursiva parcial $\varphi(w_1, ..., w_5, x)$ y un número de Gödel $e$ de $\varphi$ para satisfacer (b).

CAPITULO XIII

# FUNCIONES COMPUTABLES

§ 67. **Máquinas de Turing.** Supongamos que una persona tiene que computar el valor de una función para un conjunto dado de argumentos, siguiendo instrucciones efectivas preasignadas. Al efectuar la computación, utilizará un número finito de símbolos o marcas distintas de alguna clase. Sólo puede tener bajo observación a un mismo tiempo, un número finito de ocurrencias de símbolos. También puede recordar otros previamente observados pero, de nuevo, sólo un número finito. Las instrucciones preasignadas también deben ser finitas. Aplicando las instrucciones al número finito de símbolos o marcas observadas y recordadas, puede efectuar un acto que cambia la situación de un modo finito, p. ej. añade o borra algunas ocurrencias de símbolos, desvía su observación a otros, registra en su memoria los que acaba de observar. Una sucesión de actos tales, debe conducirle desde una expresión simbólica que representa los argumentos, a otra expresión simbólica que representa el valor de la función.

Ahora preguntamos si no es posible analizar o descomponer los actos que el computador puede efectuar, en ciertos actos "atómicos", de tal manera que cualquier acto ejecutable sea equivalente a alguna sucesión de actos atómicos. Los actos atómicos serían combinaciones de lo siguiente: reconocer una sola ocurrencia observada de un símbolo dado, borrar esta ocurrencia, anotar una sola ocurrencia de un símbolo, desplazar el punto de observación de un conjunto dado de símbolos a un punto adyacente, y alterar la información recordada.

Un análisis tal fue emprendido por Turing (1936-7, recibido para publicación el 28 de mayo de 1936) en la forma de una definición de una clase de máquina de computar. Un análisis similar fue propuesto brevemente por Post (1936, recibido para publicación el 7 de octubre de 1936).

La evidencia de que el análisis es completo, es decir, que para cualquier función que sea evidentemente calculable puede hallarse una máquina de Turing que la compute, será revisada después que nos hayamos familiarizado con las máquinas de Turing (§ 70).

Comenzamos por formular la idea de una máquina de Turing, como sigue.

La máquina está provista de una *cinta* lineal, (potencialmente) infinita en ambas direcciones (digamos a la *izquierda* y a la *derecha*). La cinta está dividida en *cuadrados*. Cada cuadrado puede estar en *blanco* o tener *impreso* sobre él un símbolo cualquiera de una lista finita $s_1, \ldots, s_j$ ($j \geq 1$) de *símbolos*, fijada para una máquina particular. Si escribimos "$s_0$" para simbolizar un "blanco", un cuadrado dado puede así tener cualquiera de las $j + 1$ *condiciones* $s_0, \ldots, s_j$. La cinta será empleada de modo que en cualquier "situación", sólo estará impreso un número finito ($\geq 0$) de cuadrados.

La cinta pasará a través de la máquina de tal manera que en una "situación" dada, la máquina *escudriña* sólo un cuadrado (el *cuadrado escudriñado*). Al símbolo sobre este cuadrado, o a $s_0$ si el cuadrado está en blanco, lo llamamos el *símbolo escudriñado* (incluso aunque $s_0$ no sea propiamente un símbolo).

La máquina es capaz de hallarse en cualquier estado de una lista finita $q_0, \ldots, q_k$ ($k \geq 1$) de *estados* (*de máquina*) (llamados por Turing "configuraciones de máquina" o "*m*-configuraciones"). Llamamos a $q_0$ el *estado pasivo* (*o terminal*); y a $q_1, \ldots, q_k$ los llamamos *estados activos*. La lista $q_0, \ldots, q_k$ es fijada para una máquina particular.

Una *situación* (*de la cinta o de la máquina*) (llamada por Turing "configuración completa") consiste en una impresión particular sobre la cinta (esto es, qué cuadrados están impresos y cada uno con cuál de los $j$ símbolos), una posición particular de la cinta en la máquina (esto es, qué cuadrado es escudriñado), y un estado particular (esto es, en cuál de los estados $k + 1$ está la máquina). Si el estado es activo, llamamos a la situación *activa*; de lo contrario, *pasiva*.

Dada una situación activa, la máquina efectúa un *acto* (*atómico*) (llamado un "movimiento" por Turing). El acto ejecutado está determinado por el símbolo escudriñado $s_a$ y el estado de máquina $q_c$ en la situación dada. A este par $(s_a, q_c)$ lo llamamos la *configuración*. (Es *activa* en el presente caso en que $q_c$ es activo; de lo contrario, es *pasiva*). El acto altera las tres partes de la situación para producir una situación resultante, del siguiente modo: Primero, el símbolo escudriñado $s_a$ es cambiado por $s_b$. (Pero se permite $a = b$ en cuyo caso el "cambio" es idéntico). Segundo, la cinta se desplaza en la máquina (o la máquina se desplaza a lo largo de la cinta) de tal manera que el cuadrado escudriñado en la situación resultante es, o un cuadrado a la izquierda de, o el mismo cuadrado que, o un cuadrado a la derecha del cuadrado escudriñado en la situación dada. Tercero, el estado de máquina $q_c$ es cambiado por $q_d$. (Pero se permite $c = d$).

Si la situación dada es pasiva, no se efectúa ningún acto.

La máquina se utiliza de la manera siguiente. Elegimos alguna situación activa en la que comience la máquina. Llamamos a ésta la *situación inicial* o *entrada*. Nuestra notación estará elegida de forma que el estado en esta situación (el *estado inicial*) sea $q_1$. La máquina entonces ejecuta un acto atómico. Si la situación resultante de este acto es activa, la máquina actúa de nuevo. La máquina continúa de esta manera, ejecutando actos sucesivos, durante tanto tiempo y sólo durante tanto tiempo como resulten situaciones activas. Si eventualmente se alcanza una situación pasiva, entonces la máquina tiene la orden de *parar*. A la situación en la que se para la máquina la llamamos *situación terminal* o *salida*.

El cambio desde la situación inicial a la situación terminal (cuando lo hay) puede llamarse la *operación* efectuada por la máquina.

Para describir un acto atómico, utilizamos una expresión de una de las tres formas siguientes:

$$s_b I q_d, \qquad s_b C q_d, \qquad s_b D q_d.$$

Las "*I*", "*C*", "*D*" indican que el cuadrado escudriñado resultante es el de la izquierda de, el mismo que ("centro"), o el de la derecha del cuadrado escudriñado dado respectivamente.

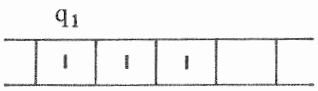
La primera parte del acto (o sea, el cambio de $s_a$ a $s_b$) se sujeta a cuatro casos: cuando $a = 0$ y $b > 0$, es "imprime $s_b$"; cuando $a > 0$ y $b = 0$, "borra $s_a$"; cuando $a, b > 0$ y $a \neq b$, "borra $s_a$ e imprime $s_b$" o brevemente: "imprime encima $s_b$"; cuando $a = b$, "ningún cambio". A menudo describimos esta parte del acto como "imprime $s_b$" sin considerar el caso concreto.

Para definir una máquina particular, debemos alistar los símbolos $s_1, ..., s_j$ y los estados activos $q_1, ..., q_k$, y para cada configuración activa $(s_a, q_c)$ debemos especificar el acto atómico que va a efectuarse. Estas especificaciones se pueden dar presentando las descripciones de los actos requeridos en la forma de una *tabla* (*de máquina*) con $k$ filas para los estados activos y $j + 1$ columnas para las condiciones del cuadrado.

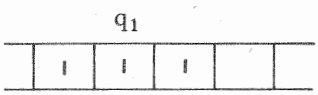
EJEMPLO 1. La tabla siguiente define una máquina ("Máquina $\mathfrak{A}$") que tiene un solo símbolo $s_1$ y un solo estado activo $q_1$.

| Nombre de la máquina | Estado de la máquina | Símbolo escudriñado | |
|---|---|---|---|
| | | $s_0$ | $s_1$ |
| $\mathfrak{A}$ | $q_1$ | $s_1 C q_0$ | $s_1 D q_1$ |

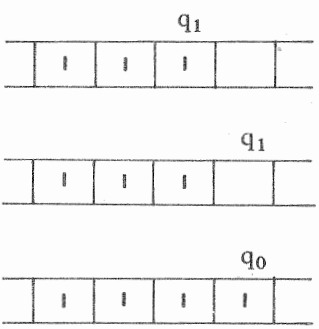
Supongamos que el símbolo $s_1$ sea de hecho una marca "1". Veamos qué hace la máquina, si se sitúa inicialmente en ella una cinta de las siguientes características, de manera que el cuadrado que identificamos escribiendo sobre él el estado de máquina $q_1$ sea el cuadrado escudriñado. Las condiciones de todos los cuadrados no mostrados serán irrelevantes y no cambiarán durante la acción.




La máquina está en el estado $q_1$ y está escudriñando un cuadrado en el que está impreso el símbolo $s_1$. En esta configuración, el acto atómico ordenado por la tabla es $s_1 D q_1$; esto es, no se efectúa ningún cambio en la condición del cuadrado escudriñado, la máquina se mueve a la derecha y de nuevo toma el estado $q_1$. La situación resultante aparece como sigue.




Los tres actos siguientes conducen sucesivamente a las siguientes situaciones, en la última de las cuales la máquina para.



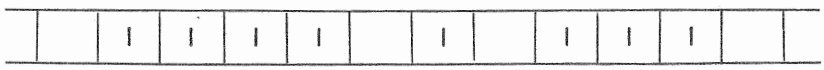
La máquina $\mathfrak{A}$ efectúa la siguiente operación: busca el primer cuadrado en blanco en, o a la derecha, del cuadrado escudriñado, imprime allí una I y deja de escudriñar ese cuadrado.

Definimos ahora cómo "computará" una máquina una función parcial de teoría de números $\varphi$ de $n$ variables (cfr. § 63). La definición para una función de teoría de números ordinaria (es decir, completamente definida), se obtiene omitiendo la referencia a la posibilidad de que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ sea no definida.

Comenzamos acordando representar los números naturales 0, 1, 2, ... mediante las secuencias de marcas I, II, III, ..., respectivamente, siendo la marca "I" el símbolo $s_1$. Hay $y + 1$ marcas en la representación del número natural $y$.

Entonces para representar un $m$-tuplo $y_1, ..., y_m$ $(m \geq 1)$ de números naturales en la cinta, imprimimos los correspondientes números de marcas, dejando un solo blanco entre cada dos grupos de marcas y antes del primero y después del último.

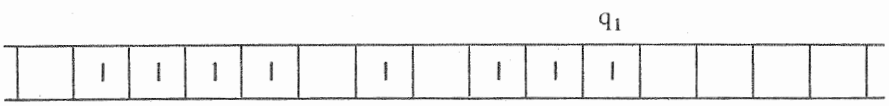
EJEMPLO 2. El triplo 3, 0, 2 se representa así:



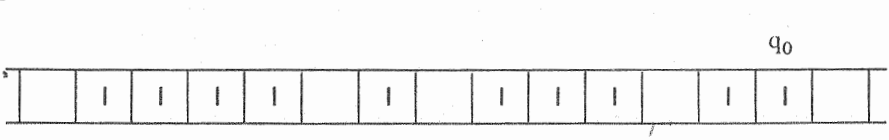
Decimos que (la representación de) un número $y$ (o de un $m$-tuplo $y_1, ..., y_m$) sobre la cinta está (*escudriñado*) *en posición standard*, cuando el cuadrado escudriñado es el que ostenta la última marca en la representación de $y$ (o de $y_m$).

Decimos ahora, que una máquina dada $\mathfrak{M}$ *computa* una función parcial dada $\varphi$ de $n$ variables $(n \geq 1)$ si es válido lo siguiente para cada $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ de números naturales. (Para el caso $n = 0$, cfr. Observación 1 abajo). Sean $x_1, ..., x_n$ representados en la cinta, con el resto de la cinta en blanco, es decir, fuera de los cuadrados $x_1 + ... + x_n + 2n + 1$ requeridos para la representación. Supóngase que $\mathfrak{M}$ comienza escudriñando la representación de $x_1, ..., x_n$ en posición standard. Entonces $\mathfrak{M}$ eventualmente parará con el $n + 1$-tuplo $x_1, ..., x_n, x$ representado en la cinta y escudriñado en posición standard, si y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es definida y $\varphi(x_1, ..., x_n) = x$. (Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es no definida, $\mathfrak{M}$ puede no parar. Puede parar, pero sin un $n + 1$-tuplo $x_1, ..., x_n, x$ escudriñado en posición standard).

EJEMPLO 2 (conclusión). Si $\varphi(3, 0, 2) = 1$ y $\mathfrak{M}$ computa $\varphi$, entonces cuando $\mathfrak{M}$ comienza en la situación




con todos los cuadrados, excepto los mostrados, en blanco, debe eventualmente parar en la situación




donde la condición de los cuadrados que no hayan sido mostrados es irrelevante.

Aunque sólo se utiliza un símbolo $s_1$ ó "|" al establecer los argumentos y al recibir el valor de la función, pueden utilizarse otros en la marcha de la computación. Para cada $n \geq 1$ cada máquina (con su primer símbolo $s_1$ sirviendo de marca) computa una cierta función parcial de $n$ variables.

Una función parcial $\varphi$ es *computable* si hay una máquina $\mathfrak{M}$ que la compute.

No hemos intentado aquí reproducir la formulación detallada de Turing 1936-7, sino sólo su concepción general del comportamiento de las máquinas. Aunque observó una variedad de aplicaciones de sus máquinas, limitó los detalles de su desarrollo a máquinas para computar expansiones duales de números reales $x$ ($0 \leq x \leq 1$). Los dígitos sucesivos tenían que ser impresos *ad infinitum* en cuadrados alternos de una cinta infinita en un sentido, mientras los cuadrados intermedios eran reservados para notas provisionales, sirviendo como borrador en el curso de la computación. Debiera ser un fácil ejercicio, después de § 68 y § 69, mostrar que existe una máquina que hace tal, si, y sólo si, el $n$-ésimo dígito en la expansión dual es una función computable de $n$. Una crítica, que ayudará a quien desee estudiar el artículo de Turing en detalle, se da en el Apéndice a Post 1947. Nuestro tratamiento aquí se aproxima más, en algunos aspectos, al de Post 1936. Post 1936 consideró la computación con una cinta infinita en dos sentidos y un solo símbolo.

Nuestro principal objetivo es ahora demostrar la equivalencia de la computabilidad con la recursividad parcial o, cuando sólo se consideran funciones completamente definidas, con la recursividad general (§ 68, § 69).

Es de algún interés ver, al mismo tiempo, si una cinta infinita en un sentido y un símbolo, no serán suficientes. Decimos que una máquina $\mathfrak{M}$ *computa* $1/1\,\varphi$, si computa $\varphi$ sujeta a las restricciones siguientes, y decimos que $\varphi$ es $1/1$ *computable*, si es $1/1$ computada por alguna máquina $\mathfrak{M}$: (i) La máquina $\mathfrak{M}$ tiene un único símbolo $s_1$. Más aún, cuando $\mathfrak{M}$ ha comenzado según se describió para cualquier $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$, se comporta de tal manera que tienen lugar los casos ((ii)–(iv)) siguientes. (ii) Un cuadrado que en la situación inicial está a la izquierda de la representación de $x_1, ..., x_n$ (esto es, a la izquierda del blanco que precede a la primera marca de $x_1$) no será escudriñado en ninguna situación subsiguiente. Por tanto, la computación puede igualmente bien efectuarse sobre una cinta infinita en un sentido (infinita a la derecha). (iii) Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es definida, entonces en la situación terminal la representación de $x_1, ..., x_n$, $\varphi(x_1, ..., x_n)$ comienza en el mismo cuadrado en el que lo hizo la de $x_1, ..., x_n$ en la situación inicial, y todos los cuadrados a la derecha de la representación de $x_1, ..., x_n, \varphi(x_1, ..., x_n)$ están en blanco (también, por (ii), los de la izquierda). (iv) La máquina $\mathfrak{M}$ parará eventualmente, sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es definida.

Se seguirá de los resultados de § 68 y § 69 que la computabilidad $1/1$ es equivalente a la computabilidad; y de aquí que todas las nociones de computabilidad $w/s$ son equivalentes, donde $w$ es 1 ó 2, según que (ii)–(iv) sean requeridas o no, y $s$ es un límite superior para los números de símbolos que las diferentes máquinas pueden tener ($\infty$, si no hay límite superior finito). (En esta escala, nuestra noción original de computabilidad es la computabilidad $2/\infty$).

Pueden formularse otras variantes de 'computabilidad', p. ej., podríamos omitir (iii) y (iv) y retener (ii), o en lugar de (ii), podríamos suponer que la máquina

está provista de una cinta infinita sólo en un sentido, y requerir que se pare si se alcanza una situación desde la cual la tabla de la máquina ordena un movimiento hacia la izquierda a partir del cuadrado más a la izquierda. En vez de representar los números en la cinta mediante marcas, podemos utilizar la notación dual o decimal. No debería ser difícil mostrar, después de § 68 y § 69, que cada una de estas otras nociones de computabilidad es equivalente a las nuestras (cfr. § 70).

Extendemos ahora nuestras nociones al caso de la computación a partir de $l$ funciones completamente definidas $\psi_1, ..., \psi_l$ (brevemente $\Psi$), de $m_1, ..., m_l$ variables, respectivamente. Aquí la idea se modifica por la suposición de que cualquier valor de una de las funciones $\Psi$, si es exigido en el curso de la computación, será desde luego facilitado (cfr. final de § 61).

Una máquina con este propósito puede tener entre sus estados activos $q_1, ..., q_k$ algunos estados desde los cuales se efectúe una nueva clase de acto (de carácter no atómico). Sea $q_c$ uno de esos estados. Cuando el estado es $q_c$ y (para un cierto $i$ dependiendo de $c$) un $m_i$-tuplo $y_1, ..., y_{m_i}$ es escudriñado en la posición standard, el acto ejecutado por la máquina consistirá en suministrar inmediatamente a la derecha de este $m_i$-tuplo, $\psi_i(y_1, ..., y_{m_i}) + 1$ marcas y un blanco, desplazando al mismo tiempo, mediante $\psi_1(y_1, ..., y_{m_i}) + 2$ cuadrados, a la derecha, todas las impresiones que previamente existían a la derecha del cuadrado escudriñado, y asumiendo luego el estado $q_d$ (dependiendo de $c$) con el $m_i + 1$-tuplo resultante $y_1, ..., y_{mi}, \psi_i(y_1, ..., y_{m_i})$ escudriñado en posición standard. Cuando el estado es $q_c$ pero no es escudriñado un $m_i$-tuplo en posición standard, consideraremos que la máquina efectúa un acto idéntico (siendo la situación resultante la misma que la situación original). En la tabla de máquina, correspondiendo a cada estado tal $q_c$, nosotros especificamos sólo el par $iq_d$, porque en otros aspectos, el acto está determinado a partir de la situación mediante las definiciones recién dadas y las funciones $\Psi$.

Modificando nuestra noción de máquina de esta manera, obtenemos las tres nociones: *máquina a partir de* $\Psi$, $\mathfrak{M}$ *computa* $\varphi$ *a partir de* $\Psi$, $\varphi$ *es computable a partir de* $\Psi$. Si (estando fijados $n, l, m_1, ..., m_l$), $\varphi$ es computable a partir de $\Psi$ por una máquina $\mathfrak{M}$, para lo cual la tabla es independiente de $\Psi$, decimos que $\varphi$ es *computable uniformemente a partir de* $\Psi$, o que el funcional $\varphi \simeq \mathsf{F}(\Psi)$ es *computable*. (Los teoremas de § 68 y § 69 establecen la uniformidad, siempre que la uniformidad se da por supuesta).

Al definir $\mathfrak{M}$ *computa* 1/1 $\varphi$ *a partir de* $\Psi$, y $\varphi$ es 1/1 *computable a partir de* $\Psi$, añadimos lo siguiente a nuestra lista primitiva (i)–(iv) de restricciones: (v) Para cada estado $q_c$ para el que la entrada de la tabla es de la forma $iq_d$, el estado $q_c$ se alcanza sólo cuando algún $m_i$-tuplo $y_1, ..., y_{m_i}$ es escudriñado en posición standard y todos los cuadrados a la derecha de la representación escudriñada de $y_1, ..., y_{m_i}$ están en blanco.

Podemos formular fácilmente la definición de "computabilidad" a partir de funciones supuestas, digamos a partir de $\psi$ (con $l = m_1 = 1$), de una manera equivalente, precisando que la máquina efectúa sólo actos de carácter atómico, pero está provista de una cinta que tiene (potencialmente) una impresión infinita en la que se representa la secuencia de los valores de $\psi$. Esta impresión puede estar en una segunda cinta o en cuadrados alternos de la misma cinta.

OBSERVACION 1. En este capítulo, fuera de la presente observación y pasajes referentes a ella, entenderemos que estamos tratando con funciones de $n \geq 1$ variables. Dado que no estamos preparados para representar $n$-tuplos de números naturales en la cinta para $n = 0$, decimos que una máquina *computa* una función $\varphi$ de 0 variables, si computa la función $\varphi(x)$ de 1 variable tal que $\varphi(x) \simeq \varphi$. Para una función supuesta $\psi_i$ de 0 variables, el acto no-idéntico desde un estado $q_c$ con entrada en la tabla $iq_d$, habrá de ser efectuado cuando cualquier 1-tuplo $x$ esté representado en la cinta. Con estas definiciones se seguirá, tan pronto como hayamos demostrado los Teoremas XXVIII–XXX para funciones de $> 0$ variables, que esos teoremas también son válidos para funciones de 0 variables.

§68. **Computabilidad de funciones recursivas.** TEOREMA XXVIII. *Toda función recursiva parcial $\varphi$ es* 1/1 *computable. Toda función $\varphi$, recursiva parcial en $l$ funciones $\Psi$ completamente definidas, es* 1/1 *computable a partir de $\Psi$.*

La demostración, dada al final de esta sección, se basará en el Corolario del Teorema XIX § 63 (para $l = 0$ y una función recursiva general $\varphi$, en el Corolario del Teorema IX §58). Un cálculo intuitivo conforme a los Esquemas (I)–(VI) se efectúa mediante repeticiones de unas pocas operaciones sencillas, tales como copiar un número previamente escrito (en una determinada posición anterior), añadir o sustraer uno, decidir si un número dado es 0 ó no es 0. Construiremos primero algunas máquinas para efectuar tales operaciones.

Comenzamos por introducir algunas notaciones que serán convenientes aquí, incluyendo modificaciones de las notaciones utilizadas en § 67.

Un cuadrado dado de la cinta debe ahora tener una de las dos condiciones $s_0$ y $s_1$, o blanco e impreso con una marca "1", o blanco y negro. En las ilustraciones de esta sección, será conveniente mostrar estas dos condiciones como "0" y "1" respectivamente.

Para identificar el símbolo escudriñado en nuestras ilustraciones, escribimos ahora usualmente una simple barra "—" sobre él, en vez del estado de la máquina como en § 67. Algunas veces, se escribirá con la barra un pequeño numeral "1" ó "2", para indicar un cierto estado de máquina (el mismo en todas las ocurrencias de ese numeral), sobre el que deseemos llamar la atención sin indicar por el momento cuál sea de entre los $q_0, \ldots, q_k$.

Al describir un acto atómico, escribimos ahora "*P*" ("imprime") para cambiar 0 en 1 (es decir, $s_0$ en $s_1$), "E" ("borra") para cambiar 1 en 0 (es decir, $s_1$ en $s_0$) y no ponemos nada para el cambio de $s_a$ a $s_b$ cuando $a = b$. Omitimos la "*C*" utilizada en § 67 para significar que no hay cambio en el cuadrado escudriñado. Ahora escribimos simplemente "0", "1", ..., "*k*" para los estados de máquina $q_0, \ldots, q_k$. Por ejemplo, el acto descrito "$s_1 C q_0$" en §67, se describe ahora como "*P*0" cuando fue $s_0$ el símbolo escudriñado inicialmente, y como "0" cuando el símbolo inicialmente escudriñado fue $s_1$.

Como ejemplo adicional, repetimos la tabla para la Máquina $\mathfrak{A}$ (Ejemplo 1, § 67) y la ilustración de la operación que efectúa (mostrando ahora solamente las situaciones inicial y final).

| Nombre de la máquina | Estado de la máquina | Símbolo escudriñado 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{A}$ | 1 | $P0$ | $R1$ |

Comenzando desde la situación inicial

$$\overline{1}\ 1\ 1\ 0,$$

la máquina $\mathfrak{A}$ alcanza la situación terminal

$$1\ 1\ 1\ \overline{1}.$$

La máquina $\mathfrak{A}$ imprime en el primer cuadrado en blanco, sea en, o a la derecha, del cuadrado escudriñado, y se para en él.

En nuestras ilustraciones anteriores a la "Demostración del Teorema XXVIII" ninguno de los cuadrados situados a la izquierda o a la derecha de los exhibidos es escudriñado en ninguna situación intermedia durante la acción de la máquina. Por tanto, su condición es irrelevante.

Para cada máquina construida antes de la "Demostración del Teorema XXVIII" estableceremos cuál es el cuadrado más a la izquierda escudriñado en cualquier situación intermedia, y en cada caso cuándo cae fuera del intervalo entre los cuadrados escudriñados inicial y terminalmente inclusive. Esta información será utilizada al concluir que las máquinas que construimos en la demostración del teorema, satisfacen la restricción (ii) § 67.

En esta sección, generalmente pensaremos que una secuencia de $y + 1$ cuadrados impresos consecutivos precedidos y seguidos por un cuadrado en blanco está representando al número natural $y$. El mismo cuadrado en blanco puede ser considerado simultáneamente como el último cuadrado de la representación de un número y el primero de la representación de otro. Ello nos capacita para imaginar que cualquier impresión de la cinta (infinita en dos sentidos) consiste en una sucesión finita de representaciones de números naturales. Cuando hay más de un cuadrado en blanco consecutivo (digamos $z + 1$ de ellos) entre dos grupos de cuadrados impresos consecutivos, hablamos de un *vacío* (de $z$ cuadrados) entre los números representados. A la porción blanca de la cinta antes del primero, o después del último cuadrado impreso, la llamamos también un *vacío* (de $\infty$ *cuadrados*). Como en § 67, no pensamos que $m$ representaciones sucesivas de números naturales en la cinta representen un $m$-tuplo, a menos que no haya vacío entre ellas.

Similares observaciones se aplican a una cinta infinita en un sentido, supuesto que el primer cuadrado (el más a la izquierda) esté en blanco. Puede o no puede haber un vacío (finito) antes del primer número.

Consideremos ahora el problema de construir una máquina $\mathfrak{B}$ que efectúe la siguiente operación: dado un número, no el más a la izquierda en la cinta, mover este número hacia la izquierda de tal manera que cierre el vacío (si lo hay) entre él y el número precedente. El número dado tiene que ser escudriñado en posición standard antes y después de la operación. El cuadrado más a la izquierda escudriñado en cualquier situación durante la acción, será el cuadrado impreso más a la derecha del número precedente.

Comenzamos con una ilustración, mostrando una situación inicial típica (Situación 1), algunas situaciones intermedias propuestas no necesariamente consecutivas

(Situaciones 2–16) y la deseada situación terminal (Situación 17), con vistas a un plan que mecanice la operación. Seguirán explicaciones y la tabla de una máquina que efectuará la operación de acuerdo con este plan. Las "$\mathfrak{B}_1$", "$\mathfrak{B}_2$", "$\mathfrak{B}_3$", "$\mathfrak{A}$" a la derecha, se refieren a un análisis de esta máquina como una combinación de máquinas más simples, que se da más adelante.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | |
| 2. | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | |
| 3. | 1 | 0 | 0 | $\overline{0}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $\mathfrak{B}_1$ |
| 4. | 1 | 0 | $\overline{0}$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 5. | 1 | 0 | 0 | $\overline{1}^1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $\mathfrak{B}_2$ |
| 6. | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | |
| 7. | 1 | 0 | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | |
| 8. | 1 | 0 | $\overline{0}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{B}_1$ |
| 9. | 1 | $\overline{0}$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 10. | 1 | 0 | $\overline{1}^1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{B}_2$ |
| 11. | 1 | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | |
| 12. | 1 | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 13. | 1 | $\overline{0}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{B}_1$ |
| 14. | $\overline{1}$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 15. | 1 | $\overline{1}^2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{B}_3$ |
| 16. | 1 | 0 | $\overline{1}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{A}$ |
| 17. | 1 | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | |

El paso desde la Situación 1 a la Situación 2 consiste en la eliminación del 1 escudriñado y un solo movimiento hacia la izquierda. Entonces (2–3) la máquina busca el primer cuadrado en blanco en o hacia la izquierda del cuadrado escudriñado; (3–4) imprime allí y se va un cuadrado más a la izquierda; (4–5) reconoce (en esta ilustración) y registra que está ahora sobre un cuadrado en blanco y se va un cuadrado a la derecha; (5–6) va a la posición standard sobre el número que está ahora siendo escudriñado. En conjunto, 1–6 mueven el número como un todo un cuadrado a la izquierda. Entonces 6-11 repiten esta operación. Se comienza de nuevo el mismo ciclo de pasos (11–14), pero se concluye de un modo diferente (14–17) tras descubrir 1 en lugar de 0 en el cuadrado más a la izquierda examinado (en la Situación 14).

El lector puede verificar que la máquina definida mediante la tabla siguiente llevará a cabo la operación de esta ilustración, pasando a través de las Situaciones 1–17 y otras situaciones intermedias; y puede convencerse ahora (o después de la discusión siguiente) de que siempre efectuará la operación descrita, partiendo de una situación inicial de la clase descrita. Dejamos una raya "–" en lugar de la orden del acto atómico en aquellos lugares de la tabla donde el acto ordenado es irrelevante para nosotros, porque su configuración no surgirá en nuestra utilización de la máquina, es decir, cuando esta parte de una situación inicial de la clase descrita. Sin embargo, puede entenderse que la definición de la máquina quedará completa si se coloca un "0" en esos lugares.

| Nombre de la máquina | Estado de la máquina | Símbolo escudriñado 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{B}$ | 1 | — | *EI* 2 |
| | 2 | *PI* 3 | *I* 2 |
| | 3 | *D* 4 | *D* 5 |
| | 4 | *I* 1 | *D* 4 |
| | 5 | — | *ED* 6 |
| | 6 | *P* 0 | *D* 6 |

Al descubrir esta máquina, primero analizamos la operación entera que deseamos sea efectuada en actos más simples (no necesariamente atómicos), y posteriormente analizamos éstos en los actos atómicos que van a ser efectuados por la máquina. Podemos pensar en la máquina como obtenida mediante la conexión simultánea de varias máquinas más simples que efectúan uno o una sucesión de los pasos del análisis preliminar. Ahora introducimos notaciones que serán útiles al describir una máquina como una combinación de máquinas más simples.

Si dos operaciones van a ser efectuadas sucesivamente, y una máquina $\mathfrak{X}$ efectúa la primera de ellas, y una máquina $\mathfrak{Y}$ la otra, entonces la operación combinada será efectuada por la máquina que obtengamos mediante la identificación del estado pasivo (o terminal) de $\mathfrak{X}$ con el primer estado activo (o inicial) de $\mathfrak{Y}$. La salida de $\mathfrak{X}$ se convierte así en la entrada de $\mathfrak{Y}$. A la máquina resultante la denotamos mediante "$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$". (Entonces $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$).

Utilizamos "$\mathfrak{X}^n$" para $n > 0$, para significar $\mathfrak{X} \ldots \mathfrak{X}$ ($n$ factores); y "$\mathfrak{X}^0$" para una máquina cuya tabla tiene sólo 0 como entradas de tal manera que $\mathfrak{X}^0\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}^0$, efectúan ambas la misma operación que $\mathfrak{Y}$.

También podemos desear que la salida de una máquina $\mathfrak{X}$ se convierta en la entrada de o bien una máquina $\mathfrak{Y}$ o bien una máquina $\mathfrak{Z}$, dependiendo de alguna circunstancia que surja durante la acción de $\mathfrak{X}$. Podemos proveer a ello, extendiendo nuestra noción de una máquina de Turing que permita dos estados terminales $0_1$ y $0_2$. Aquí tales *máquinas de 2-terminales* se utilizarán sólo como componentes en la construcción de máquinas como las definidas en § 67 con un estado terminal. Al identificar el estado $0_1$ de $\mathfrak{X}$ con el estado inicial de $\mathfrak{Y}$ y el estado $0_2$ de $\mathfrak{X}$ con el estado inicial de $\mathfrak{Z}$, obtenemos una máquina que denotamos mediante

$$\text{“}\mathfrak{X}\left\{\begin{matrix}\mathfrak{Y}\\ \mathfrak{Z}\end{matrix}\right.\text{”}.$$

Ahora explicaremos la Máquina $\mathfrak{B}$ como una combinación de varias máquinas. Primero definimos una máquina $\mathfrak{B}_1$ que efectúa la operación ilustrada por 1–5 ó por 6–10 ó por 11–15; esto es, tal que cuando ha comenzado escudriñando un número en posición standard, borra el cuadrado escudriñado, imprime sobre el primer cuadrado en blanco a la izquierda, y va al estado $0_1$ ó $0_2$ escudriñando ese cuadrado, según que el próximo cuadrado a su izquierda esté en blanco o impreso. El cuadrado más a la izquierda escudriñado durante la operación, es el cuadrado próximo izquierdo del cuadrado terminalmente escudriñado. Esta máquina tiene la siguiente tabla (cfr. Líneas 1–3 de la tabla para la Máquina $\mathfrak{B}$).

| Nombre de la máquina | Estado de la máquina | Símbolo escudriñado 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{B}_1$ | 1 | — | $EI2$ |
| | 2 | $PI3$ | $I2$ |
| | 3 | $D0_1$ | $D0_2$ |

La operación ilustrada por 5–6 ó 10–11 es efectuada por la máquina con la tabla (cfr. Línea 4 de la tabla para la Máquina $\mathfrak{B}$):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{B}_2$ | 1 | $I0$ | $D1$ |

Para efectuar 15–16, igualmente tenemos (cfr. Línea 5 para la Máquina $\mathfrak{B}$):

| | | |
|---|---|---|
| $\mathfrak{B}_3$ | 1 | $ED0$ |

La operación ilustrada mediante 16–17 es efectuada por la Máquina $\mathfrak{A}$.

La acción de la máquina $\mathfrak{B}$ puede ser descrita en términos de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_3$, así. Primero utilizamos $\mathfrak{B}_1$, luego según que el estado terminal sea $0_1$ ó $0_2$, utilizamos $\mathfrak{B}_2$ ó $\mathfrak{B}_3$. En caso de que se utilice $\mathfrak{B}_2$, su salida es retrointroducida en $\mathfrak{B}_1$. En caso de que se utilice $\mathfrak{B}_3$, su salida es introducida en $\mathfrak{A}$. Expresamos esto mediante la fórmula

(a) $$\mathfrak{B} = \dot{\mathfrak{B}}_1 \begin{cases} \dot{\mathfrak{B}}_2 \\ \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}, \end{cases}$$

donde los puntos expresan que la salida de $\mathfrak{B}_2$ es retrointroducida como entrada para $\mathfrak{B}_1$. La notación está sugerida por la que se utiliza para los decimales continuos. Si la operación efectuada por $\mathfrak{B}_1$ produjese cada vez una salida con el estado $0_1$, la operación efectuada por $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{B}_2$ sería repetida ad infinitum. De hecho, esto sucedería si la Máquina $\mathfrak{B}$ hubiera comenzado escudriñando el número más a la izquierda de la cinta en posición standard; la Máquina $\mathfrak{B}$ entonces continuaría moviendo este número cuadrado tras cuadrado hacia la izquierda.

La fórmula (a) indica cómo construir la tabla para la Máquina $\mathfrak{B}$ a partir de las tablas para $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_3$. En la tabla para $\mathfrak{B}_1$, sustituimos los estados terminales $0_1$ y $0_2$ por los estados iniciales para $\mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_3$ respectivamente, reenumerando éstos adecuadamente como 4 y 5; etc. (Cfr. la tabla para $\mathfrak{B}$ como se dio al principio).

Construyamos ahora una máquina $\mathfrak{J}_m$ (para $m \geq 1$ fijado) tal que: la Máquina $\mathfrak{J}_m$, cuando ha comenzado escudriñando en posición standard la representación de un $m$-tuplo $y_1, \ldots, y_m$ de números, con todos los cuadrados (o al menos los primeros $y_1 + 2$ de ellos) a la derecha del $m$-tuplo en blanco, copia $y_1$ después del $m$-tuplo sin un vacío y cesa de escudriñar la copia en posición standard. El cuadrado más a la izquierda escudriñado durante la acción es el primer cuadrado (en blanco) del $m$-tuplo dado.

Por ejemplo, a partir de la situación inicial que se muestra a continuación (Situación 1), $\mathfrak{J}_4$ alcanzará la situación mostrada en último lugar (Situación 16). Se indica un plan para la acción mostrando las situaciones intermedias.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | $\mathfrak{C}$ | $\mathfrak{D}^4$ |
| 2. | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 3. | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{E}$ | | | |
| 4. | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | $\mathfrak{F}$ | |
| 5. | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{G}^4$ | | | |
| 6. | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | | | $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{D}^4$ |
| 7. | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | | | | |
| 8. | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\mathfrak{E}$ | | | |
| 9. | 0 | 1 | $\overline{1}^2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | $\mathfrak{F}$ | |
| 10. | 0 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\mathfrak{G}^4$ | | | |
| 11. | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | | | $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{D}^4$ |
| 12. | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | | | | |
| 13. | 0 | $\overline{1}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | $\mathfrak{E}$ | | | |
| 14. | 0 | $\overline{1}^1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | | | $\mathfrak{H}$ | |
| 15. | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | $\mathfrak{G}^4$ | | | |
| 16. | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | $\overline{1}$ | 0 | | | | |

La Máquina $\mathfrak{C}$, de acuerdo con el plan, cuando ha comenzado escudriñando en posición standard un número que está seguido de un vacío, va a la derecha dos cuadrados, imprime y se para allí.

La Máquina $\mathfrak{D}$, cuando ha comenzado escudriñando en posición standard un número que no es el más a la izquierda de la cinta, va a la izquierda a la posición standard sobre el siguiente número a la izquierda. De aquí, $\mathfrak{D}^m$, cuando ha comenzado escudriñando en posición standard un número a la izquierda del cual hay por lo menos $m$ números, va a la izquierda pasando sobre $m-1$ números intermedios a la posición standard sobre el $m$-ésimo número a la izquierda.

La Máquina $\mathfrak{E}$, cuando ha comenzado en posición standard sobre un número, decide si ese número es 0 o más grande que 0, y toma el estado $0_1$ ó $0_2$ según cual sea el caso, con el número todavía escudriñado en posición standard. El cuadrado más a la izquierda escudriñado durante la operación es el cuadrado próximo izquierdo del cuadrado escudriñado.

La Máquina $\mathfrak{F}$, cuando ha comenzado escudriñando un cuadrado impreso, borra y va a la izquierda un cuadrado.

La Máquina $\mathfrak{G}$ va un número ($\mathfrak{G}^n$ va $m$ números) a la derecha, exactamente como $\mathfrak{D}$ va un número ($\mathfrak{D}^m$ va $m$ números) a la izquierda.

La Máquina $\mathfrak{H}$, cuando ha comenzado escudriñando en posición standard un número que no es el más a la derecha de la cinta, llena el vacío (si lo hay) entre ese número y el siguiente a la derecha, aumentando el primer número con el número de cuadrados que constituían el vacío, y deja de escudriñar el número resultante en posición standard.

Si podemos encontrar máquinas $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ como las descritas, entonces la Máquina $\mathfrak{I}_m$ será dada mediante la fórmula

(b) $$\mathfrak{I}_m = \mathfrak{C}\mathfrak{D}^m\mathfrak{E}\begin{cases}\mathfrak{H}\mathfrak{G}^m \\ \mathfrak{F}\mathfrak{G}^m\mathfrak{A}\end{cases}.$$

La operación efectuada por $\mathfrak{D}^m\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}^m\mathfrak{A}$ se repite hasta que la aplicación de $\mathfrak{E}$ dé el estado $0_2$; pero cuando da $0_1$, la acción se termina mediante $\mathfrak{H}\mathfrak{G}^m$

Damos tablas para $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{H}$, dejando las de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ para el lector.

| Nombre de la máquina | Estado de la máquina | Símbolo escudriñado 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{D}$ | 1 | $I2$ | $I1$ |
| | 2 | $I2$ | 0 |
| $\mathfrak{E}$ | 1 | – | $I2$ |
| | 2 | $D0_1$ | $D0_2$ |
| $\mathfrak{H}$ | 1 | – | $D2$ |
| | 2 | $PD2$ | $I3$ |
| | 3 | – | $EI0$ |

Mediante varias aplicaciones de $\mathfrak{J}_m$ con valores adecuados de $m$, podemos copiar sin vacíos cualquier permutación (permitiendo repeticiones) de los números representados más a la derecha de la cinta sin vacíos intermedios. Por ejemplo, partiendo de la situación inicial

0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 $\overline{1}$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,

la Máquina $\mathfrak{J}_4^4$ $(=(\mathfrak{J}_4)^4)$ alcanza la situación terminal

0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 $\overline{1}$ 0 0,

siendo copiado el cuádruplo entero; y $\mathfrak{J}_4$ $\mathfrak{J}_2$ alcanza la situación

0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 $\overline{1}$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0,

siendo copiados los números primero y cuarto.

La Máquina $\mathfrak{K}_m$ definida así

(c) $$\mathfrak{K}_m = \mathfrak{A}\mathfrak{J}_m^m\mathfrak{H}\mathfrak{D}^m\mathfrak{F}\mathfrak{G}^m,$$

cuando ha comenzado en posición standard sobre un $m$-tuplo $y_1, \ldots, y_m$, con todos los cuadrados (o por lo menos los primeros $y_1 + \ldots + y_m + 2m + 1$) a la derecha en blanco, copia el $m$-tuplo a la derecha después de dejar un vacío de un cuadrado y deja de escudriñar la copia en posición standard. El cuadrado más a la izquierda escudriñado durante la acción, es el primer cuadrado (en blanco) del $m$-tuplo dado. Por ejemplo, desde la anterior situación inicial, $\mathfrak{K}_4$ alcanza la situación terminal

0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 $\overline{1}$ 0.

Deseamos ahora una máquina $\mathfrak{L}$ que, habiendo comenzado a escudriñar un número en posición standard, borrará todos los números (si los hay) a la izquierda de éste hasta encontrar el primer vacío y volverá a la posición standard sobre el número originalmente escudriñado. El cuadrado más a la izquierda escudriñado en la operación, será el próximo cuadrado más a la derecha en el grupo de cuadrados en blanco consecutivos que constituyen el vacío. Por ejemplo, a partir de la situación

0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 $\overline{1}$ 0,

la Máquina $\mathfrak{L}$ alcanza la situación terminal

$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0.$$

Se deja al lector la construcción de $\mathfrak{L}$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA XXVIII PARA $l = 0$. La prueba se realiza mediante una inducción basada en el Corolario del Teorema XIX § 63. Hay seis casos, de acuerdo con los cúales se aplica al final uno de los esquemas (I)–(VI), en la definición de $\varphi$ dada por esos esquemas. Para cada caso, debemos mostrar cómo construir una máquina $\mathfrak{M}_\varphi$ que compute 1/1 a $\varphi$.

Para describir la situación inicial en la computación de $\varphi(x_1, ..., x_n)$ para un $n$-tuplo dado $x_1, ..., x_n$ escribimos ahora:

1. $$, x_1, ..., \overline{x_n},$$

Aquí cada "$x_i$" representa a $x_i + 1$ cuadrados impresos consecutivos, las comas representan blancos que forman parte de la representación del $n$-tuplo, y la barra indica que la representación de $x_n$ es escudriñada en posición standard. Bajo la definición de computabilidad (§ 67) todos los demás cuadrados a la izquierda y a la derecha están en blanco. La situación terminal, que $\mathfrak{M}_\varphi$ debe alcanzar si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ está definida, puede ser similarmente escrita:

$$, x_1, ..., x_n, \overline{\varphi(x_1, ..., x_n)},$$

La primera coma aquí y en la abreviatura de la situación inicial (Situación 1) se refiere al mismo cuadrado de la cinta, y aquí de nuevo, todos los cuadrados no indicados están en blanco (por (iii) § 67). Cuando ha comenzado desde la Situación 1, $\mathfrak{M}_\varphi$ parará eventualmente sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ está definida (por (iv)). Desde la Situación 1, $\mathfrak{M}_\varphi$ puede alejarse arbitrariamente hacia la derecha, pero nunca escudriñará un cuadrado a la izquierda del representado aquí mediante la primera coma (por (ii)).

CASO (I) (Esquema (I)): $\varphi(x) = x'$. Sea $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{J}_1\mathfrak{A}$

CASO (II): $\varphi(x_1, ..., x_n) = q$. Sea $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{C}\mathfrak{M}^q$.

CASO (III): $\varphi(x_1, ..., x_n) = x_i$. Sea $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{J}_{n-i+1}$

CASO (IV): $\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n))$.

Por la hipótesis de la inducción, hay máquinas $\mathfrak{M}_{\chi_1}, ..., \mathfrak{M}_{\chi_m}, \mathfrak{M}_\psi$ que computan 1/1 a $\chi_1, ..., \chi_m, \psi$, respectivamente. El plan de la computación de $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es como sigue. Comenzando desde la Situación 1, copiamos el $n$-tuplo $x_1, ..., x_n$ con un vacío de un cuadrado (mostrado por la doble coma):

2. $$, x_1, ..., x_n,, x_1, ..., \overline{x_n},$$

El vacío marca el principio de un registro temporal que va a ser borrado más adelante. La Máquina $\mathfrak{R}_n$ efectúa esta operación de copiar. La Máquina $\mathfrak{M}_{\chi_1}$, si ha comenzado desde la situación $, x_1, ..., \overline{x_n},$ irá a la situación $, x_1, ..., x_n, \overline{\chi_1(x_1, ..., x_n)},$ supuesto que $\chi_1(x_1, ..., x_n)$ esté definida. Al efectuar esta operación, $\mathfrak{M}_{\chi_1}$ no escudriña en ninguna situación intermedia un cuadrado a

la izquierda del primer cuadrado en $,x_1,...,\overline{x}_n,$ Por tanto si $\mathfrak{M}_{\chi_1}$ ha comenzado a partir de la Situación 2, la presencia de la impresión adicional $,x_1,...,x_n,$ a la izquierda, no afectará su acción. Por tanto, desde la Situación 2, $\mathfrak{M}_{\chi_1}$ irá a la siguiente, puesto que $\chi_1(x_1,...,x_n)$ es definida:

3. $,x_1,...,x_n,,x_1,...,x_n,\overline{\chi_1(x_1,...,x_n)},$

Luego copiamos $x_1,...,x_n$ sin un vacío, mediante la Máquina $\mathfrak{F}^n_{n+1}$, obteniendo:

4. $,x_1,...,x_n,,x_1,...,x_n,\chi_1(x_1,...,x_n),x_1,...,\overline{x}_n,$

Aplicando $\mathfrak{M}_{\chi_2}$, si $\chi_2(x_1,...,x_n)$ está definida, obtenemos:

5. $,x_1,...,x_n,,x_1,...,x_n,\chi^1_1(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n,\overline{\chi_2(x_1,...,x_n)},$

Continuando de esta manera, obtenemos eventualmente lo siguiente, supuesto que todos los valores de las funciones que aparecen están definidos:

6. $,x_1,...,x_n,,x_1,...,x_n,\chi_1(x_1,...,x_n),...,x_1,...,x_n,\chi_m(x_1,...,x_n),$
$\chi_1(x_1,...,x_n),...,\chi_m(x_1,...,x_n),\overline{\psi(\chi_1(x_1,...,x_n),...,\chi_m(x_1,...,x_n))},$

Mediante la Máquina $\mathfrak{L}$ podemos entonces borrar todos los números entre el número escudriñado $\psi(\chi_1(x_1,...,x_n),...,\chi_m(x_1,...,x_n))$ (no inclusive) y el vacío (representado por la doble coma), después de lo cual podemos cerrar el vacío mediante la Máquina $\mathfrak{B}$ para obtener:

7. $,x_1,...,x_n,\overline{\psi(\chi_1(x_1,...,x_n),...,\chi_m(x_1,...,x_n))},$ , esto es,
$,x_1,...,x_n,\overline{\varphi(x_1,...,x_n)},$

La operación entera, cuando $\varphi(x_1,...,x_n)$ está definida, es efectuada por la Máquina $\mathfrak{M}_\varphi$ definida así:

$$\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{R}_n\mathfrak{M}_{\chi_1}\mathfrak{F}^n_{n+1}\mathfrak{M}_{\chi_2}\cdots\mathfrak{F}^n_{n+1}\mathfrak{M}_{\chi_m}\mathfrak{F}_{(m-1)(n+1)+1}\mathfrak{F}_{(m-2)(n+1)+2}\cdots$$
$$\mathfrak{F}_{1\cdot(n+1)+(m-1)}\mathfrak{F}_{0\cdot(n+1)+m}\mathfrak{M}_\psi\mathfrak{L}\mathfrak{B}.$$

A la inversa, usando la propiedad (iv) de las Máquinas $\mathfrak{M}_{\chi_1},...,\mathfrak{M}_{\chi_m}$ y $\mathfrak{M}_\psi$, la Máquina $\mathfrak{M}_\varphi$ aplicada a la Situación 1, eventualmente parará sólo si todas y cada una de las $\chi_1(x_1,...,x_n),...,\chi_m(x_1,...,x_n),\psi(\chi_1(x_1,...,x_n),...,\chi_m(x_1,...,x_n))$ están definidas, es decir, sólo si $\varphi(x_1,...,x_n)$ está definida.

Caso (V): Para $n > 1$ (Esquema (Vb)), $\varphi(0,x_2,...,x_n) = \psi(x_2,...,x_n)$, $\varphi(y',x_2,...,x_n) = \chi(y,\varphi(y,x_2,...,x_n),x_2,...,x_n)$. Por la hipótesis de la inducción, hay máquinas $\mathfrak{M}_\psi$ y $\mathfrak{M}_\chi$ que computan 1/1 a $\psi$ y $\chi$ respectivamente. Llevamos a cabo una serie de operaciones para obtener la situación siguiente (correspondiendo a la Situación 6 para el Caso (IV)) si los valores de la función requerida están definidos. En cada lugar donde se indica una alternativa, la más alta se aplica bajo la condición establecida, de lo contrario la más baja; o sea, para una $y$ dada, la alternativa más baja se toma sobre las $y$ primeras elecciones, y la más alta sobre la $y+1$.

$$
\begin{array}{ll}
 & ,y, x_2, ..., x_n, y, x_2, ..., x_n, \psi(x_2, ..., x_n), \\
y, & \begin{cases} \overline{\psi(x_2, ..., x_n)}, & \text{si } y = 0. \\ 0, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n, \chi(0, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n), & . \end{cases} \\
y-1, & \begin{cases} \overline{\chi(0, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n)}, & \text{si } y - 1 = 0. \\ 1, \chi(0, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n, & \end{cases} \\
 & \chi(1, \chi(0, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n), \\
y-2, & \begin{cases} \overline{\chi(1, \chi(0, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n)}, & \text{si } y - 2 = 0. \\ 2, ... & \end{cases}
\end{array}
$$

A continuación se borra todo entre el último número y el vacío, y éste se cierra. La operación entera es efectuada por la Máquina $\mathfrak{M}_\varphi$ definida así:

$$
\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{R}_n \mathfrak{M}_\psi \mathfrak{I}_{n+1} \mathfrak{E} \begin{cases} \mathfrak{I}_2 \mathfrak{L} \mathfrak{B}. \\ \mathfrak{C} \mathfrak{I}_3 \mathfrak{I}_{n+3}^{n-1} \mathfrak{M}_\chi \mathfrak{I}_{n+3} \mathfrak{F} \mathfrak{E} \end{cases} \begin{cases} \mathfrak{I}_2 \mathfrak{L} \mathfrak{B}. \\ \dot{\mathfrak{I}}_{n+3} \mathfrak{A} \end{cases}
$$

Ligeros cambios adaptan el tratamiento para el caso $n = 1$ (Esquema (Va)).

CASO (VI): $\varphi(x_1, ..., x_n) = \mu y [\chi(x_1, ..., x_n, y) = 0]$ (para $n \geq 1$; cfr. Observación 1, final § 67). Tratado como el Caso (V) (pero más simplemente).

DEMOSTRACION DEL TEOREMA XXVIII PARA $l > 0$. Tenemos ahora como caso adicional que $\varphi$ es una, digamos $\psi_i$, de las funciones supuestas $\Psi$. En este caso $\varphi$ es computada 1/1 a partir de $\Psi$ por la máquina $\mathfrak{M}_\varphi$ que tiene un solo estado activo $q_1$ con la entrada de la tabla $iq_0$.

§ 69. **Recursividad de funciones computables.** En esta sección las notaciones serán las de § 67 más bien que las de § 68.

TEOREMA XXIX. *Toda función parcial computable $\varphi$ es recursiva parcial. Toda función parcial $\varphi$ computable a partir de l funciones $\Psi$ completamente definidas, es recursiva parcial en $\Psi$.*

DEMOSTRACION PARA $l = 0$. Es posible representar las situaciones de cinta o de máquina de una máquina dada $\mathfrak{M}$ mediante expresiones formales (como de hecho haremos con otro propósito en § 71, donde las expresiones serán llamadas "Palabras Post"). El teorema puede ser considerado entonces como una aplicación de (D2) § 62 (extendido a funciones parciales; aquí $E_{x,j+1}$ depende sólo de $E_{xj}$).

Si hay que suministrar detalles, la siguiente demostración es algo más directa. Se asignan directamente números de Gödel a las situaciones de cinta o de máquina; y en vez de dar números de Gödel a deducciones o demostraciones (como para el Teorema IX § 58 y (D1) § 62), simplemente numeramos las situaciones sucesivas alcanzadas desde una situación dada, mediante una máquina dada, como las 0-ésima, 1ª, ..., z-ésima, ... Entonces, si se lee "función" en lugar de "función parcial" y "recursiva general" en lugar de "recursiva parcial", no se necesita

utilizar el Capítulo XII. La demostración puede acortarse ligeramente utilizando el Teorema XXVI § 66.

Al establecer la numeración gödeliana de situaciones, describimos la condición de la cinta sólo por relación al cuadrado escudriñado, y no por relación a algún cuadrado fijado. Ello basta para nuestro propósito aquí, dado que la posición absoluta sobre la cinta no entra en la definición de computabilidad. (Para la computabilidad 1/s, la posición absoluta o por lo menos la posición relativa al primer cuadrado de la representación de $x_1, \ldots, x_n$ en la situación inicial tiene importancia, por (ii) y (iii)).

Comenzamos por asignar un número de Gödel a la (condición de la) cinta a la izquierda de cualquier cuadrado particular. Sean $s_{u_0}$, $s_{u_1}$, $s_{u_2}$, ... las condiciones de los cuadrado sucesivos a la izquierda de ese cuadrado. Dado que sólo un número finito de cuadrados está impreso, todos menos un número finito de los suscritos $u_i$ son 0. El número de Gödel $u$ de la cinta a la izquierda del cuadrado será $\prod_i p_i^{u_i}$, es decir, $\prod_{i<t} p_i^{u_i}$ donde $t$ es cualquier número que sobrepase a todas las $i$ para las que $u_i \neq 0$. Luego $u$ es, él mismo, un número tal; así $u = \prod_{i<u} p_i^{u_i} = \prod_{i<u} p_i^{(u)_i}$.

De manera similar, se asigna un número de Gödel para representar la condición de la cinta a la derecha de un cuadrado dado.

Si en una situación dada, el número de Gödel de la cinta a la izquierda del cuadrado escudriñado es $u$, el símbolo escudriñado es $s_a$, el estado de máquina es $q_c$, y el número de Gödel de la cinta a la derecha del cuadrado escudriñado es $v$, entonces el número de Gödel de la situación será $2^u \cdot 3^a \cdot 5^c \cdot 7^v$.

EJEMPLO 1. El número de Gödel de la situación

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $q_4$ | | | |
| | $s_1$ | $s_1$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_0$ | $s_1$ | |

donde todos los cuadrados no mostrados están en blanco, es $2^{5^1 \cdot 3^1 \cdot 2^3} \cdot 3^1 \cdot 5^4 \cdot 7^{2^0 \cdot 3^1}$.

Si el número de Gödel de la situación es $2^u \cdot 3^a \cdot 5^c \cdot 7^v$, la configuración es $(s_a, q_c)$. Si $c > 0$, y el acto que la máquina efectúa a partir de esta configuración es de la forma $s_b I q_d$, el número de Gödel $\rho_{a,c}(u, v)$ de la situación resultante es

$$[2 \exp \prod_{i<u} p_i^{(u)_i}] \cdot 3^{(u)_0} \cdot 5^d \cdot [7 \exp \{2^b \cdot \prod_{i<v} p_i^{(v)_i}\}];$$

y similarmente si el acto es $s_b D q_d$. Si el acto es $s_b C q_d$, entonces $\rho_{a,c}(u, v)$ es $2^u \cdot 3^b \cdot 5^d \cdot 7^v$. Cada una de estas funciones $\rho_{a,c}$ es recursiva primitiva.

Ahora bien, $\rho$, definida como sigue, es recursiva primitiva (#F § 45), y tiene la propiedad de que, si $w$ es el número de Gödel de una situación activa (pasiva) entonces $\rho(w)$ es el número de Gödel de la siguiente (misma) situación):

$$\rho(w) = \begin{cases} \rho_{a,c}((w)_0, (w)_3) & \text{si } (w)_1 = a \,\&\, (w)_2 = c \\ & (a = 0, \ldots, j; c = 1, \ldots, k), \\ w & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Consecuentemente, definimos una función recursiva primitiva $\theta$ así:

$$\begin{cases} \theta(w,0)=w, \\ \theta(w,z')=\rho(\theta(w,z)) \end{cases}$$

Si $w$ es el número de Gödel de cualquier situación, entonces $\theta(w, z)$ es el número de Gödel de la situación después de los siguientes $z$ actos, si la máquina efectúa por lo menos $z$ actos desde la situación dada; y $\theta(w, z)$ es el número de Gödel de la situación terminal alcanzada a partir de la situación dada, si la máquina efectúa $<z$ actos a partir de la situación dada.

A continuación, para cada $n \geq 1$ (cfr. Observación 1 al final de § 67), definimos una función recursiva primitiva $\tau_n$ con la siguiente propiedad. Si el $n$-tuplo $x_1, \ldots, x_n$ es escudriñado en posición standard, el estado es $q_c$, el número de Gödel de la cinta a la izquierda de la representación de $x_1, \ldots, x_n$ es $u$ y el número de Gödel de la cinta a la derecha de esa representación es $v$, entonces $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, c, u, v)$ es el número de Gödel de la situación. Primero definimos $\tau_1$ así:

$$\tau_1(x_1, c, u, v) = [2^{\exp\{(\prod_{i<x_1} p_i^1)\cdot p_{x_1}^0 \cdot \prod_{i<u} p_{x_1+i}^{(u)_i}\}}]\cdot 3^1\cdot 5^c\cdot[7^{\exp\{2^0\cdot \prod_{i<v} p_i^{(v)_i}\}}].$$

Entonces, para $n=1, 2, 3, \ldots$:

$$\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, c, u, v) = \tau_1 = (x_{n+1}, c, (\tau_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n', c, u, v))_0, v).$$

Cuando $x_1, \ldots, x_n$ es escudriñado en posición standard con estado $q_1$, y el resto de la cinta está en blanco, el número de Gödel de la situación es $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 1, 1)$. Cuando $x_1, \ldots, x_n, x$ es escudriñado en posición standard con estado $q_0$, el número de Gödel de la situación es $\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x, 0, u, v)$ para algún $u$ y $v$; y a la inversa.

Ahora, si $\varphi$ es la función parcial de $n$ variables computada por la máquina dada $\mathfrak{M}$, y $x_1, \ldots, x_n$ es un $n$-tuplo dado, entonces $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ está definida, si y sólo si, existe un cuádruplo $(z, x, u, v)$ de números tal que $\theta(\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 1, 1)\, z) = \tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x, 0, u, v)$, en cuyo caso $x$ es el valor de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. En consecuencia,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq (\mu t[\theta(\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 1, 1), (t)_0) = \tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, (t)_1, 0, (t)_2, (t)_3)])_1.$$

Por tanto, mediante el Teorema XVIII § 63, $\varphi$ es recursiva parcial (o si $\varphi$ está completamente definida, mediante el Teorema III § 57, $\varphi$ es recursiva general).

DEMOSTRACION PARA $l>0$. Digamos p. ej. que hay una función supuesta $\psi$ de una variable (esto es, $l=m_1=1$). Ahora, para cada $c$ para el que la entrada de la tabla correspondiente a $q_c$ es de la forma $1q_d$, reemplazamos "$\rho_{a,c}((w)_0, (w)_3)$ si $(w)_1 = a$ & $(w)_2 = c$ $(a=0, \ldots, j)$" en la definición de $\rho(w)$ por "$\rho_c(w)$ si $Q_c(w)$", donde $Q_c$ es el predicado recursivo primitivo y $\rho_c$ la función recursiva primitiva en $\psi$ definida así:

$$\begin{aligned} Q_c(w) &\equiv (Ey)_{y<w}(Eu)_{u<w}(Ev)_{v<w}[w=\tau_1(y, c, u, v)], \\ \rho_c(w) &= \tau_2(Y, \psi(Y), d, U, V) \text{ donde} \\ Y &= \mu y_{y<w}(Eu)_{u<w}(Ev)_{v<w}[w=\tau_1(y, c, u, v)], \\ U &= \mu u_{u<w}(Ey)_{y<w}(Ev)_{v<w}[w=\tau_1(y, c, u, v)], \text{ etc.} \end{aligned}$$

TEOREMA XXX. (= Teoremas XXVIII + XXIX). *Las siguientes clases de funciones parciales son coextensivas, es decir, tienen los mismos miembros*: (a) *las funciones recursivas parciales*, (b) *las funciones computables*, (c) *las funciones* 1/1 *computables. De manera similar, con l funciones supuestas* $\Psi$ *completamente definidas.*

§ 70. **Tesis de Turing.** La tesis de Turing de que toda función que sea naturalmente considerada como computable, es computable en el sentido por él especificado, esto es, computable por una máquina de Turing, es equivalente a la tesis de Church por virtud del Teorema XXX. Examinaremos ahora la parte de evidencia en lo que atañe al concepto de máquina, es decir, lo señalado como (C) en § 62. Lo que hemos de hacer es tratar de llegar a la convicción de que cualesquiera actos que un computador humano podría llevar a cabo, son analizables en sucesiones de actos atómicos de alguna máquina de Turing.

"La conducta del computador en cualquier momento está determinada por los símbolos que está observando y su 'estado mental' en ese momento". El número de símbolos que puede reconocer es finito. "Si fuéramos a permitir una infinidad de símbolos, entonces habría símbolos que se diferenciarían en una medida arbitrariamente pequeña". (Turing 1936-7 págs. 249-250). El trabajo que conduce desde la proposición problema a la respuesta, debe ser llevado a cabo en algún "espacio simbólico" (Post 1936), esto es, alguna disposición sistemática de celdas o cajas, cada una de las cuales puede ostentar (una ocurrencia de) un símbolo. Hay un límite finito para el número de ocurrencias de símbolos (o de cajas donde un símbolo puede ocurrir) que el computador pueda observar en un momento. También puede éste recordar símbolos previamente observados, por alteración de su estado mental. Sin embargo "el número de estados mentales que necesitan ser tomados en cuenta es finito... Si admitimos una infinidad de estados mentales, algunos de ellos estarán 'arbitrariamente cercanos' y se confundirán". (Turing 1936-7 pág. 250). Pero la acción del computador debe conducir desde un objeto lo bastante discreto, a saber, el orden de los símbolos representando algún número natural (o $n$-tuplo de números naturales) como argumento(s), a otro objeto de similar condición, a saber, el orden de los símbolos representando el correspondiente valor de la función. Los estados mentales posibles, son fijados antes de nombrar el (los) argumento(s) particular(es) porque estamos considerando la computación que sigue un método preasignado y no permitimos invención matemática en medio de la actuación del computador. Cada acto que éste efectúe debe constituir un cambio discreto en el sistema finito integrado por las ocurrencias de símbolos en el espacio simbólico, la distribución de los cuadrados observados en este espacio, y su estado mental.

Estas limitaciones en la conducta del computador humano al computar el valor de una función de teoría de números para argumentos dados, siguiendo sólo reglas preasignadas, son de la misma clase que las que intervienen en la construcción de una máquina de Turing. La cinta es el espacio simbólico para la máquina y el estado de máquina corresponde al estado mental del computador.

El computador humano está menos restringido, en su conducta, que la máquina en lo que sigue: (a) Puede observar más de una ocurrencia de un símbolo a un tiempo. (b) Puede efectuar actos atómicos más complicados que la máquina. (c) Su espacio simbólico no necesita ser una cinta unidimensional. (c) Puede elegir alguna otra representación simbólica de los argumentos y valores de función que no sea la utilizada en nuestra definición de computabilidad.

Examinaremos varias posibilidades bajo (a)–(d), y veremos brevemente cómo cada una puede ser reducida a otra equivalente en términos de máquinas de Turing. Generalmente hablaremos como si hubiéramos de reducir sólo una posibilidad, pero nuestros métodos servirían para reducir cualquier combinación de ellas sucesivamente.

Bajo (a) observamos que, p. ej., 17 y 21 y 100 pueden, cada uno, ser observados en un simple acto. Pero una larga secuencia de símbolos sólo puede ser observada mediante una sucesión de actos. Por ejemplo, no podemos decir con una sola ojeada si 157767733443477 y 157767733443477 son lo mismo; "tendríamos que comparar los dos números símbolo por símbolo, posiblemente marcando los símbolos con lápiz para asegurarnos de que no están siendo contados dos veces" (Turing 1936-7 pág. 251).

Si 17 y 21 y 100 son no sólo observados como unidades, sino manipulados como si cada uno ocupara una celda simple del espacio simbólico, necesitamos sólo redefinir los símbolos de tal manera que cada uno de ellos constituya un símbolo sencillo, para poder reducir la observación compuesta a una observación sencilla de la clase utilizada por una máquina de Turing.

En la computación real, utilizamos a veces ciertas marcas (acento, contrapeso, puntero físico movible, etc.) que pueden ser situadas en un cuadrado dado en adición a un símbolo ordinario. Si hay $j$ símbolos ordinarios y $n$ marcas especiales, cualquier subconjunto de las cuales puede ser situado en un cuadrado dado, el número de las condiciones del cuadrado es meramente incrementado de $j+1$ a $(j+1)\cdot 2^n$.

Como nuevo ejemplo de conducta que envuelve observación compuesta, supongamos que está impresa la siguiente secuencia de símbolos,

...4401385789264...,

que la atención del observador está centrada en el símbolo 7 cerca del centro y que él observa claramente por lo menos cinco símbolos en torno a este 7; así la secuencia de los cinco dígitos 85789 junto con su estado mental, determinan su siguiente acto. Algunos dígitos más lejanos pueden ser vagamente observados pero sin afectar el acto. Este será de una de las clases de los efectuados por máquinas de Turing, con cada ocurrencia de un símbolo separado (no los grupos de cinco) ocupando un cuadrado. Por ejemplo, si el acto siguiente es $0/\mathfrak{q}_d$, la impresión será

...4401385089264...,

siendo 38508 lo observado. Tal conducta puede ser reducida a la conducta de una máquina de Turing como sigue. Digamos que los símbolos son los diez dígitos arábigos. La conducta puede ser considerada como la de una máquina de Turing generalizada en la que la configuración (que determina el acto) es $(e, f, a, g, h, \mathfrak{q}_c)$ donde $e$, $f$, $a$, $g$, $h$ son los dígitos que ocupan los cinco cuadrados cuyo centro es el cuadrado escudriñado. Correspondiendo a cada estado $\mathfrak{q}_c$ de esta máquina generalizada, introducimos un conjunto de $10^4$ estados $\mathfrak{q}_{cefgh}$ $(e, f, g, h = 0, ..., 9)$; y modificamos la tabla de tal manera que sobre alcanzar el estado $\mathfrak{q}_c$, se efectúa una serie de actos de máquina de Turing que consisten en inspecciones de los dos cuadrados adyacentes a cada lado, llevando al estado $\mathfrak{q}_{cefgh}$ cuando los cuatro cuadrados en cuestión están ocupados por los dígitos respectivos $e, f, g, h$. No sólo deben ser añadidos los estados $\mathfrak{q}_{cefgh}$, sino también algunos estados que van a ser

asumidos durante la acción llevando desde $q_c$ a $q_{cefgh}$. Los detalles se dejan al lector. Ahora el acto que la máquina generalizada efectúa desde la configuración $(e, f, a, g, h, q_c)$ será efectuado desde la configuración $(a, q_{cefgh})$. Esta reducción es una ilustración de la observación de que uno puede recordar un número finito de símbolos previamente observados al haber cambiado el estado mental de uno, cuando fueron observados.

Puede pensarse que la impresión sobre otros cuadrados puede constituir parte de la observación, p. ej. la que se efectúa sobre ciertos cuadrados especialmente marcados (finitos en número). Si estos cuadrados están situados de tal manera en el espacio simbólico que el computador puede encontrarlos y regresar mediante actos de las clases efectuadas por máquinas de Turing (cfr. la discusión de (c) a seguir), esta clase de observación compuesta puede reducirse de una manera similar a la precedente.

Según (b), el computador puede alterar otros cuadrados además del cuadrado escudriñado. El nuevo cuadrado observado no necesita ser adyacente al original. Sin embargo hay un límite finito para la complejidad del acto, si ha de constituir un acto simple del computador. Actos más complicados requerirán motivación renovada mediante la referencia a los datos observados y el estado mental en situaciones intermedias entre las dadas y las resultantes. (De hecho, puede argüirse que el acto de la máquina de Turing es ya compuesto; y consta psicológicamente de una impresión y cambio de estado de mente seguidos por un movimiento y otro cambio de mente. Post 1947 separa así el acto de Turing en dos; no lo hemos hecho aquí, principalmente porque ahorra espacio en las tablas de la máquina el no actuar de este modo).

Todas las alteraciones sencillas de la situación, en forma distinta a la máquina de Turing, que pudieran ser al pronto aducidas, p. ej. la impresión después y no antes del movimiento, son fácilmente expresadas como sucesiones de los actos atómicos de una máquina de Turing. (Operaciones mucho más complicadas, que difícilmente podrían ser consideradas como actos sencillos, han sido tratadas ya en § 68).

Volviendo a (c), la computación es comúnmente efectuada sobre papel de dos dimensiones, y el carácter bidimensional del papel es a veces utilizado en aritmética elemental. Teóricamente, debemos considerar también la posibilidad de todavía otras clases de espacio simbólico. El espacio simbólico debe ser suficientemente regular en su estructura de manera que el computador no llegue a perderse en él durante la computación.

A partir de un cuadrado dado o celda del espacio, habrá un número finito $m + 1$ de maneras de trasladarse a la misma celda o a una adyacente, y las llamamos $M_0, ..., M_m$ donde $M_0$ es el movimiento idéntico. Por ejemplo, en el plano reglado en cuadrados, $m = 4$ (ningún movimiento, izquierda, arriba, derecha, abajo), o, si se permiten también movimientos diagonales, $m = 8$. El computador, cuyo acto a partir de una situación dada debe estar determinado por una de entre un número finito de configuraciones, que es la que está existiendo, no podría utilizar más. No perdemos generalidad al suponer que hay el mismo número de direcciones de movimiento a partir de cada celda; en el caso de que haya menos a partir de algunas celdas, el término del resto de los $m + 1$ movimientos puede ser definido como siendo la celda dada, es decir, dichas celdas, pueden ser tomadas lo mismo que $M_0$ como siendo idénticas.

El número de celdas que pueden ser alcanzadas en definitiva, es por tanto contable. La misma celda puede ser alcanzada mediante diferentes sucesiones de movi-

mientos, p. ej. en el plano, yendo hacia abajo y luego a la derecha, se llega al mismo cuadrado, que, yendo a la derecha y luego abajo.

Supondremos que puede darse una enumeración sin repeticiones de todas las celdas, de tal manera que suceda lo siguiente. Para cada una de las formas de movimiento $M_i$ $(i = 0, ..., m)$, hay una función computable $\mu_i$ tal que, si $x$ es el índice en la numeración de la celda dada, entonces $\mu_i(x)$ es el índice de la celda alcanzada por el movimiento $M_i$. Esta suposición es confirmada por cualquier espacio simbólico fácil de imaginar.

Utilizando esta enumeración, hagamos que la celda numerada $x$ en la enumeración $(x = 0, 1, 2, ...)$ corresponda al $x$-ésimo cuadrado contando hacia la derecha desde un cierto cuadrado (llamado el 0-ésimo) sobre una cinta lineal.

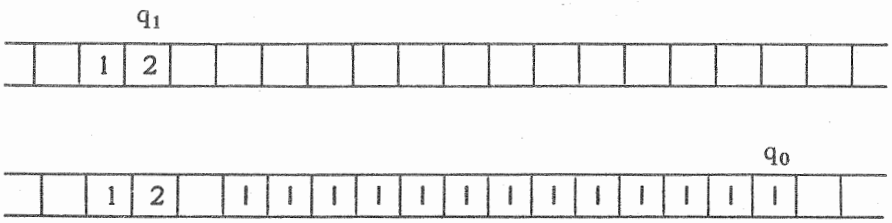
Utilizando los métodos de § 68, podemos establecer una máquina de Turing que encontrará el $\mu_i(x)$-ésimo cuadrado, cuando ha comenzado sobre el $x$-ésimo, si se mantiene una marca distintiva sobre el 0-ésimo (o primer) cuadrado. La computación con este fin puede hacerse marcando los cuadrados con acentos, borrados después, sin interferir con lo ya impreso en ellos. Esto nos capacita para reducir la computación en el espacio simbólico dado, a la computación sobre la cinta lineal de una máquina de Turing.

Para esta reducción, no supusimos que desde cualquier celda adyacente a una celda dada, uno de los movimientos nos vuelve a situar en esa celda dada, esto es, que todo movimiento en el espacio tiene uno inverso. Este sería el caso en cualquier espacio simbólico ordinario. Una excepción está representada por el computador que recibe una señal acústica a intervalos.

El espacio simbólico puede constar de varios subespacios desconectados, teniendo cada uno su propia celda escudriñada, como p. ej. en el caso de un computador que simultáneamente lee un símbolo sobre un papel con los ojos, lee otro en braille sobre una cinta con las manos, y recibe una señal por el oído. Si hay $r$ subespacios tales, podemos reconstruir las celdas como siendo los $r$-tuplos que consisten en una celda de cada uno de esos subespacios respectivos.

Con respecto a (d) podemos argüir que un número natural $y$, está dado en el sentido original (§ 6), sólo si está dada alguna secuencia de $y + 1$ objetos, digamos $y + 1$ marcas; y de aquí que un procedimiento para computar una función $\varphi$ a partir de su(s) argumento(s) cuando ambos están expresados en alguna otra notación, no resolvería el problema de la computación para $\varphi$, a menos que el computador pudiera también ir desde la otra notación para un número $y$ a la secuencia de $y + 1$ marcas, y viceversa.

De acuerdo con nuestros demás argumentos, podrían construirse entonces máquinas de Turing que, dada la otra notación para $y$, facilitarían las $y + 1$ marcas, y viceversa. Los detalles pueden arreglarse, como en la definición de la computación, dentro de un sistema de notación. Así, para la notación decimal, la primera máquina, habiendo comenzado en la primera de las situaciones siguientes, iría a la segunda.



Para los sistemas familiares de notación tales como el dual o el decimal, puede establecerse la existencia de semejante par de máquinas.

Hemos estado defendiendo la tesis de Turing para funciones de teoría de números; pero las máquinas de Turing se aplican igualmente a expresiones en cualquier lenguaje que tenga una lista finita de símbolos. Al usarla, como acabamos de ilustrar, para el caso de convertir a otra una notación de un número natural, obtenemos una manera directa de caracterizar operaciones 'efectivas' sobre expresiones de tales lenguajes, como una alternativa al requerimiento de que una función correspondiente de teoría de números bajo una numeración de Gödel efectiva particular sea recursiva general o computable (§ 61). El método se extiende a los lenguajes que tengan una infinidad enumerable de símbolos, pero siempre que los símbolos puedan ser considerados efectivamente como compuestos a su vez de los símbolos de alguna lista finita; p. ej. al simbolismo formal de teoría de números, mediante la consideración de las variables $a, b, c, \ldots$, como $a, a_1, a_{11}, \ldots$ (§16, §50).

*§ 71. **El problema de las palabras para semigrupos.** El ejemplo original de Church de un problema de decisión que, sobre la base de su tesis, es insoluble, fue construido en términos de λ-definibilidad (1936). El ejemplo correspondiente dado arriba (Teorema XII § 60) está construido en términos de recursividad general (siguiendo a Kleene 1936, 1943). Turing 1936-7 dio ejemplos construidos en términos de computabilidad. Esto puede hacerse, p. ej. como sigue. Una máquina $\mathfrak{M}$ está determinada por su tabla, conteniendo $(j+1)\,k$ entradas. Podemos establecer una numeración gödeliana de las tablas y, de este modo, de las máquinas. Entonces la función $\xi$ definida como sigue, no es computable: $\xi(x) = 0$, si $x$ es el número de Gödel de una máquina $\mathfrak{M}_x$, y la función parcial $\varphi_x$ de una variable, que $\mathfrak{M}_x$ computa, tiene 1 como valor para $x$ como argumento; y $\xi(x) = 1$, en caso contrario. Así, por la tesis de Turing (o mediante la equivalencia de recursividad general y computabilidad por la tesis de Church) no hay algoritmo para decidir si cualquier número dado $x$ es el número de Gödel de una máquina que, cuando ha comenzado escudriñando $x$ en posición standard con el resto de la cinta en blanco, deja eventualmente de escudriñar $x$, 1 en posición standard. Como segundo ejemplo, no hay algoritmo para decidir si una máquina dada, cuando ha comenzado a partir de cualquier situación inicial dada, para eventualmente. Porque si lo hubiera, entonces, dado cualquier número $x$, podríamos primero decidir si $x$ es el número de Gödel de una máquina $\mathfrak{M}_x$, y si fuera así, podríamos decidir si $\mathfrak{M}_x$ para eventualmente cuando ha comenzado a escudriñar $x$ en posición standard con el resto de la cinta en blanco, y si fuera así, podríamos decidir, por último, si $x$, 1 es escudriñado en posición standard en la situación terminal.

Estos primeros ejemplos de problemas de decisión que han resultado ser insolubles, son problemas que surgen directamente en conexión con una de las nociones matemáticas (λ-definibilidad, recursividad general o computabilidad) originalmente identificadas con la efectividad por la tesis de Church-Turing.

Una segunda clase de ejemplos, alejados un tanto de éstos, son los problemas de decisión para ciertos sistemas formales, p. ej. Teorema 33 § 61 (cfr. también § 76, Church 1936, pág. 363).

Es de interés un problema de decisión establecido como insoluble por Post 1947 y Markov 1947 por constituir el primer ejemplo en el que se trató un problema planteado fuera del campo de la lógica y de los fundamentos.

El problema que Post y Markov demostraron ser insoluble, fue propuesto por Thue 1914. Supongamos que es dada una lista finita $a_1, ..., a_m$ $(m \geq 1)$ de distintos símbolos; llamémosles *letras* y a la lista de ellos el *alfabeto*. A una secuencia finita de cero o más (ocurrencias de) letras, la llamamos *palabra* (en, o formada a partir de, ese alfabeto); en el lenguaje del Capítulo IV (§ 16) una palabra es simplemente una expresión formal, cuando $a_1, ..., a_m$ son los símbolos formales, excepto que ahora incluimos siempre la expresión vacía. Una palabra C es *parte* de otra palabra D, si D es de la forma UCV donde U y V son palabras (posiblemente vacías).

Supongamos, además, ahora que es dada una lista finita $(A_1, B_1), ..., (A_n, B_n)$ $(n \geq 1)$ de pares de palabras; llamamos a esta lista el *diccionario*. Decimos que dos palabras R y S son *inmediatamente equivalentes* (por el diccionario dado) si R y S son de las formas respectivas $U A_i V$ y $U B_i V$, o de las formas respectivas $U B_i V$ y $U A_i V$, para algunas palabras U y V y el par $(A_i, B_i)$ $(1 \leq i \leq n)$; en otros términos, si R se puede transformar en S mediante la sustitución de una parte $A_i$ por su correspondiente $B_i$ en el diccionario, o a la inversa. Llamamos a dos palabras P y Q *equivalentes* (por el diccionario dado) si hay una secuencia finita $R_1, ..., R_l$ $(l \geq 1)$ de palabras tal que $R_1$ es P, y $R_l$ es Q, y $R_{t-1}$ es inmediatamente equivalente a $R_t$ $(t = 2, ..., l)$.

El problema (general) de Thue es encontrar un algoritmo para decidir, para cualesquiera alfabeto y diccionario dados, si cualesquiera dos palabras dadas son equivalentes. El problema es también conocido como el *problema de las palabras para semigrupos.*

TEOREMA XXXI. *El problema de las palabras para semigrupos es insoluble; de hecho, hay un alfabeto y diccionario particulares tales que no hay algoritmo para decidir si cualesquiera dos palabras (formadas a partir de ese alfabeto) son equivalentes (por ese diccionario).* (Post 1947, Markov 1947).

DEMOSTRACION. Nuestro método de demostración consistirá en escoger un alfabeto y un diccionario tales que, si tuviéramos un procedimiento de decisión para la equivalencia de cualesquiera dos palabras, podríamos entonces obtener un procedimiento de decisión para el predicado $(Ey) T_1 (x, x, y)$, contradiciendo el Teorema XII § 60 (basado en la tesis de Church). La insolubilidad del problema de Thue para el caso de este alfabeto y diccionario particulares, implica desde luego la insolubilidad del problema general.

Es conveniente ahora considerar la relación de equivalencia entre dos palabras en términos de la posibilidad de deducir formalmente la segunda palabra de la primera mediante el uso de $2n$ reglas de inferencia, como sigue $(i = 1, ..., n)$:

$$\text{(a)} \quad \frac{U A_i V}{U B_i V,} \qquad \text{(b)} \quad \frac{U B_i V}{U A_i V,}$$

donde U y V son cualesquiera palabras (posiblemente vacías) en el alfabeto $a_1, ..., a_m$.

Estudiaremos primero los *sistemas semi-Thue* en los que sólo son admitidas las $n$ reglas de inferencia (a), pero no sus inversas (b).

Describiremos un método mediante el cual, dada cualquier máquina de Turing particular, podemos establecer un sistema semi-Thue tal que las situaciones de

cinta o de máquina son representadas por palabras del sistema semi-Thue, y los actos atómicos de la máquina corresponden a aplicaciones de las reglas (a).

El alfabeto del sistema semi-Thue constará de $s_0, \ldots, s_j$ (representando las condiciones de los cuadrados para la máquina), $q_0, \ldots, q_k$ (representando los estados de la máquina) y un símbolo adicional h ($j+k+3$ letras, en conjunto).

En una situación de cinta o de máquina dada, decimos que el trozo más pequeño de cinta no interrumpida que contiene todos los cuadrados impresos y el cuadrado escudriñado, consta de $r$ cuadrados ($r \geq 1$). Sean las condiciones de esos cuadrados de izquierda a derecha $s_{g_1}, \ldots, s_{g_r}$. Sea el $p$-ésimo de esos cuadrados el cuadrado escudriñado ($1 \leq p \leq r$). Sea $q_c$ el estado de la máquina. Entonces la situación será representada por la palabra

$$hs_{g_1} \ldots s_{g_p} q_c s_{g_{p+1}} \ldots s_{g_r} h,$$

que será llamada la *palabra Post* para ella (¿Cuándo una palabra es una palabra Post? ).

EJEMPLO 1. La palabra Post para la situación del Ejemplo 1 § 69 es $hs_1s_1s_3s_1q_4s_0s_1h$.

Las $n$ reglas de inferencia (a) del sistema semi-Thue comprenderán una o más reglas correspondientes a cada una de las $(j+1)k$ configuraciones activas de la máquina de Turing. Si la entrada de la tabla para una configuración activa $(s_a, q_c)$ es de la forma $s_b I q_d$ con $b \neq 0$, habrá $j+2$ reglas correspondientes como sigue ($e = 0, \ldots, j$),

$$\frac{Us_e s_a q_c V}{Us_e q_d s_b V}, \qquad \frac{Uhs_a q_c V}{Uhs_0 q_d s_b V};$$

si la entrada de la tabla es $s_0 I q_d$, habrá $(j+2)^2$ reglas como sigue ($e, f = 0, \ldots, j$),

$$\frac{Us_e s_a q_c s_f V}{Us_e q_d s_0 s_f V}, \quad \frac{Uhs_a q_c s_f V}{Uhs_0 q_d s_0 s_f V}, \quad \frac{Us_e s_a q_c hV}{Us_e q_d hV}, \quad \frac{Uhs_a q_c hV}{Uhs_0 q_d hV}.$$

De manera similar, habrá $j+2$ reglas, si la entrada de la tabla es de la forma $s_b D q_d$ con $b \neq 0$; y $(j+2)^2$, si es de la forma $s_0 D q_d$. Si la entrada es de la forma $s_b C q_d$ habrá una regla como sigue,

$$\frac{Us_a q_c V}{Us_b q_d V}.$$

En estas $n$ reglas las $A_i$ son todas distintas. Dada la palabra Post para una situación activa, exactamente una de estas $n$ reglas (a) es aplicable a ella como premisa, a saber, la regla o una de las reglas correspondientes a la configuración $(s_a, q_c)$ en esa situación, y sólo de una manera, esto es, como sólo una opción de la U y V. (Para una regla en la que el primer símbolo de la $A_i$ es h, la U estará siempre vacía). La aplicación de la regla da como conclusión la palabra Post para la situación resultante por el acto atómico de la máquina a partir de la situación dada. Dada la palabra Post para una situación pasiva, ninguna de las $n$ reglas es aplicable.

Por tanto una palabra dada, Q, es deducible de una palabra Post dada, P, en el sistema semi-Thue, si, y sólo si, Q es la palabra Post para una situación que la máquina de Turing alcanzará a partir de la situación representada por la palabra Post P.

La función recursiva parcial $0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$ está definida y tiene el valor 0, si, y sólo si, $(Ey)\, T_1(x, x, y)$ (cfr. § 63). Por el Teorema XXVIII, hay una máquina de Turing que computa 1/1 a $0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$. Establecemos el sistema semi-Thue correspondiente a esta máquina. En este sistema semi-Thue a partir de la palabra Post para la situación en la que un número $x$ es escudriñado en posición standard con el estado $q_1$ y el resto de la cinta en blanco (es decir, la palabra Post $hs_1 \ldots s_1 q_1 h$ con $x + 1$ ocurrencias de $s_1$), podemos deducir la palabra Post para la situación en la que el par de números $x$, 0 es escudriñado en posición standard con el estado $q_0$ y el resto de la cinta en blanco (esto es, la palabra Post $hs_1 \ldots s_1 s_0 s_1 q_0 h$ con $x + 1$ ocurrencias de $s_1$ precediendo a $s_0$), si, y sólo si, $(Ey)\, T_1(x, x, y)$. Puesto que por el uso de la tesis de Church no hay algoritmo para decidir si $(Ey)\, T_1(x, x, y)$ (Teorema XII), no puede haber algoritmo para decidir, para cualesquiera dos palabras dadas P y Q en el sistema semi-Thue, si Q es deducible de P, o sea, si Q se sigue de P por las reglas (a).

Para establecer el Teorema, falta extender este resultado a todo el sistema Thue en el que las reglas inversas (b) son admitidas. Esto se consigue mediante el lema siguiente.

LEMA VII. *Para las reglas* (a) *correspondientes a una máquina de Turing dada, como la descrita arriba*: *Si* P *es una palabra Post*, Q *es deducible de* P *mediante las reglas* (a) *y* (b), *y* Q *contiene* $q_0$, *entonces* Q *es deducible de* P *mediante las reglas* (a) *solamente.*

DEMOSTRACION DEL LEMA VII, por inducción de curso-de-valores sobre la longitud $l$ de una deducción dada de Q a partir de P mediante las reglas (a) y (b). Sea la deducción $R_1, \ldots, R_l$, donde $R_1$ es P y $R_l$ es Q. El caso para $l = 1$ es trivial, y ahora suponemos $l > 1$. Dado que P es una palabra Post, y las reglas (a) y (b) cada una de ellas, preservan esta propiedad, cada una de las $R_1, \ldots, R_l$ es una palabra Post y por tanto contiene exactamente una ocurrencia de una q, es decir, de una de las $q_0, \ldots, q_k$. Ahora $R_1$, o sea, Q, contiene $q_0$; y por la elección de las reglas (a) para corresponder a las configuraciones activas de la máquina de Turing, cada una de las $A_i$ contiene $q_c$ para alguna $c = 0$. Por tanto $R_t$ debe venir de $R_{t-1}$ por una de las reglas (a). Así, si hay alguna aplicación de las reglas (b) en la deducción dada, la última estará en el paso de $R_{t-1}$ a $R_t$ para algún $t < l$. Entonces $R_{t+1}$ viene de $R_t$ por una de las reglas (a); pero también dado que las reglas (b) son las inversas de las reglas (a), $R_{t-1}$ viene de $R_t$ por una de las reglas (a). Pero $R_t$ es una palabra Post y a una palabra tal es aplicable a lo sumo una de las reglas (a) y de una manera a lo sumo. Por tanto, $R_{t-1}$ y $R_{t+1}$ son la misma palabra. De donde podemos acortar la deducción dada de Q a partir de P mediante la omisión de $R_t R_{t+1}$. Aplicando la hipótesis de la inducción a la deducción acortada de Q a partir de P mediante las reglas (a) y (b), concluimos que hay una deducción de Q a partir de P, mediante las reglas (a) solamente.

Se ve fácilmente que el problema de las palabras para semigrupos es equivalente mediante la numeración de Gödel a un problema de la forma si $(Ey)\, R(x, y)$ es

verdadero para un $x$ dado, donde $R$ es recursivo general. Dado que nuestra demostración del Teorema XXXI se hace mediante la reducción del problema de si $(Ey)\,T_1\,(x, x, y)$ al problema de las palabras, el problema de las palabras es del más alto grado de insolubilidad para problemas de decisión de predicados de la forma $(Ey)\,R\,(x, y)$ (cfr. final de § 61 y Ejemplo 2 § 65).

Algunos resultados posteriores en la misma línea que el Teorema XXXI están contenidos en los artículos de Markov 1947, 1947[a], 1947[b], 1951, 1951[a], 1951[b]. También cfr. Hall 1949 y resumen de Boone 1951.

La definición de equivalencia de dos palabras P y Q (en símbolos, $P \sim Q$) que utilizamos arriba en el problema de las palabras para semi-grupos, puede ser expresada inductivamente así, donde (cláusula extrema) $P \sim Q$ está sólo como requerido por lo siguiente (cláusulas directas): 1. $A_i \sim B_i$ $(i = 1, ..., n)$. 2. $U \sim U$. 3. Si $U \sim V$, entonces $V \sim U$. 4. Si $U \sim V$ y $V \sim W$, entonces $U \sim W$. 5–6. Si $U \sim V$, entonces $Ua_i \sim Va_i$ y $a_iU \sim a_iV$ $(i = 1, ..., m)$. Turing 1950* muestra que el *problema de las palabras para semi-grupos con cancelación*, que obtenemos mediante la adición de las dos cláusulas siguientes, es igualmente insoluble: 7–8. Si $Ua_i \sim Va_i$ ó $a_iU \sim a_iV$, entonces $U \sim V$ $(i = 1, ..., m)$.

PARTE IV

# LOGICA MATEMATICA (TOPICOS ADICIONALES)

CAPITULO XIV

# EL CALCULO DE PREDICADOS Y SISTEMAS AXIOMATICOS

§ 72. **Teorema de completud de Gödel.** Reasumimos el estudio del cálculo de predicados, continuando a partir del punto alcanzado en § 37. Digamos que F es una fórmula de letras predicativas que sólo contiene libres las distintas variables $z_1, ..., z_q$ ($q \geq 0$) y que sólo contiene las distintas letras predicativas $P_1, ..., P_s$ ($s \geq 1$). Decimos que una asignación de objetos $z_1, ..., z_q$ de algún dominio no-vacío $D$ como valores a $z_1, ..., z_q$ y de funciones lógicas $P_1, ..., P_s$ sobre $D$ como valores a $P_1, ..., P_s$ *satisface* F (o es una *asignación satisfaciente* de $z_1, ..., z_q$, $P_1, ..., P_s$ *para* F), si bajo las reglas de evaluación dadas en §§ 28, 36 y 37, F toma entonces el valor t. Como definíamos en § 37, F es *satisfacible* (*válida*) en un dominio no-vacío $D$, si alguna (toda) asignación a $z_1, ..., z_q$, $P_1, ..., P_s$ en $D$ satisface F. En cuanto a la notación, escribiremos ahora las funciones lógicas "$P_j(a_1, ..., a_{n_j})$", "$A(a, b)$", etc., en lugar de "$I_j(a_1, ..., a_{n_j})$", "$I(a, b)$", etc. como hacíamos en §§ 36, 37. En el caso en que el dominio lo sean los números naturales, las funciones lógicas son simplemente predicados de teoría de números, cuando no hacemos una distinción entre proposiciones y valores de verdad t o f (cfr. (b) § 45 y las observaciones que allí haya); y, de hecho, ahora las llamaremos a veces predicados.

TEOREMA 34°C. *Si una fórmula de letras predicativas* F *es irrefutable* (esto es, si $\neg$ F es indemostrable, § 41) *en el cálculo de predicados, entonces* F *es satisfacible en el dominio de los números naturales.* (Teorema de completud de Gödel para el cálculo de predicados, 1930).

Modificaciones de la demostración de Gödel aparecieron en la 2ª edición (1938) de Hilbert-Ackermann 1928 y en Hilbert-Bernays 1939. Henkin 1949 dio una demostración que emplea un conocimiento mínimo de las propiedades deductivas del cálculo de predicados. Nosotros damos una demostración que es intermedia a este respecto entre la de Hilbert-Bernays y la de Henkin. Hay asimismo una demostración de Rasiowa y Sikorski, 1950, que usa álgebra y topología.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 34 (preliminares). Por Teorema 19 § 35, cualquier fórmula de letras predicativas F es equivalente a una fórmula prenexa de letras predicativas, que (por el método de demostración), tiene las mismas variables libres $z_1, ..., z_q$ y letras predicativas $P_1, ..., P_s$ que F. Por Teorema 21 § 37 y la tabla de evaluación para $\sim$ en § 28, o haciendo una demostración paralela en teoría de conjuntos a la del Teorema 19, la forma prenexa de F es satisfecha por una asignación dada $z_1, ..., z_q, P_1, ..., P_s$, si y sólo si, F es satisfecha por ésta.

Para el resto de la demostración (incluyendo Lemas 22 y 23), supondremos que F es prenexa. Como ilustración de lo dicho, supongamos que F es $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$ donde $B(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$ no contiene ningún cuantificador y sólo contiene las variables distintas mostradas (así $q = 2$).

En vez de hablar del valor que una fórmula de letras predicativas $A(u_1, ..., u_p)$ toma cuando sus variables libres y letras predicativas $u_1, ..., u_p, P_1, ..., P_s$ toman, respectivamente, los valores $u_1, ..., u_p, P_1, ..., P_s$, de ordinario será más conveniente permitir notacionalmente la sustitución de las variables libres de fórmulas de letras predicativas por numerales, y hablar entonces de los valores tomados por $A(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_p)$ (donde $\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_p$ son los numerales para los números naturales $u_1, ..., u_p$) cuando $P_1, ..., P_s$ tomen los valores $P_1, ..., P_s$. (Aquí $A(\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_p)$ es una *fórmula de letras predicativas con numerales* en el sentido obtenido extendiendo la noción de 'fórmula de letras $k$-predicativas' §37 de modo que permita como términos todos los numerales y no simplemente $1, ..., \boldsymbol{k}$ (y variables). Una fórmula de letras predicativas con numerales que no contenga ninguna variable libre o ligada es una *fórmula de letras proposicionales con numerales*).

Podemos entonces tratar el problema de elegir las funciones lógicas $P_1, ..., P_s$ como un problema de elegir un valor ( t o f ) para cada una de las fórmulas $P_j(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_{n_j})$ donde $j = 1, ..., s$ y $a_1, ..., a_{n_j}$ tienen su rango sobre todos los $n_j$-tuplos de números naturales. Enumérense estas fórmulas de alguna manera sin repeticiones como $Q_0, Q_1, Q_2, ...$

Por las reglas de evaluación para $\forall$ y $\exists$, F es satisfecha por $z_1, z_2, P_1, ..., P_s$, si para cada número natural $x_1$, hay algún número natural $y_1$ dependiente de $x_1$ (lo escribimos "$y_1(x_1)$") tal que para cada $x_2$ y $x_3$, haya algún $y_2$ dependiente de $x_1, x_2, x_3$ (lo escribimos "$y_2(x_1, x_2, x_3)$"), tal que para cada $x_4$,

(I) $$B(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1(x_1), \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_2(x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{x}_4)$$

(donde $\boldsymbol{y}_1(x_1)$ es el numeral para el número natural $y_1(x_1)$, etc.) tiene el valor t. Ahora consideramos que $z_1, z_2, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2, x_3)$ son $2^0 \cdot 3^1$, $2^0 \cdot 3^2$, $2^1 \cdot 3^{x_1}$, $2^2 \cdot 3^{x_1} \cdot 5^{x_2} \cdot 7^{x_3}$, respectivamente. Así determinamos una clase infinita $\mathsf{F}_0$ de fórmulas de letras proposicionales con numerales (a saber, las fórmulas (I) cuando $x_1, x_2, x_3, x_4$ tienen por rango todos los cuádruplos de números naturales, y $z_1, z_2, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2, x_3)$ son como acabamos de especificar) tales que, si $P_1, ..., P_s$ *satisfacen juntamente* estas fórmulas, esto es, les dan a todas el valor t, entonces $z_1, z_2, P_1, ..., P_s$ satisfacen F.

Decimos que una clase de fórmulas es *consistente en* un sistema formal $S$, si el sistema formal obtenido adjuntando las fórmulas de la clase como axiomas a los postulados de $S$ es simplemente consistente (§ 28), o sea, si para ninguna fórmula A tanto A como $\neg$ A son deducibles en $S$ a partir de fórmulas de la clase.

La demostración del Teorema 34 será completada por los Lemas 22 y 23, que se refieren a cualquier fórmula prenexa F de letras predicativas y la clase $\mathsf{F}_0$ obtenida a partir de ella del modo que ilustrábamos.

LEMA $22^{oC}$. *Si* $\mathsf{F}_0$ *es consistente en el cálculo proposicional, entonces* F *es satisfacible en el dominio de los números naturales.*

DEMOSTRACION. Por los preliminares, bastará demostrar que las fórmulas de $\mathsf{F}_0$ pueden ser juntamente satisfechas bajo el procedimiento de evaluación del cálculo proposicional por una asignación de valores de verdad ( t o f ) a cada $Q_0, Q_1, Q_2, ...$ (Ahora nuestro método demostrará esto para cualquier clase $\mathsf{F}_0$ de fórmulas consistentes en el cálculo proposicional y hará una lista $Q_0, Q_1, Q_2, ...$ de fórmulas primas

distintas para el cálculo proposicional incluyendo todos los componentes de $\mathbf{F}_0$ primos para el cálculo proposicional, § 25).

Sea $R_0$ o $Q_0$ o $\neg Q_0$ según $\mathbf{F}_0 \vdash Q_0$ o no $\mathbf{F}_0 \vdash Q_0$ en el cálculo proposicional (donde "$\mathbf{F}_0 \vdash$" significa deducible a partir de fórmulas de $\mathbf{F}_0$), y adjúntese $R_0$ a $\mathbf{F}_0$ para obtener una nueva clase $\mathbf{F}_1$. Entonces $\mathbf{F}_1$ es asimismo consistente en el cálculo proposicional. En el primer caso (esto es, cuando $\mathbf{F}_0 \vdash Q_0$ y $R_0$ es $Q_0$), la adición de $R_0$ no aumenta la clase de las fórmulas que pueden ser deducidas, y en el segundo caso (esto es, cuando $\overline{\mathbf{F}_0 \vdash Q_0}$ y $R_0$ es $\neg Q_0$), si $\mathbf{F}_1 \vdash A$ y $\mathbf{F}_1 \vdash \neg A$ para algún A, entonces $\mathbf{F}_0, \neg Q_0 \vdash A$ y $\mathbf{F}_0, \neg Q_0 \vdash \neg A$, y, por tanto, por $\neg$-introd. y elim., $\mathbf{F}_0 \vdash \neg\neg Q_0 \vdash Q_0$, contradiciendo la hipótesis del caso.

Similarmente para cada número natural $i$, sea $R_i$ o $Q_i$ o $\neg Q_i$ según que $\mathbf{F}_i \vdash Q_i$ o $\overline{\mathbf{F}_i \vdash Q_i}$, y adjúntese $R_i$ a $\mathbf{F}_i$ para obtener $\mathbf{F}_{i+1}$; entonces la consistencia de $\mathbf{F}_{i+1}$ se sigue de la de $\mathbf{F}_i$.

Ahora asignamos a $Q_i$ el valor $\mathfrak{t}$ o $\mathfrak{f}$ según que $R_i$ sea $Q_i$ o $R_i$ sea $\neg Q_i$.

Para esta asignación, no sólo $R_0, R_1, R_2, \ldots$ sino asimismo las fórmulas de $\mathbf{F}_0$ toman el valor $\mathfrak{t}$. Sea H una fórmula de $\mathbf{F}_0$. Las partes distintas de H primas para el cálculo proposicional pertenecen a la lista $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$; digamos que son $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_l}$. Considérese la fórmula $H \,\&\, R_{i_1} \,\&\, \ldots \,\&\, R_{i_l}$; llamémosla "A". Sea $i = 1 + \max(i_1, \ldots, i_l)$; entonces $\mathbf{F}_i \vdash A$, ya que $H, R_{i_1}, \ldots, R_{i_l}$ pertenecen todas a $\mathbf{F}_i$. Los valores asignados son los únicos para los que $R_{i_1}, \ldots, R_{i_l}$ son todos $\mathfrak{t}$. De aquí que, si H no fuera $\mathfrak{t}$ para esta asignación, entonces A sería idénticamente falsa, y $\neg A$ sería idénticamente verdadera (§ 28); así por Teorema 10 § 29 $\neg A$ sería demostrable en el cálculo proposicional, y a fortiori $\mathbf{F}_i \vdash \neg A$, que con $\mathbf{F}_i \vdash A$ contradiría la consistencia de $\mathbf{F}_i$.

LEMA 23. *Si* F *es irrefutable en el cálculo de predicados, entonces* $\mathbf{F}_0$ *es consistente en el cálculo proposicional.*

DEMOSTRACION. Reparemos en que por nuestra elección de los números $z_1, z_2$ y funciones $y_1(x_1)$ e $y_2(x_1, x_2, x_3)$: (A) Los números $z_1$ y $z_2, y_1(x_1)$ para $x_1 = 0, 1, 2, \ldots$, e $y_2(x_1, x_2, x_3)$ para $x_1, x_2, x_3 = 0, 1, 2, \ldots$ son todos distintos. (B) $x_1 < y_1(x_1)$ y $x_1, y_1(x_1), x_2, x_3 < y_2(x_1, x_2, x_3)$.

Para demostrar por reductio ad absurdum que $\mathbf{F}_0$ es consistente, supóngase que para algún A, tanto A como $\neg A$ son deducibles en el cálculo proposicional (usando fórmulas de letras predicativas con numerales) a partir de fórmulas de $\mathbf{F}_0$. Entonces, usando $\neg$-elim. débil, hay una deducción de las fórmulas $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$ a partir de las mismas fórmulas, esto es, a partir de un conjunto finito de fórmulas de la forma (I).

Denoten "$\overline{0}$", "$\overline{1}$", "$\overline{2}$", ... variables distintas entre sí y de $x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4$, pero tales que $\overline{z}_1$ sea $z_1$ y $\overline{z}_2$ sea $z_2$. Cambiando por la variable $\overline{u}$ correspondiente cada numeral $\mathfrak{u}$, en cualquier lugar en que ocurra en esta deducción no como parte de otro numeral, obtenemos una deducción de $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$ en el cálculo proposicional (de letras predicativas), y a fortiori en el cálculo (puro) de predicados manteniendo constantes todas las variables, a partir de un conjunto finito de fórmulas de la forma $B(z_1, z_2, \overline{x}_1, \overline{y}_1(x_1), \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_2(x_1, x_2, x_3), \overline{x}_4)$; y de allí por uso de $\forall$-elim. (reparando en que $x_4$ es distinta de las demás variables mostradas), a partir de fórmulas de la forma

$$\forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x}_1, \overline{y}_1(x_1), \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_2(x_1, x_2, x_3), x_4).$$

Así, escribiendo las distintas fórmulas supuestas (digamos que hay $l$ de ellas),

$$(1)\qquad \begin{array}{l} \forall x_4\, B(z_1, z_2, \overline{x}_1^1, \overline{y}_1(x_1^1), \overline{x}_2^1, \overline{x}_3^1, \overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1), x_4), \\ \forall x_4\, B(z_1, z_2, \overline{x}_1^2, \overline{y}_1(x_1^2), \overline{x}_2^2, \overline{x}_3^2, \overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), x_4), \\ \qquad \cdots \\ \forall x_4\, B(z_1, z_2, \overline{x}_1^l, \overline{y}_1(x_1^l), \overline{x}_2^l, \overline{x}_3^l, \overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l), x_4) \vdash \mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}. \end{array}$$

La fórmula $\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}$ no contiene ninguna variable. Las variables que aparecen libres más a la derecha en las fórmulas supuestas de (1) son $\overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1), \ldots, \overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l)$. Ya que las $l$ fórmulas supuestas son distintas, es decir, $x_1^j, x_2^j, x_3^j$ para $j = 1, \ldots, l$ son triplos distintos de números naturales, por (A) estas $l$ variables son distintas tanto entre sí como de $z_1$, $z_2$. Por (B), podemos elegir una de ellas, digamos $\overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, que es de índice mayor (es decir, viene más tarde en la lista, $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ...) que cualquiera de las variables que aparecen libres en cualquier otra parte de (1) (esto es, no más a la derecha), excepto quizá $z_1$ o $z_2$, y de aquí que también sea distinta de estas variables. Por $\exists$-elim., seguida por un cambio de variables ligadas (*74 §33, reparando en que $y_2$ es distinta de las otras variables mostradas) y dos $\forall$-eliminaciones (reparando en que $x_2$, $x_3$ son distintas entre sí y de las otras variables mostradas),

$$(2)\qquad \begin{array}{l} \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4\, B(z_1, z_2, \overline{x}_1^1, \overline{y}_1(x_1^1), x_2, x_3, y_2, x_4), \\ \forall x_4\, B(z_1, z_2, \overline{x}_1^2, \overline{y}_1(x_1^2), \overline{x}_2^2, \overline{x}_3^2, \overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), x_4), \\ \qquad \cdots \\ \forall x_4\, B(z_1, z_2, \overline{x}_1^l, \overline{y}_1(x_1^l), \overline{x}_2^l, \overline{x}_3^l, \overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l), x_4) \vdash \mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}. \end{array}$$

Ninguna variable es variada, ya que la variable $\overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ de la $\exists$-elim., no ocurre en ninguna de las otras fórmulas supuestas (cfr. Lema 7b § 24).

De nuevo por (A) las variables $\overline{y}_1(x_1^1), \overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), \ldots, \overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l)$ que aparecen libres más a la derecha son distintas tanto entre sí como de $z_1$ y $z_2$. Por (B) podemos elegir una de ellas que sea de índice mayor que cualquiera de las variables que aparezcan libres en otra parte de (2) excepto $z_1$ y $z_2$, y así debe ser también distinta de éstas. Esta variable puede ser $\overline{y}_1(x_1^1)$ o, digamos, $\overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$. Si es $\overline{y}_1(x_1^1)$, por $\exists$-elim., *74 y $\forall$-elim., reemplazamos la primera fórmula supuesta por $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4\, B(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$, esto es, por F. Si es $\overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, reemplazamos la segunda fórmula supuesta por $\forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4\, B(z_1, z_2, \overline{x}_1^2, \overline{y}_1(x_1^2), x_2, x_3, y_2, x_4)$, y, si ésta es un duplicado de la primera (o sea, si $x_1^1 = x_1^2$), la omitimos.

Continuamos de este modo. Tras cada uso de $\exists$-elim (aplicado a una $\overline{y}$ que aparezca más a la derecha y sea distinta de todas las demás variables mostradas) y *74, aplicamos $\forall$-elim. a las $\overline{x}$ que estén "no cubiertas" por la $\exists$-elim., y luego omitimos la fórmula supuesta resultante, si es un duplicado de otra, de modo que las $\overline{y}$ que aparezcan más a la derecha en el paso siguiente sean de nuevo distintas entre sí. Eventualmente obtenemos

$$(3)\qquad F \vdash \mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}.$$

De (3) por &-elim. y $\neg$-introd.,

$$(4)\qquad \vdash \neg\, F,$$

contradiciendo la hipótesis del lema de que F es irrefutable.

COROLARIO $1^{oC}$. *Toda fórmula de letras predicativas* G *que sea válida en el dominio de los números naturales es demostrable en el cálculo de predicados* (*y de aquí que*, por Teorema 21 § 37, *sea válida en todo dominio no vacío*). (Otra versión del teorema de completud de Gödel, 1930).

DEMOSTRACION. {G es válida en el dominio de los números naturales}→ {¬G no es satisfacible en este dominio} → {¬ G es refutable, es decir, ¬ ¬ G es demostrable, en el cálculo de predicados} [por el teorema, aplicado con ¬G como la F, y contrapuesto (cfr. *14 § 26)]→ {G es demostrable en el mismo } [por ¬-elim.].

COROLARIO $2^{C}$. *Si una fórmula de letras predicativas* F *es satisfacible en algún dominio* (*no-vacío*), *entonces* F *es satisfacible en el dominio de los números naturales.* (Teorema de Löwenheim, 1915, también llamado el teorema de Löwenheim-Skolem).

DEMOSTRACION. Por contraposición de Corolario 1; o así: {F es satisfacible en algún dominio} → {¬ F no es válida en este dominio} → {¬ F no es demostrable, es decir, F es irrefutable, en el cálculo de predicados} [por Teorema 21 contrapuesto] → {F es satisfacible en el dominio de los números naturales} [por el teorema].

La demostración de Löwenheim de este teorema y la demostración más simple dada por Skolem 1920, emplea el axioma de elección de teoría de conjuntos (Zermelo 1904, cfr. § 13). La demostración vía teorema de Gödel, es no-constructiva en un grado menor. El paso no-intuicionista (en el tratamiento presente) ocurre en la demostración del Lema 22, donde suponemos que $\mathsf{F}_i \vdash Q_i$ o $\overline{\mathsf{F}_i \vdash Q_i}$. Formalizando una parte de su demostración del teorema de completud de Gödel que contiene el paso no-constructivo, Hilbert y Bernays obtienen un teorema metamatemático de completud para el cálculo de predicados (1939 págs. 252-253), que formularemos como Teorema 36.

TEOREMA $35^{oC}$. *Los predicados satisfacientes* $P_1, ..., P_s$ *para* F *en Teorema* 34 *pueden ser elegidos de modo que* $P_j(a_1, ..., a_{n_j}) \equiv (Ex)(y) R_j(a_1, ..., a_{n_j}, x, y) \equiv (x)(Ey) S_j(a_1, ..., a_{n_j}, x, y)$ *donde* $R_j$ *y* $S_j$ *son recursivas primitivas* ($j = 1, ..., s$).

DEMOSTRACION. En lo sucesivo, "recursiva" puede significar "recursiva general" (aunque realmente los enunciados valen en el significado de recursiva primitiva); entonces por Corolario del Teorema IV § 57, podemos tomar $R_j$ y $S_j$ como recursivas primitivas en la conclusión.

Supóngase que hemos llevado a cabo una numeración de Gödel de las fórmulas de letras proposicionales con numerales por los métodos de §§ 52 y 56. Entonces, si $a$ y $b$ son los números de Gödel de las fórmulas A y B, respectivamente, el de $A \supset B$ es $\mu(a, b)$ y el de $\neg A$ es $\nu(a)$, para ciertas funciones recursivas $\mu$ y $\nu$. Sea $H(a) \equiv$ {$a$ es el número de Gödel de una fórmula perteneciente a $\mathsf{F}_0$}; entonces $H$ es recursiva. Si la enumeración $Q_0, Q_1, Q_2, ...$ fuera elegida de modo conveniente, las funciones siguientes serían recursivas: $\varkappa(i)$ = {el número de Gödel de $Q_i$}, $\alpha_j(a_1, ..., a_{n_j})$ = {el $i$ tal que $P_j(\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_{n_j})$ es $Q_i$}.

Por la definición de los predicados satisfacientes $P_j$, tal como fue dada en la demostración del Lema 22, si $P_j(\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_{n_j})$ es $Q_i$, entonces $P_j(a_1, ..., a_{n_j}) \equiv \{R_i$

es $Q_i\} \equiv \{\mathbf{F}_i \vdash Q_i\}$. Sea $F(i, a) \equiv \{a$ es el número de Gödel de una fórmula A tal que $\mathbf{F}_i \vdash A\}$. Entonces

$$\text{(a)} \qquad P_j(a_1, ..., a_{n_j}) \equiv F(\alpha_j(a_1, ..., a_{n_j}),\ \varkappa(\alpha_j(a_1, ..., a_{n_j}))).$$

Ahora investigaremos el predicado $F(i, a)$.

Decir que $\mathbf{F}_0 \vdash A$ en el cálculo proposicional, significa lo mismo que decir que A es demostrable en el sistema formal obtenido adjuntando $\mathbf{F}_0$ como axiomas al cálculo proposicional. Sea $F_0(a) \equiv \{a$ es el número de Gödel de una fórmula demostrable de este sistema$\}$. Por los métodos de §§ 51, 52 (cfr. Def 12), ya que $H$ es recursiva, $F_0(a) \equiv (Ey) R(a, y)$ con una recursiva (primitiva) $R$; es decir, $F_0(a)$ es expresable en la forma existencial de 1-cuantificador del Teorema V Parte II § 57.

Por la definición de $\mathbf{F}_{i+1}$ a partir de $\mathbf{F}_i$ y las $\supset$-reglas, $\{\mathbf{F}_{i+1} \vdash A\} \equiv \{\mathbf{F}_i, R_i \vdash A\} \equiv \{\mathbf{F}_i \vdash R_i \supset A\}$. Tomando en cuenta la definición de $R_i$ por casos, tenemos entonces

$$\begin{cases} F(0, a) \equiv F_0(a), \\ F(i', a) \equiv [F(i, \varkappa(i)) \,\&\, F(i, \mu(\varkappa(i), a))] \vee [\overline{F}(i, \varkappa(i)) \,\&\, F(i, \mu(\nu(\varkappa(i)), a))]. \end{cases}$$

Esto muestra que $F$ es recursiva en $F_0$; para aplicar # D § 45 e ir desde los predicados $F$ y $F_0$ a sus funciones representantes $\varphi$ y $\varphi_0$, tenemos una "recursión en nido" (§ 55),

$$\begin{cases} \varphi(0, a) = \varphi_0(a), \\ \varphi(i', a) = \chi(\varphi(i, \varkappa(i)), \varphi(i, \mu(\varkappa(i), a)), \varphi(i, \mu(\nu(\varkappa(i), a))), \end{cases}$$

donde $\chi$, $\varkappa$, $\mu$ y $\nu$ son recursivas (primitivas). (En efecto, por el resultado de Péter 1934 citado en § 55, $F$ es recursiva primitiva en $F_0$).

Por (a), $P_j$ es recursiva en $F$, $\alpha_j$, $\varkappa$; de aquí, ya que $\alpha_j$ y $\varkappa$ son recursivas, en $F$; y de aquí en $F_0$, que es expresable en la forma existencial de 1-cuantificador. Por consiguiente, por un teorema de Post (Teorema XI § 58), $P_j$ es expresable en las dos formas de 2-cuantificadores del Teorema V, como había de ser demostrado.

TEOREMA 36°. *La adición a la lista de postulados para el cálculo de predicados de una fórmula de letras predicativas indemostrable* G *para ser usada como un esquema axiomático sería la causa de que el sistema de teoría de números, en cuanto basado en el cálculo de predicados y el Grupo de Postulados* B (§ 19), *resultara* $\omega$*-inconsistente* (§ 42). (*En efecto, resultaría refutable una cierta fórmula que expresase una proposición verdadera de la forma* $(y) D(y)$, *donde* $D(y)$ *es un predicado efectivamente decidible*). (Teorema de completud de Hilbert-Bernays, 1939).

Adviértase la analogía parcial con el Corolario 2 Teorema 10 § 29 para el cálculo proposicional.

METODO DE DEMOSTRACION. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar cerrada G, de modo que $q = 0$ (cfr. final de § 32). Sea F una forma prenexa de $\neg$ G, de modo que por Teorema 19 con *30 y *49,

(i) $\vdash G \sim \neg F$ en el cálculo de predicados.

Por (i), ya que G es indemostrable, también lo es $\neg F$, es decir, F es irrefutable.

De aquí por Lema 23 (cuya demostración fue finitista),

(ii) $\mathsf{F}_0$ es consistente en el cálculo proposicional.

La consistencia de $\mathsf{F}_0$ es equivalente a la proposición de que $\overline{\mathsf{F}_0 \vdash \mathscr{A} \,\&\, \neg\mathscr{A}}$. Si $r$ fuera el número de Gödel de $\mathscr{A} \,\&\, \neg\mathscr{A}$, entonces $\overline{\mathsf{F}_0 \vdash \mathscr{A} \,\&\, \neg\mathscr{A}} \equiv (Ey)\, R\,(r, y) \equiv (y)\bar{R}\,(r, y)$ para la recursiva primitiva $R\,(a, y)$ usada en la demostración del Teorema 35. Sea $D\,(y) \equiv \bar{R}\,(r, y)$. Entonces $D(y)$ es recursiva primitiva, y (ii) es equivalente a

($\text{ii}_a$) $(y)\, D\,(y)$.

Por el Corolario del Teorema 27 § 49, $D\,(y)$ es expresada numeralmente en el formalismo de teoría de números por una fórmula D(y). Entonces de ($\text{ii}_a$),

(iii) $(y)\,[\vdash \mathrm{D}(\mathbf{y})]$

en el formalismo de la teoría de números.

Según el Lema 22, clásicamente

(iv) {$\mathsf{F}_0$ es consistente en el cálculo proposicional} $\rightarrow$
{F es satisfecha por ciertos predicados $P_1, ..., P_s$}.

La premisa de la implicación (iv) puede ser expresada en el simbolismo del sistema de teoría de números por la fórmula $\forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y})$. La conclusión puede ser expresada asimismo en el simbolismo de teoría de números, cuando usamos las expresiones para $P_1, ..., P_s$ dadas en Teorema 35. Sea que $\mathrm{R}_j\,(\mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ exprese numeralmente $R_j\,(a_1, ..., a_{n_j}, x, y)$. Entonces $\exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \mathrm{R}_j\,(\mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ expresa $P_j\,(a_1, ..., a_{n_j})$ en el simbolismo. La proposición de que F es satisfecha por $P_1, ..., P_s$ es expresada entonces por la fórmula F* que obtenemos a partir de F sustituyendo las letras predicativas $\mathrm{P}_j\,(\mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_{n_j})$ por las fórmulas respectivas $\exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \mathrm{R}_j\,(\mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ $(j = 1, ..., s)$ (suponiendo que las variables ligadas hayan sido convenientemente elegidas). Entonces la implicación (iv) es expresada por la fórmula $\forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{F}^*$.

Ahora nos proponemos formalizar la demostración informal clásica de (iv) en el sistema clásico de teoría de números como una demostración de esta fórmula, de modo que tengamos

(v) $\vdash \forall \mathrm{y} \mathrm{D}\,(\mathrm{y}) \supset \mathrm{F}^*$

en este sistema. Por contraposición (*12 § 26),

(vi) $\vdash \neg \mathrm{F}^* \supset \neg \forall \mathrm{y} \mathrm{D}\,(\mathrm{y})$.

A partir de (i) por sustitución (Teorema 15 § 34),

(vii) $\vdash \mathrm{G}^* \sim \neg \mathrm{F}^*$.

Usando (vii) en (vi),

(viii) $$\vdash G^* \supset \neg\, \forall y D(y).$$

En (iii) y (viii), el "$\vdash$" se refiere al formalismo no aumentado de la teoría de números. Ahora, si se añadiese G a este sistema como un esquema axiomático, entonces G* se tornaría en un axioma (por el nuevo esquema), y entonces (ya que (iii) y (viii) todavía valen) D (**y**) para $y = 0, 1, 2, \ldots$ y $\neg\, \forall y D(y)$ son demostrables simultáneamente, esto es, el sistema aumentado es $\omega$-inconsistente. (Entonces $\forall y D(y)$ se torna refutable, aunque expresa la proposición verdadera $(y)\, D\, (y)$).

No gastaremos espacio para realizar la formalización de una demostración informal requerida para pasar de (iv) a (v), como no lo gastamos para pasar de (I) a (II) en la demostración del Teorema 30 § 42.

Hilbert y Bernays 1939 (págs. 205 ss., especialmente págs. 243-352) realizan la formalización de la parte correspondiente de su demostración del teorema de completud de Gödel en otro sistema formal, de donde puede ser inferido que el Teorema 36 vale para nosotros (cfr. las observaciones sobre este sistema precedentes al Ejemplo 9 § 74).

TEOREMA 37°C. *Dada una clase enumerablemente infinita (o finita) de fórmulas de letras predicativas* $F_0, F_1, F_2, \ldots$, *si toda conjunción de un número finito de ellas es irrefutable en el cálculo de predicados, entonces son juntamente satisfacibles en el dominio de los números naturales*, por una asignación satisfaciente de números naturales $z_0, z_1, z_2, \ldots$ a las distintas variables $z_0, z_1, z_2, \ldots$ que ocurren libres y de predicados $P_0, P_1, P_2, \ldots$ a las distintas letras predicativas $P_0, P_1, P_2, \ldots$ que ocurren, en fórmulas de la clase. Las listas $z_0, z_1, z_2, \ldots$ y $P_0, P_1, P_2, \ldots$ pueden ser finitas o infinitas. (Teorema de completud de Gödel para un número infinito de fórmulas, 1930).

DEMOSTRACION. Por ejemplo, supóngase que para algún $k$, $F_k$ es $\forall x_{k1} \exists y_{k1} \forall x_{k2} \forall x_{k3} \exists y_{k2} \forall x_{k4} B(z_{ek1}, z_{ek2}, x_{k1}, y_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, y_{k2}, x_{k4})$. Entonces consideraremos $z_{ek1}, z_{ek2}, \nu_{k1}(x_{k1}), y_{k2}(x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$ como $2^0 \cdot 3^{ek1}$, $2^0 \cdot 3^{ek2}, 2^1 \cdot 3^k \cdot 5^{xk1}, 2^2 \cdot 3^k \cdot 5^{xk1} \cdot 7^{xk2} \cdot 11^{xk3}$. El conjunto $\mathbf{F}_0$ ha de ser la suma de los conjuntos $\mathbf{F}_{00}, \mathbf{F}_{10}, \mathbf{F}_{20}, \ldots$ formado como se ilustró

COROLARIO 1°C. *Si para cada asignación en el dominio de los números naturales a las variables libres y letras predicativas de las fórmulas* $G_0, G_1, G_2, \ldots$, *una de esas fórmulas toma el valor* t, *entonces alguna disyunción de un número finito de ellas es demostrable en el cálculo de predicados.*

COROLARIO 2C. *Si* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ *son juntamente satisfacibles en algún dominio no-vacío (o incluso si cada conjunción de un número finito de* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ *es satisfacible en un dominio no-vacío respectivo* (Gödel 1930)), *entonces* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ *son juntamente satisfacibles en el dominio de los números naturales.* (Una generalización del teorema de Löwenheim, Skolem 1920).

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2. {Cada conjunción de un número finito de $F_0, F_1, F_2, \ldots$ es satisfacible en un dominio no-vacío respectivo} → {la negación de cada conjunción tal no es válida en todo dominio} → {cada conjunción tal

es irrefutable}(por Teorema 21 §37)→{$F_0, F_1, F_2, \ldots$ son juntamente satisfacibles en el dominio de los números naturales} (por el teorema).

TEOREMA 38°C. *Si la enumeración* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ *de fórmulas en Teorema* 37 *es efectiva (si es infinita), los predicados juntamente satisfacientes* $P_0, P_1, P_2, \ldots$ *pueden ser elegidos de modo tal que* $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j}) \equiv (Ex)(y) R_j(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y) \equiv (x)(Ey) S_j(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y)$ *donde* $R_j$ *y* $S_j$ *son recursivas primitivas* $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. La hipótesis de que la enumeración $F_0, F_1, F_2, \ldots$ es efectiva puede cobrar exactitud exigiendo que, para una enumeración de Gödel conveniente, el número de Gödel de $F_k$ sea una función recursiva general de $k$ (cfr. § 61), o usando máquinas de Turing de la manera sugerida al final de § 70.

DEMOSTRACION. Ahora la clase $\hat{a} H(a)$ (cfr. la demostración del Teorema 35) es recursivamente enumerable (pero no necesariamente recursiva). No obstante, si se toma $F_0(a) \equiv (En) F_0(a, n)$ donde $F_0(a, n) \equiv \{a$ es el número de Gödel de una fórmula demostrable del sistema obtenido adjuntando los primeros $n$ de las fórmulas $F_0$ como axiomas al cálculo proposicional}, y si se usa (17) § 57 (o final de § 53), tendremos todavía $F_0(a) \equiv (Ey) R(a, y)$ con una recursiva $R$.

El significado del teorema de completud de Gödel y del teorema de Löwenheim (incluyendo las versiones dadas en § 73) será discutido en §75, pudiendo omitirse la lectura del apartado con asterisco § 74, con tal que el lector acepte unos pocos enunciados plausibles referentes a §74. En § 76 se hará un poco mayor uso de § 74.

Si F es deducible de G en el cálculo de predicados con una regla de sustitución postulada (final de § 37), entonces F es válida en todo dominio en que G lo sea, y de aquí que fórmulas interdeducibles sean válidas en los mismos dominios. La conversa es verdadera cuando ocurren sólo variables predicativas 0- y 1-posicionales, utilizando la teoría citada en § 76; pero no en general, por Hasenjaeger 1950.

§ 73. **El cálculo de predicados con igualdad.** Puede combinarse un tratamiento de la igualdad con el cálculo de predicados añadiendo a los postulados el axioma y esquema axiomático siguientes, donde x es una variable, A(x) es una fórmula, y a y b son distintas variables libres para x en A(x).

22. $a = a$. 23. $a = b \supset (A(a) \supset A(b))$.

Para el *cálculo de predicados puro con igualdad*, 'término' significará variable, y 'fórmula' tendrá el sentido de *fórmula de igualdad y de letras predicativas*, que obtenemos a partir de 'fórmula de letras predicativas' (§31) añadiendo a la definición una cláusula que establezca que, si s y t son términos, s = t es una fórmula. A una fórmula de igualdad y de letras predicativas que no contenga más letras predicativas que las distintas letras $P_1, \ldots, P_s$ la llamamos una *fórmula literal en* $=, P_1, \ldots, P_s$.

(A) Axioma 22 (que es *100 § 38) y $a = b \supset (a = c \supset b = c)$ (Axioma 16 § 19, que es ahora un axioma por el Esquema Axiomático 23) los llamamos los *axiomas de igualdad abiertos para* $=$. A los siguientes $n$ axiomas por el Esquema 23, $a = b \supset (P(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) \supset P(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n))$

($i = 1, ..., n$), donde P es una letra predicativa $n$-ádica y $a_1, ..., a_{i-1}$, a, b, $a_{i+1}$, ..., $a_n$ son $n+1$ variables distintas, los llamamos los *axiomas de igualdad abiertos para P.* Los *axiomas de igualdad cerrados* son las clausuras de los respectivos axiomas de igualdad abiertos (con los cuales son interdeducibles, final § 32). Por medio de "Eq (=, $P_1, ..., P_s$)" denotamos la conjunción de los axiomas de igualdad cerrados para =, $P_1, ..., P_s$.

EJEMPLO 1. Si $\mathcal{A}$ toma dos argumentos, Eq (=,$\mathcal{A}$) es la fórmula

$$\forall a\,[a=a]\ \&\ \forall a\forall b\forall c\,[a=b \supset (a=c \supset b=c)]\ \&$$
$$\forall a\forall b\forall c\,[a=b \supset (\mathcal{A}(a,c) \supset \mathcal{A}(b,c))]\ \&\ \forall a\forall b\forall c[a=b \supset (\mathcal{A}(c,a) \supset \mathcal{A}(c,b))]\,.$$

(B) A partir de los axiomas de igualdad para = (Axiomas 22 y 16), podemos deducir en el cálculo de predicados las propiedades reflexiva (*100), simétrica (*101) y transitiva (*102) de la igualdad, y asimismo las propiedades especiales de reemplazo (*108, *109) como en § 38. A partir de cualquier axioma a = b ⊃ (A (a) ⊃ A (b)) por el Esquema 23 sin que A (x) contenga libres a o b (en particular, *108, *109 o un axioma de igualdad para una letra predicativa P) y de *101, podemos deducir a = b ⊃ (A (a) ~ A (b)) (como hicimos, con un formato ligeramente diferente, cuando inferimos *115 y *116 a partir de *108, *109 y *101).

Ahora y en § 75, cuando estemos tratando una clase de fórmulas de igualdad y de letras predicativas que contengan sólo letras predicativas pertenecientes a una lista dada, usaremos "Q" para representar una letra predicativa particular 2-posicional que no esté en la lista. Dada una fórmula de la clase, "E" o "E (=)", por "$E^Q$" o "E (Q)" entenderemos la fórmula de letras predicativas obtenida a partir de aquélla al reemplazar simultáneamente por Q (s, t) cada parte de la forma s = t, donde s y t sean términos.

Las nociones de $k$-identidad y $k$-igualdad (§ 36), y de satisfacibilidad y validez en un dominio no-vacío dado, se extienden a las fórmulas de igualdad y de letras predicativas con tal que $a = b$ tenga t como valor (f como valor) cuando $a$ y $b$ asuman los mismos (diferentes) objetos del dominio como sus valores; o, si hemos sustituido primero por numerales, con tal que $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ tenga el valor t o f según que $a = b$ o $a \neq b$. Así, una fórmula literal F en =, $P_1, ..., P_s$ será satisfecha por $z_1, ..., z_q, P_1, ..., P_s$, si y sólo si $F^Q$ es satisfecha por $z_1, ..., z_q, Q, P_1, ..., P_s$ con $Q(a, b) \equiv a = b$.

En la extensión gödeliana de su teorema de completud al cálculo de predicados con igualdad (1930), es necesario aceptar la alternativa de que el dominio sea finito, puesto que, p. ej., $a \neq b\ \&\ \forall c\,(c = a \vee c = b)$ es satisfacible en y sólo en un dominio de dos objetos.

TEOREMA $39^{(oC)}$. *Los Teoremas* 20 (§ 36), $21^C$ (§ 37), $34^{oC}$ *y* $37^{oC}$ (§72) *y sus corolarios valen leyendo "fórmula de igualdad y de letras predicativas", "cálculo de predicados con igualdad", "satisfacible (válida, cada asignación) en el dominio de los números naturales o en un (y en todo, o en un) dominio finito no-vacío" en lugar de "fórmula de letras predicativas", "cálculo de predicados", "satisfacible (válida, cada asignación) en el dominio de los números naturales", respectivamente.* (Los teoremas así extendidos son citados usando un asterisco "*"; las

señales "$^{o}$" y "$^{C}$" se aplican al teorema marcado con asterisco cuando se aplican al no marcado con asterisco).

DEMOSTRACIONES. Teorema 34*. Sea F una formula literal en $=, P_1, ..., P_s$ que es irrefutable en el cálculo de predicados con igualdad. Por (A), $Eq(=, P_1, ..., P_s)$ es demostrable en el cálculo de predicados con igualdad. Por tanto, por *45 § 27, F & $Eq(=, P_1, ..., P_s)$ es irrefutable en el cálculo de predicados con igualdad, y a fortiori en el cálculo de predicados (usando fórmulas de igualdad y de letras predicativas). Entonces, por Teorema 15 § 34, $F^Q$ & $Eq(Q, P_1, ..., P_s)$ es irrefutable en el cálculo puro de predicados. Por tanto, por Teorema 34, $F^Q$ & $Eq(Q, P_1, ..., P_s)$ es satisfacible en el dominio de los números naturales. La demostración se complementa mediante (a) del siguiente lema.

LEMA $24^C$. (a) *Si* $F^Q$ & $Eq(Q, P_1, ..., P_s)$ *es satisfacible en un dominio no-vacío dado D, entonces* F *es satisfacible en un dominio no-vacío D* con un número cardinal igual o menor.*

(b) *Si* $F_k^Q$ & $Eq(Q, P_{k1}, ..., P_{ks_k})$, *donde* $P_{k1}, ..., P_{ks_k}$ *son las letras predicativas de* $F_k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$, *son juntamente satisfacibles en un dominio no-vacío D, entonces* $F_0, F_1, F_2, ...$ *son juntamente satisfacibles en un dominio D* con* $0 < \bar{\bar{D}}^* \leq \bar{\bar{D}}$.

DEMOSTRACIONES. (a) Supóngase dada una asignación satisfaciente $z_1, ..., z_q, Q, P_1, ..., P_s$ para $F^Q$ & $Eq(Q, P_1, ..., P_s)$. Entonces, $Q, P_1, ..., P_s$ han de satisfacer las siguientes fórmulas: (i) $\forall a Q(a, a)$, (ii) $\forall a \forall b [Q(a, b) \supset Q(b, a)]$, (iii) $\forall a \forall b \forall c [Q(a, b) \,\&\, Q(b, c) \supset Q(a, c)]$, (iv) $\forall [Q(a, b) \supset (P_j(a_1, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_{n_j}) \sim P_j(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_{n_j}))]$ $(j = 1, ..., s; i = 1, ..., n_j)$. Vemos esto traduciendo a términos de teoría de conjuntos el razonamiento dado en la teoría de la demostración bajo (B); o advirtiendo que la conjunción de esas fórmulas es implicada por (de hecho, es equivalente a) $Eq(Q, P_1, ..., P_s)$ en el cálculo de predicados puro, y usando el Teorema 21 § 37 y las tablas de evaluación para & y $\supset$ (o $\sim$). (Para demostrar el Teorema 34*, este paso puede omitirse usando esa conjunción en lugar de $Eq(Q, P_1, ..., P_s)$.

A partir de la forma de (i)–(iii) y de los procedimientos de evaluación para $\forall$, $\supset$, y &, vemos que la función lógica $Q(a, b)$ que los cumple ha de ser reflexiva, simétrica y transitiva. (A una relación $Q(a, b)$ con estas tres propiedades la llamamos una *relación de equivalencia*). Por tanto el dominio $D$ está incluido en las *clases de equivalencia* con respecto a la relación $Q$, es decir, las clases no-vacías mutuamente exclusivas tales que cualesquiera dos miembros $a$ y $b$ de $D$ pertenecen a la misma clase, si y sólo si $Q(a, b)$. Entonces, puesto que las fórmulas (iv) son satisfechas, el valor de $P_j(a_1, ..., a_{n_j})$ para cualquier $j$ $(j = 1, ..., s)$ no cambia al cambiar cualquiera de sus argumentos por otro de la misma clase de equivalencia.

Tomemos ahora las clases de equivalencia como un nuevo dominio $D^*$ (con $0 < \bar{\bar{D}}^* \leq \bar{\bar{D}}$); y definamos objetos $z_1^*, ..., z_q^*$ a partir de $D^*$ y funciones lógicas $Q^*, P_1^*, ..., P_s^*$ sobre $D^*$ así: $z_j^*$ es la clase de equivalencia a la que pertenece $z_j$, es decir, $z_j^* = \hat{b} Q(z_j, b)$; y $Q^*(a^*, b^*)$ $(P_j^*(a_1^*, ..., a_{n_j}^*))$ tendrá el valor que $Q(a, b)$ $(P_j(a_1, ..., a_{n_j}))$ tome para cualquier $a$ que $\in a^*$ y $b \in b^*$ (para cualquier $a_1 \in a_1^*, ..., a_{n_j} \in a_{n_j}^*$). Entonces $z_1^*, ..., z_q^*, Q^*, P_1^*, ..., P_s^*$ satisfacen en $D^*$ cualquier fórmula que $z_1, ..., z_q, Q, P_1, ..., P_s$ satisfagan en $D$; en particular, satisfacen

$F^Q$ en $D^*$. Pero $Q^*(a^*, b^*) \equiv a^* = b^*$. Por tanto $z_1^*, ..., z_q^*, P_1^*, ..., P_s^*$ satisfacen F en $D^*$.

TEOREMA 40$^{oC}$ (= Teorema 38*). *Sea una de las letras predicativas* $P_0$, $P_1$, $P_2$, ... *que ocurren en* $F_0$, $F_1$, $F_2$, ..., *digamos* $P_0$, *una letra predicativa 2-posicional. Si la enumeración* $F_0$, $F_1$, $F_2$, ... *es efectiva (si infinita), entonces hay un dominio* $D^*$ *y unos predicados juntamente satisfacientes* $P_0^*$, $P_1^*$, $P_2^*$, ... *para el Teorema 37* tales que: Si* $D^*$ *es infinito, y, para una enumeración apropiada* $s_0, s_1, s_2$, ... *de él,* $P_0^*(s_a, s_b) \equiv a' = b$, *entonces* $P_j^*(s_{a_1}, ..., s_{a_{n_j}}) \equiv$ $(Ex)\ (y)\ R_j^*(a_1, ..., a_{n_j}, x, y) \equiv (x)\ (Ey)\ S_j^*\ (a_1, ..., a_{n_j}, x, y)$ *donde* $R_j^*$ *y* $S_j^*$ *son recursivas primitivas* ($j = 1, 2, 3, ...$).

DEMOSTRACION. Por Teorema 38, pueden escogerse predicados juntamente satisfacientes $Q, P_0, P_j$ para las fórmulas $F_k^Q$ & Eq $(Q, P_{k1}, ..., P_{ksk})$ ($k = 0, 1, 2, ...$) tales que sean expresables en ambas formas de 2-cuantificadores del Teorema V § 57. v que, en consecuencia, por Teorema XI § 58 son recursivos generales en predicados de 1-cuantificador.

Por la definición de los predicados $P_j^*$ en la demostración del Lema 24,

$$(1)\quad P_j^*(s_{a_1}, ..., s_{a_{n_j}}) \equiv (Ec_1) ... (Ec_{n_j}) [c_1 \in s_{a_1} \ \& ... \ \& c_{n_j} \in s_{a_{n_j}} \ \&$$
$$P_j(c_1, ..., c_{n_j})] \equiv (c_1) ... (c_{n_j}) [c_1 \in s_{a_1} \ \& ... \ \& c_{n_j} \in s_{a_{n_j}} \rightarrow P_j(c_1, ..., c_{n_j})].$$

Sea $z$ un miembro de $s_0$ (que no es vacía); entonces $s_0 = \hat{c}Q(z, c)$. Por la definición de $P_0^*$, $P_0(d, c)$ vale si y sólo si $P_0^*(d^*, c^*)$ donde $d^*$ y $c^*$ son las clases de equivalencia a las que $d$ y $c$, respectivamente, pertenecen. Pero, por hipótesis, $P_0^*(s_a, s_b) \equiv a' = b$. Por tanto, si $d \in s_a$, entonces $c \in s_{a'}$, si y sólo si $P_0(d, c)$. Puesto que $s_a$ no es vacía, $(a)\ (Ed)\ [d \in s_a]$. Así

$$(2)\quad \begin{cases} c \in s_0 \equiv Q(z, c) \\ c \in s_{a'} \equiv (Ed)\ [d \in s_a \ \& P_0(d, c)] \equiv (d)\ [d \in s_a \rightarrow P_0(d, c)]. \end{cases}$$

Aplicando los Teoremas VI* § 57 u XI* § 58 a la segunda línea, se demuestra que el predicado $c \in s_a$ es recursivo general en $Q, P_0$. Con mayor detalle: Considérese que la segunda línea de (2) tiene la forma

$$H(c) \equiv (Ed)\ [K(d)\ \& P_0(d, c)] \equiv (d)\ [K(d) \rightarrow P_0(d, c)].$$

Sean q, k, p, h, f letras de función que expresen las funciones representantes de $Q, K, P_0, H, c \in s_a$, respectivamente. Por los Teoremas VI* u XI*, $H(c)$ es recursivo general (uniformemente) en $K(d)$, $P_0(d, c)$, o sea, hay un sistema de ecuaciones (conteniendo k, p, h) que define recursivamente (la función representante de) $H(c)$ a partir de (las de) $K(d)$, $P_0(d, c)$. Por el Lema VI § 65, podemos introducir un parámetro para obtener ecuaciones E que definan recursivamente $H(c, a)$ a partir de $K(d, a)$, $P_0(d, c)$. Entonces, E con las tres ecuaciones f (c, 0) = q (**z**, c), k (d, a) = f (d, a), f (c, a') = h (c, a) define $c \in s_a$ recursivamente a partir de $Q, P_0$, como vemos con la ayuda de la inducción sobre $a$.

Puesto que $Q, P_0$ son a su vez recursivos generales en predicados de 1-cuantificador, también lo es $c \in s_a$; y por tanto, por el Teorema XI, $c \in s_a$ es expresable en las dos formas de 2-cuantificadores.

Usando las $(Ex)$ $(y)$-expresiones para $c \in s_a$ y $P_j(c_1, ..., c_{n_j})$ en la expresión central de (1), haciendo avanzar los cuantificadores (por los análogos informales de *91 y *87 § 35), y contrayéndolos (por (17) § 57), obtenemos una $(Ex)$ $(y)$-expresión para $P_j^*(s_{a_1}, ..., s_{a_{nj}})$. Una $(x)$ $(Ey)$-expresión se obtiene similarmente, usando la $(x)$ $(Ey)$-expresión para $P_j(c_1, ..., c_{nj})$ y el miembro derecho de (1) (y aplicando *91, *96, *95, *87, *98, *97, (17), (18)).

Consideramos también ahora *cálculos aplicados de predicados con igualdad*, en los que los términos y fórmulas son construidos usando el simbolismo lógico del cálculo de predicados con ciertos símbolos individuales $e_1, ..., e_q$, símbolos de función $f_1, ..., f_r$ y símbolos predicativos $=, P_1, ..., P_s$ (pero no letras predicativas). Las definiciones en teoría de números de 'término' y 'fórmula' (§ 17) proporcionan un ejemplo (con $q=1, r=3, s=0$). Aunque comúnmente cada símbolo de función o predicativo toma un número $n \geq 1$ de argumentos, podemos permitir que $n \geq 0$, en cuyo caso los símbolos individuales pueden incluirse entre los símbolos de función, y los símbolos proposicionales entre los símbolos predicativos. Escribiremos, p. ej., "f (s, t)" para el término construido colocando términos s y t en las respectivas posiciones de argumento de un símbolo de función 2-ádico f, aunque en un sistema dado puedan usarse otras maneras de combinar los símbolos, p. ej., "f" puede estar para + y "f(s, t)" para s + t.

El cálculo de predicados con igualdad es extensamente tratado en Hilbert-Bernays 1934 págs. 164 ss.

Veremos (Teorema 41 (b)) que, en un cálculo aplicado de predicados con igualdad, el Esquema Axiomático 23 es reemplazable por una lista finita de axiomas particulares sin que cambien las nociones de demostrabilidad y deducibilidad. La idea ha sido ya utilizada al establecer el sistema de teoría de números sin el Esquema Axiomático 23; en este caso los axiomas particulares que reemplazan el Esquema 23 no aparecían como postulados, a excepción de los Axiomas 16 y 17, puesto que el resto era deducible a partir de los otros axiomas de teoría de números.

(C) Para el caso aplicado, leemos "símbolo predicativo P distinto de =" en lugar de "letra predicativa" en (A). Los *axiomas de igualdad abiertos para* un símbolo de función $n$-posicional f serán las $n$ fórmulas
$a = b \supset f(a_1, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n)$ $(i = 1, ..., n)$.
Estas son deducibles en el cálculo de predicados a partir del Axioma 22 y axiomas del Esquema Axiomático 23; p. ej. (con $n=2$), $a = b \supset f(a, c) = f(b, c)$ es deducible por *3 y $\supset$-elim., a partir de $a = b \supset (f(a, c) = f(a, c) \supset f(a, c) = f(b, c))$, que es un axioma del Esquema Axiomático 23, y de $f(a, c) = f(a, c)$, que es deducible por sustitución a partir del Axioma 22. Excepto en el caso de =, los axiomas de igualdad abiertos para un símbolo son los que previamente hemos denominado propiedades especiales de reemplazo (cfr. Teorema 23 § 38). Usamos "Eq $(=, P_1, ..., P_s, f_1, ..., f_r)$" para la conjunción de los axiomas de igualdad cerrados para $=, P_1, ..., P_s, f_1, ..., f_r$.

(D) Dados los axiomas de igualdad para $=, P_1, ..., P_s, f_1, ..., f_r$, podemos usar los resultados de (B) y el anterior método de demostración para establecer el Teorema 24 y sus corolarios en el caso en que la parte r que es reemplazada no quede bajo el alcance de ningún símbolo o letra predicativa, o símbolo de función, distinto de $=, P_1, ..., P_s, f_1, ..., f_r$.

(E) En cualquier sistema en el cual el Teorema 24 valga, con la restricción que se acaba de exponer, es demostrable todo axioma del Esquema Axiomático 23 que contenga sólo los símbolos o letras predicativas $=, P_1, ..., P_s$ y los símbolos de función $f_1, ..., f_r$. Pues bajo las estipulaciones para el esquema, por aplicaciones del Teorema 24 que reemplazan por b cada ocurrencia de a en A (a) que se produce por sustitución de x en A (x), obtenemos $a = b \vdash A(a) \sim A(b)$ sin variar las variables. De ahí, por *17a y $\supset$-introd., $\vdash a = b \supset (A(a) \supset A(b))$.

TEOREMA 41. *En el cálculo de predicados con igualdad, valen las propiedades reflexiva* (*100), *simétrica* (*101), *transitiva* (*102) *y de reemplazo* (*Teorema* 24 *y corolarios*) *de la igualdad.*

(b) $\Gamma \vdash E$ *en el cálculo aplicado de predicados con igualdad que tiene* $=, P_1, ..., P_s, f_1, ..., f_r$ *como sus símbolos predicativos y de función, si y sólo si* $\Gamma, Eq(=, P_1, ..., P_s, f_1, ..., f_r) \vdash E$ *en el cálculo de predicados.*

(c) $\Gamma \vdash E$ *en el cálculo puro de predicados con igualdad, cuando* $\Gamma$, E *son fórmulas literales en* $=, P_1, ..., P_s$, *si y sólo si* $\Gamma, Eq(=, P_1, ..., P_s) \vdash E$ *en el cálculo de predicados.*

DEMOSTRACIONES. (a) Por (A)–(D).

(b) Por (A)–(E).

(c) Similarmente, si podemos excluir primero la posibilidad de que la deducción $\Gamma \vdash E$ requiera axiomas por el Esquema Axiomático 23 que contengan otras letras predicativas $P_{s+1}, ..., P_{s+t}$ aparte de $P_1, ..., P_s$. La deducción $\Gamma \vdash E$ es una deducción en el cálculo de predicados de E a partir de $\Gamma$, $a = a$ y axiomas por Esquema Axiomático 23. Por el método de la Observación 1 § 34, podemos obtener de ahí una deducción de E a partir de $\Gamma, a = a$, y axiomas por el Esquema Axiomático 23 que contengan sólo las letras predicativas $P_1, ..., P_s$.

EJEMPLO 2. Como un quinto ejemplo para la Conversa de la Tesis II § 60, para un $R(x, y)$ recursivo primitivo (cfr. Ejemplo 1 § 60), sea $\varphi_1, ..., \varphi_k$ una descripción recursiva primitiva de la función representante $\varphi (= \varphi_k)$ de $R$. Sean $f_1, ..., f_k$ distintos símbolos de función (para expresar $\varphi_1, ..., \varphi_k$, respectivamente). Constrúyanse los términos y fórmulas de $S$ usando el simbolismo lógico del cálculo de predicados con el símbolo individual 0, los símbolos de función $'$, $f_1, ..., f_k$ y el símbolo predicativo $=$. Tenga $S$ los postulados del cálculo de predicados y, como axiomas particulares, las ecuaciones obtenidas al traducir las aplicaciones del esquema para la descripción $\varphi_1, ..., \varphi_k$ (como el Ejemplo 1 §44 fue traducido para obtener el Ejemplo 3 § 54, pero con $l = 0$), junto con los axiomas de igualdad abiertos para $=, ', f_1, ..., f_k$. Sea $A(\mathbf{x})$ la fórmula $\exists y f_k(\mathbf{x}, y) = 0$. En $S$, la regla R1 de sustitución de § 54 vale como una regla derivada (por § 23), e igualmente la regla de reemplazo R2 (por Teorema 41 (a) y (b)). Por tanto si, para algún $y$, $R(x, y)$ es verdadero, p. ej., $\varphi_k(x, y) = 0$, entonces $f_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ es demostrable en $S$, y por $\exists$-introd., también lo es $A(\mathbf{x})$. Recíprocamente, $A(\mathbf{x})$ es demostrable en $S$ sólo si $(Ey) R(x, y)$, como mostraremos en Teorema 52 § 79.

* § 74. **Eliminabilidad de definiciones descriptivas.** En varios estadios del desarrollo informal de una teoría matemática, cabe introducir adiciones al acervo de conceptos y notaciones. Si el desarrollo es formalizado, se añaden en los corres-

pondientes estadios nuevas reglas de formación y postulados a un sistema formal dado $S_1$ para obtener otro $S_2$. De este modo las fórmulas (fórmulas demostrables) de $S_1$ pasan a ser un subconjunto de las de $S_2$. Las nuevas reglas de formación introducen nuevos símbolos o notaciones formales, y los nuevos postulados sirven para el uso deductivo de tales símbolos o notaciones. Escribiremos "$\vdash_1$" ("$\vdash_2$") para la relación de deducibilidad en $S_1$ (en $S_2$).

Bajo tales circunstancias, decimos que las nuevas notaciones o símbolos (con sus postulados) son *eliminables* (*de $S_2$ en $S_1$*), si hay un proceso efectivo por el cual, dada cualquier fórmula E de $S_2$, puede hallarse una fórmula E′ de $S_1$, tal que:

(I) *Si* E *es una fórmula de* $S_1$, *entonces* E′ *es* E.

(II) $\vdash_2 \mathrm{E} \sim \mathrm{E}'$.

(III) *Si* $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$, *entonces* $\Gamma' \vdash_1 \mathrm{E}'$.

Aquí $\Gamma'$ es $\mathrm{D}_1', \ldots, \mathrm{D}_l'$, si $\Gamma$ es $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_l$. Denominamos a (I)–(III) las *relaciones de eliminación.* (En el Ejemplo 13 se hace uso de leves modificaciones para nuestra formulación de "eliminabilidad").

Cuando las relaciones de eliminación son válidas, entonces además:

(IV) $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$, *si y sólo si* $\Gamma' \vdash_1 \mathrm{E}'$.

(V) *Si* $\Gamma$, E *son fórmulas de* $S_1$, *entonces* $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash_1 \mathrm{E}$.

DEMOSTRACIONES. (IV) Recíprocamente a (III): Si $\Gamma' \vdash_1 \mathrm{E}'$, entonces a fortiori $\Gamma' \vdash_2 \mathrm{E}'$; de donde por (II), $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$.

(V) Por (I) con (III) o (IV).

Así una extensión eliminable de $S_1$ para obtener $S_2$ resulta inesencial, en cuanto que, por (V), no suministra una ampliación de la clase de fórmulas originales que son demostrables, mientras que por (II) cualquier fórmula nueva es equivalente en el sistema ampliado a una de las fórmulas originales.

EJEMPLO 1. ELIMINABILIDAD DE DEFINICIONES EXPLICITAS. Al estudiar nuestro sistema formal, considerábamos a $\sim$, 1, $<$, $\exists!\,\mathrm{x}$, $\mathrm{x}^2$, etc. como meras abreviaturas en la presentación de la metamatemática (cfr. final § 17). Alternativamente, podríamos haberlas tratado como sucesivas adiciones al simbolismo formal. En tal caso, cada vez hubiéramos tenido que añadir una nueva regla de formación (si A y B son *fórmulas*, también lo es $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$; 1 es un *término*; si s y t son términos, $\mathrm{s} < \mathrm{t}$ es una *fórmula*; si x es una variable y A (x) es una *fórmula*, $\exists!\,\mathrm{xA}\,(\mathrm{x})$ es una *fórmula*; si s es un *término*, $\mathrm{s}^2$ es un *término*; respectivamente), y un axioma o esquema axiomático definitorio.
$(\{(\mathrm{A} \sim \mathrm{B}) \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{B}) \,\&\, (\mathrm{B} \supset \mathrm{A})\} \,\&\, \{(\mathrm{A} \supset \mathrm{B}) \,\&\, (\mathrm{B} \supset \mathrm{A}) \supset (\mathrm{A} \sim \mathrm{B})\}$, $1 = 0'$, $a < b \sim \exists c\,(c' + a = b)$, $\exists!\,\mathrm{xA}\,(\mathrm{x}) \sim \exists \mathrm{x}\,[\mathrm{A}\,(\mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{y}\,(\mathrm{A}\,(\mathrm{y}) \supset x = y)]$, $a^2 = a \cdot a$, respectivamente, con estipulaciones apropiadas acerca de A, B, x, A (x), y). Estas adiciones son eliminables, siendo $'$ la operación previamente considerada como no abreviatura. Generalmente tal es el caso bajo las siguientes condiciones (establecidas brevemente). El axioma o esquema axiomático es una equivalencia (una ecuación). Entonces $S_1$ será el cálculo de predicados (el cálculo de predicados con igualdad) y posiblemente axiomas particulares y esquemas axiomáticos adicionales. El Teorema 14 § 33 (Teorema 24 (b) § 38) es utilizado en la demostración

de (II). Se aplicarán las dos convenciones relativas a "abreviaturas permanentes" del final § 33; la primera de ellas es utilizada al tratar el caso correspondiente a las Reglas 9 y 12 en la demostración de (III), y la segunda, en lo que corresponde a los Esquemas Axiomáticos 10 y 11, y puede adoptarse una convención adicional para fijar qué variables ligadas son utilizadas en el E′ correspondiente a cada E. Para cada esquema axiomático adicional, donde A es un axioma de $S_2$ de él resultante, A′ ha de ser demostrable en $S_1$.

EJEMPLO 2. Sea $S_2$ nuestro sistema del cálculo de predicados clásico con la adición del Esquema Axiomático 9a del Lema 11 § 24, que por *95 § 35 es redundante en $S_2$. (Un axioma o esquema axiomático o varios de ellos son *redundantes* en un sistema formal $S$, si los axiomas en cuestión son todos demostrables en el sistema resultante de omitir en él tal(es) axioma(s) o esquema(s) axiomático(s) como postulados). Sea $S_1$ lo que queda de $S_2$ cuando &, $\vee$, $\exists$, y sus postulados, son omitidos. Entonces valen las relaciones de eliminación, cuando ′ es el reemplazo de &, $\vee$, y $\exists$ por los equivalentes dados por *60 y *61 § 27 y *83 § 35. (Al tratar el caso correspondiente al Esquema Axiomático 6 en la demostración de (III), supóngase $A \supset C$, $B \supset C$, $\neg A \supset B$ y $\neg C$, y dedúzcase tanto B como $\neg B$ con la ayuda de *12. Utilícese entonces $\neg$-introd. y elim., y $\supset$-introd.).

EJEMPLO 3. En nuestro sistema de teoría de números, $\vdash \neg A \sim A \supset 1 = 0$. Ello permite eliminar $\neg$, si se añaden primero los postulados (redundantes) $8'$ (u $8^{I'}$) y $15'$, donde $8'$ es $((A \supset 1 = 0) \supset 1 = 0) \supset A$, etc. (Pero 1b incluye a $7'$).

Un teorema de eliminación puede ser considerado como una nueva especie de regla derivada (§ 20) para el estudio del sistema original $S_1$. Cuando nuestro propósito es establecer la demostrabilidad de una fórmula E en $S_1$, nos capacita para abordar en su lugar la tarea de demostrar E en un sistema adecuado $S_2$ que cuente con máquina más poderosa que $S_1$. Por él, asimismo, cualquier fórmula E no perteneciente a $S_1$ que demostremos en $S_2$, puede ser interpretada como una abreviatura correspondiente a una fórmula demostrable E′ de $S_1$.

Un teorema de eliminación tiene como corolarios los siguientes: que la consistencia simple de $S_2$ está implicada por la de $S_1$ (usando (V), cfr. § 28) y que el problema de decisión para $S_2$ se reduce al que corresponde a $S_1$ (por (IV), cfr. § 30, final § 61).

EJEMPLO 4. NO-ELIMINABILIDAD DE LA DEFINICION RECURSIVA DE $\cdot$. El símbolo de función $\cdot$, con sus ecuaciones de recursión (Axiomas 20 y 21) no es eliminable del formalismo del Capítulo IV, al que puede denominarse $S_2$. Pues, por el resultado de Presburger (comienzo de § 42), el sistema restante $S_1$ es simplemente consistente y su problema de decisión es soluble. Si $\cdot$ fuese eliminable, ello sería asimismo verdadero de $S_2$, en contradicción con Teorema 33 § 61.

ELIMINABILIDAD DE DEFINICIONES DESCRIPTIVAS. En una definición descriptiva, un objeto $f$ es definido como el $w$ tal que $F(w)$ (en símbolos, $\iota w F(w)$), donde $F$ es un predicado respecto del cual se sabe que hay un único $w$ tal que $F(w)$ (en símbolos, $(E!\, w)\, F(w)$). Si $w$ es la única variable independiente con respecto a $F$, entonces $\iota w F(w)$ es un individuo $f$. Si $F$ depende de otras $n$ variables individuales, cosa que escribimos así: "$F(x_1, \ldots, x_n, w)$", entonces $\iota w F(x_1, \ldots, x_n, w)$

es una función $f(x_1, ..., x_n)$. Incluiremos el primer caso en el segundo considerando un individuo como una función de 0 variables (de acuerdo con ello convenimos en la presente sección en que 'símbolo de función' incluya 'símbolo individual').

La lógica de las definiciones descriptivas fue tratada por Whitehead y Russell 1910 (págs. 30-32, 66-71, 173-186 en la 2ª ed. 1925).

Su eliminabilidad fue establecida por Hilbert y Bernays 1934 págs. 422-457. Otra demostración fue indicada por Rosser 1939. Estas demostraciones establecen la eliminabilidad de $\iota w$ como un operador formal, cuya admisión en un formalismo dado introduce de una vez todas las posibilidades que corresponden a las definiciones descriptivas. Desde el punto de vista notacional es más sencillo usar símbolos de función. Un matemático introducirá ordinariamente, en el desarrollo de una teoría, nuevos símbolos de función de modo sucesivo, a medida que surja la necesidad de ellos. Estableceremos la eliminabilidad de símbolos de función introducidos de esta manera. Basta considerar la introducción de un nuevo símbolo de función en un momento determinado.

TEOREMA 42. *Tenga* $S_1$ *las reglas de formación de un cálculo aplicado de predicados con igualdad* (§ 73), *y sean los postulados de* $S_1$ *los del cálculo de predicados con axiomas particulares y esquemas axiomáticos adicionales y tales que los axiomas de igualdad para los símbolos de función y predicativos de* $S_1$ *sean demostrables* (*o sea, simplemente,* $S_1$ *un cálculo aplicado de predicados con igualdad y posiblemente axiomas particulares y esquemas axiomáticos adicionales*).

*Sean* $x_1, ..., x_n$, w ($n \geq 0$) *variables distintas, y sea* $F(x_1, ..., x_n, w)$ *una fórmula que contenga libres solamente a* $x_1, ..., x_n$, w, *y en la que* $x_1, ..., x_n$ *estén libres con respecto a* w. *Supóngase que*

$$\text{(i)} \qquad \exists ! w F(x_1, ..., x_n, w)$$

*es demostrable en* $S_1$.

*Obténgase* $S_2$ *a partir de* $S_1$ *por adición de un nuevo símbolo de función* f *de n-posiciones y el nuevo axioma*

$$\text{(ii)} \qquad F(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)).$$

*Entonces el nuevo símbolo de función* f *y su axioma son eliminables, esto es,* (I)-(III) (y por tanto (IV) y (V)) *siguen valiendo para una cierta correlación efectiva'* (que será especificada en la demostración), *supuesto que cada uno de los esquemas axiomáticos adicionales tenga la propiedad de que, si* E *es un axioma de* $S_2$ *por uno de los esquemas, entonces* E' *es demostrable en* $S_1$.

LA DEMOSTRACION es suministrada por los Lemas 25–31. Por el Teorema 41(b), es irrelevante que la lógica que consideremos sea la del cálculo de predicados o la del cálculo de predicados con igualdad, si sabemos que los axiomas de igualdad para los símbolos de función y predicativos son demostrables. De donde, ya desde el comienzo, ello es irrelevante en el caso de $S_1$, y lo será en el caso de $S_2$ tan pronto aprendamos (en el Lema 27) que los axiomas de igualdad para el nuevo símbolo funcional f son demostrables en $S_2$.

LEMA 25. *En el cálculo de predicados con igualdad, si* u, v *y* x *son variables distintas,* F (v), C (v), C (u, v), A, B, A (v), B (v) *y* A (x, v) *son fórmulas,* u *es*

*libre con respecto a* v *en* F (v) *y* C (u, v), A *y* B *no contienen libre a* v, *y* F(v) *no contiene libres a* u *o a* x:

*181. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, C(v)] \sim \forall v\,[F(v) \supset C(v)]$.

*182. $\exists!\, vF(v),\ C(v) \vdash^{v} \exists v\,[F(v) \,\&\, C(v)]$.

*183. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists u\,[F(u) \,\&\, C(u, u)] \sim \exists u\,[F(u) \,\&\, \exists v\,[F(v) \,\&\, C(u, v)]]$.

*184. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, (A \supset B(v))] \sim A \supset \exists v\,[F(v) \,\&\, B(v)]$.

*185. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, (A(v) \supset B] \sim \exists v\,[F(v) \,\&\, A(v)] \supset B$.

*186. $\vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, A \,\&\, B(v)] \sim A \,\&\, \exists v\,[F(v) \,\&\, B(v)]$.

*187. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, (A \vee B(v))] \sim A \vee \exists v\,[F(v) \,\&\, B(v)]$.

*188. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, \neg A(v)] \sim \neg\, \exists v\,[F(v) \,\&\, A(v)]$.

*189. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, \forall x A(x, v)] \sim \forall x\, \exists v\,[F(v) \,\&\, A(x, v)]$.

*190. $\vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, \exists x A(x, v)] \sim \exists x\, \exists v\,[F(v) \,\&\, A(x, v)]$.

(cfr. David Nelson 1947 Lema 23, págs. 347-348).

DEMOSTRACIONES. *181. Supóngase $\exists!\, vF(v)$, F (v) & C (v) (para $\exists$-elim.) y F (t) donde t es una nueva variable (para $\supset$-introd.). Entonces, utilizando *172 § 41, v = t; y por tanto, por reemplazo, C (t). Por $\supset$- y $\forall$-introd. y cambio de variables ligadas, $\forall v\,[F(v) \supset C(v)]$. La variable de la $\forall$-introd. era t, así ninguna variable ha sido variada. Por $\exists$-elim. y $\supset$-introd., $\exists v\,[F(v) \,\&\, C(v)] \supset \forall v\,[F(v) \supset C(v)]$. Para la conversa, supóngase $\exists!\, vF(v)$ y $\forall v\,[F(v) \supset C(v)]$. A partir de $\exists!\, vF(v)$, obtenemos $\exists v F(v)$. Con vistas a la $\exists$-elim., supóngase F(v).

*183. $\exists u\,[F(u) \,\&\, C(u, u)] \vdash \exists u\,[F(u) \,\&\, F(u) \,\&\, C(u, u)]$ (*37 § 27) $\vdash \exists u \exists v\,[F(u) \,\&\, F(v) \,\&\, C(u, v)]$ (*80 § 35) $\vdash \exists u\,[F(u) \,\&\, \exists v\,[F(v) \,\&\, C(u, v)]]$ (*91). La conversa puede basarse similarmente, en *79, con ayuda de *181, *4 § 26 (con la de *69 § 32), etc.

*184. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, (A \supset B(v))] \sim \forall v\,[F(v) \supset (A \supset B(v))]$ (*181) $\sim \forall v\,[A \supset (F(v) \supset B(v))]$ (puesto que utilizando *3, $\vdash B \supset (A \supset C) \sim A \supset (B \supset C)$) $\sim A \supset \forall v\,[F(v) \supset B(v)]$ (*95) $\sim A \supset \exists v\,[F(v) \,\&\, B(v)]$ (*181).

*187. $\exists!\, vF(v) \vdash \exists v F(v) \vdash \exists v\,[F(v) \,\&\, (A \vee B(v))] \sim \exists v\,[(F(v) \,\&\, A) \vee (F(v) \,\&\, B(v))]$ (*35) $\sim (A \,\&\, \exists v F(v)) \vee \exists v\,[F(v) \,\&\, B(v)]$ (*88, *91 con *33) $\sim A \vee \exists v\,[F(v) \,\&\, B(v)]$ (*45).

*188. Utilícense sucesivamente *181, *58b, *86.

LEMA 26. *En el cálculo de predicados con los axiomas de igualdad para los símbolos de función y predicativos de $S_1$ solamente, pero con* f *incluida en el simbolismo (a fortiori, en el cálculo de predicados con igualdad), la conjunción de* (i) *y* (ii) *es interdeducible con*

(iii) $\qquad f(x_1, \ldots, x_n) = w \sim F(x_1, \ldots, x_n, w)$.

*De donde* (iii) *es demostrable en $S_2$.*

DEMOSTRACION. A partir de (ii) y $f(x_1, \ldots, x_n) = w$, deducimos $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ por la propiedad de reemplazo de la igualdad, la cual por (D) § 73 requiere sólo el cálculo de predicados con los axiomas de igualdad para = y los símbolos de función y predicativos de $F(x_1, \ldots, x_n, w)$. A partir de (i), (ii) y $F(x_1, \ldots, x_n, w)$,

deducimos $f(x_1, ..., x_n) = w$ por *172. A partir de (iii), deducimos (i) con la ayuda de *171, y (ii) sustituyendo w en (iii) por $f(x_1, ..., x_n)$ y utilizando el Axioma 22 § 73.

Para el resto de la demostración del Teorema 42, utilizaremos "$F(x_1, ..., x_n, w)$" bajo la convención que se aplica a las abreviaturas permanentes (cfr. final § 33), de que, para cualesquiera términos $t_1, ..., t_n$, s, "$F(t_1, ..., t_n, s)$" denote el resultado de sustituir $x_1, ..., x_n$, w en $F(x_1, ..., x_n, w)$ por $t_1, ..., t_n$, s, después de haber efectuado cualquier cambio legítimo de variables ligadas en $F(x_1, ..., x_n, w)$, que haga libre la sustitución.

LEMA 27. *En el sistema del Lema* 26, *los axiomas de igualdad para* f *son deducibles de* (iii). *Por tanto, son demostrables en* $S_2$.

Si ello no fuese así, el añadir solamente (ii) a los axiomas de $S_1$ no proporcionaría un uso efectivo de f en $S_2$ (cfr. Teorema 41 (a) y (b)).

DEMOSTRACION. Por ejemplo, si $n = 2$ (y escribiendo a, c en lugar de $x_1, x_2$), podemos demostrar $a = b \supset f(a, c) = f(b, c)$ así. Supóngase $a = b$. Por reemplazo, $F(a, c, f(b, c)) \sim F(b, c, f(b, c))$. Por tanto, utilizando (iii), $f(a, c) = f(b, c) \sim f(b, c) = f(b, c)$; de donde (Axioma 22 y *18b), $f(a, c) = f(b, c)$.

LEMA 28. *Sean* $t_1, ..., t_n$ *términos*, v *una variable que no ocurra en* $t_1, ..., t_n$, *y* C (v) *una fórmula en la cual* $f(t_1, ..., t_n)$ *sea libre con respecto a* v. *Entonces* $C(f(t_1, ..., t_n)) \sim \exists v [F(t_1, ..., t_n, v) \,\&\, C(v)]$ *es deducible de* (iii) *en el cálculo de predicados con igualdad, y por tanto es demostrable en* $S_2$.

DEMOSTRACION. Supóngase $C(f(t_1, ..., t_n))$. Sustitúyase en (ii) (cfr. Lema 26), $F(t_1, ..., t_n, f(t_1, ..., t_n))$. Utilícense ahora &- y $\exists$- y $\supset$-introd. Y a la inversa, supóngase (para $\exists$-elim) $F(t_1, ..., t_n, v) \,\&\, C(v)$. Utilizando (iii), $f(t_1, ..., t_n) = v$. Por reemplazo en C (v), $C(f(t_1, ..., t_n))$.

Una fórmula *prima* es aquélla que no contiene ningún símbolo lógico, es decir, aquí se trataría de un símbolo predicativo con términos como argumentos. Denominamos f-*exento* a un término o fórmula de $S_1$, esto es, a uno que no contenga a f. Denominamos f-*término* a un término de la forma $f(t_1, ..., t_n)$ donde $t_1, ..., t_n$ son términos; y si $t_1, ..., t_n$ son f-exentos, decimos que el término es un f-término *simple*. Una ocurrencia de un término en una fórmula es *ligada* (*libre*), si está (no está) dentro del alcance de algún (ningún) cuantificador $\forall y$ o $\exists y$ donde y es una variable del término.

EJEMPLO 5. Sean P y Q símbolos predicativos; g, un símbolo de función distinto de f; x e y, variables distintas. En la fórmula que sigue, la segunda ocurrencia de un f-término es ligada; las otras seis son libres.

1. $\forall x \{P(f(y), f(g(x))) \,\&\, Q(x, x)\}$
   $\supset P(f(y), f(g(f(y)))) \,\&\, Q(f(y), f(y))$.

Los f-términos $f(y)$ y $f(g(x))$ son simples, pero $f(g(f(y)))$ no lo es, ya que el f-término $f(y)$ está anidado en él.

LEMA 29. *Una fórmula* E′ *de* $S_1$ (denominada la *transformación principal* f-*exenta de* E) *puede estar correlacionada efectivamente a cada fórmula* E *de* $S_2$ *de modo tal que* (I) *y* (II) *valgan y que ninguna variable libre sea introducida o eliminada, y que los operadores del cálculo de predicados sean preservados, es decir* $(A \supset B)'$ *es* $A' \supset B'$ $(A \,\&\, B)'$ *es* $A' \,\&\, B'$, $(A \vee B)'$ *es* $A' \vee B'$, $(\neg A)'$ *es* $\neg A'$, $(\forall x A(x))'$ *es* $\forall x A'(x)$ (*donde* $A'(x)$ *es* $(A(x))'$) *y* $(\exists x A(x))'$ *es* $\exists x A'(x)$.

DEMOSTRACION. La condición de que los operadores sean preservados define a E′ por recursión sobre el número $g$ de ocurrencias de símbolos lógicos en E, supuesto que aportemos como base una definición de E′ para el caso en que E sea prima. Lo realizamos por inducción sobre el número $q$ de ocurrencias de f-términos en E, así:

Si $g = q = 0$, E′ será E.

Si $g = 0$ y $q > 0$, selecciónese la primera ocurrencia de un f-término pleno en E, digamos que es $f(t_1, ..., t_n)$. Sea v una variable que no ocurre en E. Resulte C(v) de E al cambiar por v la ocurrencia de $f(t_1, ..., t_n)$ bajo consideración. Entonces E′ será $\exists v\,[F(t_1, ..., t_n, v) \,\&\, C'(v)]$. (Por *181, podríamos utilizar igualmente $\forall v\,[F(t_1, ..., t_n, v) \supset C'(v)]$). Hay aquí una ambigüedad con respecto a la elección de la variable ligada v y al modo en que las variables ligadas de $F(x_1, ..., x_n, w)$ son cambiadas cuando es necesario para hacer libre la sustitución de $x_1, ..., x_n$, w por $t_1, ..., t_n$, v. Pero diferentes elecciones legítimas conducen a fórmulas congruentes (§ 33). Podemos suponer que se ha aportado alguna convención para fijar cuál es E′. En nuestras ilustraciones, bastará utilizar cualquier fórmula congruente con E′. Obsérvese que C(v) es prima y contiene justamente $q - 1$ ocurrencias de f-términos.

Las propiedades de mencionadas en el lema se siguen por una correspondiente inducción sobre $g$ (utilizando el Teorema 14 § 33 para (II)), con inducción sobre $q$ dentro de la base (utilizando el Lema 28).

Una abreviatura sugerente consiste en escribir "$F_v^{t_1, ..., t_n} C(v)$" en lugar de

$$\exists v\,[F(t_1, ..., t_n, v) \,\&\, C(v)].$$

EJEMPLO 5 (continuación). La fórmula 1 es reducida a una fórmula congruente de su transformación principal f-exenta así.

2. $$\forall x\,\{F_{v_2}^{y}\, P(v_2, f(g(x))) \,\&\, Q(x, x)\}$$
$$\supset F_{v_2}^{y}\, P(v_2, f(g(f(y)))) \,\&\, F_{v_{12}}^{y}\, Q(v_{12}, f(y)).$$

3. $$\forall x\,\{F_{v_2}^{y}\, F_{v_3}^{g(x)}\, P(v_2, v_3) \,\&\, Q(x, x)\}$$
$$\supset F_{v_2}^{y}\, F_{v_{11}}^{y}\, P(v_2, f(g(v_{11}))) \,\&\, F_{v_{12}}^{y}\, F_{v_{13}}^{y}\, Q(v_{12}, v_{13}).$$

4. $$\forall x\,\{F_{v_2}^{y}\, F_{v_3}^{g(x)}\, P(v_2, v_3) \,\&\, Q(x, x)\}$$
$$\supset F_{v_2}^{y}\, F_{v_{11}}^{y}\, F_{v_3}^{g(v_{11})}\, P(v_2, v_3) \,\&\, F_{v_{12}}^{y}\, F_{v_{13}}^{y}\, Q(v_{12}, v_{13}).$$

Llamemos "F-cuantificadores" a los prefijos $F_v^{t_1, ..., t_n}$. Por *184–*190 (puesto que (i) nos da las fórmulas supuestas $\exists!\, v F(v)$), los F-cuantificadores pueden ser permutados en $S_1$ con los operadores del cálculo de predicados y entre sí (cambiando las variables ligadas cuando sea necesario), sujetándose a la restricción de

que $F_v^{t_1,\ldots,t_n}$ no puede ser adelantado (retrocedido) sobre un cuantificador ordinario o un F-cuantificador que ligue cualquier variable de $t_1, \ldots, t_n$ (puesto que por *189 y *190, la F (v) no debe contener libre a x). Esta restricción en tanto que referida a dos F-cuantificadores significa simplemente que dos F-cuantificadores resultantes de la eliminación de f-términos, el uno anidado en el otro, han de ser conservados siempre en el mismo orden relativo (quedando a la izquierda el correspondiente al f-término interno). Y en tanto que referida a un F- y un cuantificador ordinario, dicha restricción significa que un F-cuantificador que resulte de la eliminación de una ocurrencia ligada de un f-término, puede ser retrocedido sólo hasta el que figure más a la derecha de entre los cuantificadores ordinarios que liguen la ocurrencia.

Además, por *138, F-cuantificadores adyacentes como $F_u^{t_1,\ldots,t_n}$ y $F_v^{t_1,\ldots,t_n}$ pueden ser contraídos.

*182 constituye también una regla de introducción para F-cuantificadores.

EJEMPLO 5 (conclusión). La fórmula 1 es un axioma $\forall x A(x) \supset A(t)$ de $S_2$ por el Esquema Axiomático 10, con f(y) en el lugar de la t; y elegimos las mismas variables ligadas al eliminar f-términos correspondientes de A (x) y A (t) en la reducción de la Fórmula 4. Ahora por *186, *190, *186 (con *33), *184 y *183 (con un cambio de variables ligadas), podemos adelantar hasta el frente de la fórmula los tres F-cuantificadores $F^y_{v_{11}}$, $F^y_{v_{12}}$, $F^y_{v_{13}}$, resultantes de la eliminación de las tres ocurrencias de f (y) en el lugar de t de la aplicación del esquema, y contraerlos a un F-cuantificador $F^y_{v_1}$. Ello nos da la siguiente fórmula, como un equivalente en $S_1$ de la fórmula 4, y por tanto de la transformación principal f-exenta de la Fórmula 1.

$$5. \quad F^y_{v_1}\,[\forall x\,\{[F^y_{v_2}\,F^{g(x)}_{v_3}\,P(v_2, v_3) \,\&\, Q(x, x)\} \supset F^y_{v_2}\,F^{g(v_1)}_{v_3}\,P(v_2, v_3) \,\&\, Q(v_1, v_1)]].$$

Ahora el alcance de $F^y_{v_1}$ en 5 es un axioma de $S_1$ por el Esquema Axiomático 10, con $v_1$ en el lugar de t. Así por F-introd. (*182), la Fórmula 5 es demostrable en $S_1$, y por ende también lo es la transformación principal f-exenta de la Fórmula 1.

LEMA 30. *Si* E *es un axioma de* $S_2$, *entonces* $\vdash_1 E'$.

DEMOSTRACIÓN. Si E es un axioma de $S_2$ por cualquier esquema axiomático del cálculo proposicional, entonces E′ es un axioma de $S_1$ por el mismo esquema, puesto que ′ preserva los operadores del cálculo (Lema 29).

ESQUEMA AXIOMATICO. 10: E es $\forall x A(x) \supset A(t)$, donde t es libre con respecto a x en A (x).

CASO 1: t es f-exento. Entonces por elección de las mismas variables ligadas para pasos correspondientes en las reducciones de A (x) y A (t), podemos obtener una congruente de E′ que es de la forma $\forall x B(x) \supset B(t)$ donde t es libre con respecto a x en B (x). Lo cual es un axioma de $S_1$ por el Esquema Axiomático 10, con el mismo t. De donde $\vdash_1 E'$.

EJEMPLO 6. Sea E

$$\forall x\,\{P(f(y), f(g(x))) \,\&\, Q(x, x)\} \supset P(f(y), f(g(t))) \,\&\, Q(t, t),$$

donde t es f-exento. Entonces

$$\forall x \{F_{v_1}^{y} F_{v_2}^{g(x)} P(v_1, v_2) \& Q(x, x)\} \supset F_{v_1}^{y} F_{v_2}^{g(t)} P(v_1, v_2) \& Q(t, t)$$

es congruente con E′, y es un axioma de $S_1$ por el Esquema Axiomático 10.

CASO 2: el caso general. Digamos que A(x) contiene $k$ ocurrencias de f-términos y $l$ ocurrencias libres de x, y que t contiene $m$ ocurrencias de f-términos. (Ilustrado con $k = 2$, $l = 3$, $m = 1$ por el Ejemplo 5). Entonces A (t) contiene $k$ ocurrencias de f-términos que están orginados a partir de A (x) y corresponden así a los f-términos de A (x), y otras $lm$ constituidas por ocurrencias de $m$ en cada una de las $l$ ocurrencias de t que ocupan el lugar de las ocurrencias libres de x en A (x). En la reducción de E a una congruente de E′, podemos utilizar F-cuantificadores con la misma variable ligada al eliminar de A (x) y A (t) cada uno de los $k$ pares de ocurrencias de f-términos correspondientes, y F-cuantificadores con otras variables ligadas distintas al eliminar de A (t) las $lm$ ocurrencias de f-términos en los t. Digamos que en tal eliminación, estas $l$ ocurrencias de t se convierten en $t_1^*, \ldots, t_l^*$ ($v_{11}$, $v_{12}$, $v_{13}$ en el ejemplo). Puesto que ninguna de las $k$ ocurrencias de f-términos en A (t), originada a partir de A (x), puede estar involucrada en ninguna de las $lm$ que resultan de la sustitución de x por t, y puesto que la sustitución es libre, el último de los $lm$ F-cuantificadores utilizados en la eliminación puede ser adelantado al frente de la fórmula, y en un orden tal que cada grupo $l$ de ellos, perteneciente a correspondientes ocurrencias de f-términos en las $l$ ocurrencias de t, sea adyacente, tras lo cual cada uno de dichos grupos puede ser contraído. Obtenemos así, como un equivalente en $S_1$ de E′, una fórmula de la forma

$$(A) \qquad F_{v_1}^{s_{11}, \ldots, s_{1n}} \ldots F_{v_m}^{s_{m1}, \ldots, s_{mn}} [\forall x B(x) \supset B(t^*)],$$

donde t* resulta de cada uno de los $t_1^*, \ldots, t_l^*$ por la identificación de variables en dicha contracción, y es libre con respecto a x en B(x). Ahora $\forall x B(x) \supset B(t^*)$ es un axioma de $S_1$ por el Esquema Axiomático 10, y por tanto (A) es demostrable por $m$ aplicaciones de F-introd. (*182).

AXIOMA (ii): E es $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$. Supóngase que w ocurre libre $l$ veces en $F(x_1, \ldots, x_n, w)$. Entonces E′ contiene $l$ F-cuantificadores. Los cuales pueden ser adelantados y contraídos para dar $F_v^{x_1, \ldots, x_n} F(x_1, \ldots, x_n, v)$, esto es, $\exists v \{F(x_1, \ldots, x_n, v) \& F(x_1, \ldots, x_n, v)\}$, que es demostrable a partir de (i).

LEMA 31. *Si* E *es una consecuencia inmediata de* F (*de* F *y* G) *en* $S_2$, *entonces* E′ *es una consecuencia inmediata de* F′ (*de* F′ *y* G′) *en* $S_1$.

Para cada una de las Reglas 2, 9 y 12, porque ′ preserva los operadores, y no introduce variables libres (de suerte que la C de la Regla 9 o de la 12 no es transformada en una fórmula C′ que contenga libre a x).

OBSERVACION 1. Si f no es 0 ó ′, el esquema de inducción satisface la estipulación del teorema para esquemas axiomáticos adicionales, como puede verse por el razonamiento usado para el Esquema Axiomático 10 Caso 1.

EJEMPLO 7. Sea $S_1$ el sistema de teoría de números del Capítulo IV. Resulte $S_2$

de $S_1$ adjuntando el símbolo funcional rs (para expresar la función resto) al axioma

$$\exists q\,(a = bq + \mathrm{rs}\,(a, b)\ \&\ \mathrm{rs}\,(a, b) < b) \vee (b = 0\ \&\ \mathrm{rs}\,(a, b) = a)$$

(cfr. *179b, c § 41). Entonces por el teorema (juntamente con la Observación 1), rs y su axioma son eliminables.— Sea $[a/b]$ la notación para el cociente y adjúntesele asimismo el axioma $\exists r\,(a = b\,[a/b] + r\ \&\ r < b) \vee b = [a/b] = 0$ (cfr. *178b, c). Por sucesivas aplicaciones del teorema, tanto rs como $[a/b]$ pueden ser eliminados.

EJEMPLO 8. Sea $S_1$ el sistema formal de teoría de números, R (x, y) una fórmula que contenga libres solamente x e y, y $R\,(x, y)$ el predicado que R (x, y) exprese bajo la interpretación. (a) Considérese el sistema clásico $S_1$, y supóngase que R es tal que: (A) $\vdash_1 \exists y R(x, y)$. Entonces, utilizando *149 y *174b, un símbolo de función f introducido con el axioma R (x, f (x)) & $\forall z$ (z < f (x) $\supset$ $\neg$ R (x, z)), de suerte que bajo la interpretación (clásica) (al menos) f (x) exprese la función $\mu y R\,(x, y)$ (comienzos de § 57, suponiendo con respecto a $S_1$ que (A) implica (1b) § 57 (con $n = 1$)), será eliminable, esto es, las relaciones de eliminación siguen siendo válidas en el sistema $S_2$ así obtenido. Utilizando *149a en lugar de *149, lo mismo vale en el sistema intuicionista $S_1$, cuando además de (A) se da también: ($\alpha$) $\vdash_1$ R (x, y) $\vee$ $\neg$ R (x, y). (b) Considérese ahora el sistema clásico $S_1$, sin suponer (A). Supóngase que $R^\dagger$ (x, w) es R (x, w) $\vee$ {$\neg$ $\exists$yR (x, y) & w = 0}, y que $R^\ddagger$ (x, w) es $R^\dagger$ (x, w) & $\forall z$ (z < w $\supset$ $\neg R^\dagger$ (x, z)). Por *51, $\vdash_1 \exists y R$ (x, y) $\vee$ $\neg$ $\exists$yR (x, y). De donde, utilizando casos (V-elim.), $\vdash_1 \exists w R^\dagger$ (x, w); y por *149 y *174b: (1) $\vdash_1 \exists!\, w R^\ddagger$ (x, w). Así pues un símbolo de función f introducido con el axioma $R^\ddagger$(x, f (x)) será siempre eliminable clásicamente. Bajo la interpretación (clásica), f (x) expresa ahora $\varepsilon y R\,(x, y)$ (comienzos de §62; cfr. (59) § 63). La eliminabilidad vale en el sistema intuicionista $S_1$, cuando R es tal que ($\alpha$) es válida y también:
($\beta$) $\vdash_1 \exists y R$ (x, y) $\vee$ $\neg$ $\exists$yR (x, y). Porque ($\beta$) nos permite prescindir de *51, y ($\alpha$) y ($\beta$) juntamente con *158 y la Observación 1 (b) § 29 dan $\vdash_1 R^\dagger$ (x, w) $\vee$ $\neg$ $R^\dagger$ (x, w), lo cual nos permite usar *149a en lugar de *149. (c) Sea $\varphi(x)$ cualquier función cuyo representante $\varphi(x) = w$ es un predicado aritmético (§ 48). Sea R (x, w) una fórmula que exprese $\varphi(x) = w$. Entonces la f (x) de (b) expresa $\varepsilon w\,[\varphi(x) = w]$, esto es, $\varphi(x)$. Así, *en el sistema clásico de teoría de números, para cualquier función* $\varphi(x)$ *tal que* $\varphi(x) = w$ *sea aritmético, puede hallarse una fórmula* F (x, w) *que contenga libres solamente a* x *y a* w *tal que* F (**x, w**) *sea verdadera bajo la interpretación exactamente cuando* $w = \varphi(x)$, *y un nuevo símbolo de función* f *que exprese* $\varphi$ *con el axioma* F(x, f(x)) *sea eliminable.* En particular, *una fórmula tal como* F (x, w) *puede ser hallada para cualquier función recursiva general* $\varphi(x)$ (por el Teorema VII (b) § 57); *y para muchas funciones (bajo la interpretación clásica) que no son recursivas generales*, p. ej. $\varepsilon y T_1\,(x, x, y)$ (cfr. (b) o comienzos de § 62, y Ejemplo 1 § 63). (d) Recíprocamente, si un axioma de la forma F (x, f (x)) caracteriza a f (x) como expresando una función $\varphi(x)$ (esto es, si para cada $x$, F (**x, w**) es verdadera bajo la interpretación exactamente cuando $w = \varphi(x)$), entonces $\varphi(x) = w$ es aritmético.— La situación para el sistema intuicionista será considerada más adelante en § 82 (Ejemplos 1 y 2).

Para los dos ejemplos siguientes, supondremos que (1)–(3) de la Observación 1 § 49, han sido establecidos, o bien formalizando directamente § 48, o bien to-

mándolos de Hilbert-Bernays 1934 págs. 401-419. El tratamiento de Hilbert-Bernays se lleva a cabo en un sistema formal que (dejando aparte diferencias irrelevantes, incluyendo su uso de variables predicativas, cfr. final de § 37) resulta de nuestro sistema clásico de teoría de números por la adición de un operador (con postulados apropiados) que, aplicado a una fórmula R(x, y) produce un término que expresa la función $\varepsilon y R(x, y)$, donde $R(x, y)$ es el predicado expresado por R (x, y). Por el Ejemplo 8 (b), cada uso de este operador puede ser eliminado. Aplicando el proceso a las fórmulas presentadas en quinto lugar en la pág. 416 y séptimo lugar en la pág. 419, tomando a $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ $(n, \rho(m, n' \cdot l + 1))$ simplemente como una variable w, nos veremos conducidos a $(\alpha)$ y $(\beta)$ de la Observación 1 § 49. Este tratamiento puede ser adaptado al sistema intuicionista. (Hilbert y Bernays escriben el operador $\mu_x$; su $\varepsilon_x$ tiene otro significado, cfr. 1939 págs. 9 ss., Hilbert 1928).

EJEMPLO 9. ELIMINABILIDAD DE ULTERIORES DEFINICIONES RECURSIVAS PRIMITIVAS QUE CONTIENEN LAS DEFINICIONES PARA + Y · (cfr. Ejemplo 4). Supóngase que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ es la descripción recursiva primitiva de una función $\varphi$ $(= \varphi_k)$. Sea $S_1$ el sistema de teoría de números con símbolos de función adicionales $f_1, \ldots, f_{k-1}$ (que expresan, respectivamente, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$), y con ecuaciones obtenidas por traducción de las aplicaciones de los esquemas para $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ (como en § 54) adjuntadas como axiomas. Digamos p. ej., que $\varphi$ proviene de $\psi$, $\chi$ (donde $\psi$, $\chi$ están tomadas de la lista $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$) por el Esquema (Vb) § 43 con $n = 2$. Aplicando la Observación 1 § 49: (1) $\vdash_1$ P (0, x, w) $\sim$ Q (x, w), (2) $\vdash_1$ P (y′, x, w) $\sim$ $\exists$z [P (y, x, z) & R (y, z, x, w)], (3) $\vdash_1$ $\exists!$wP (y, x, w). Suponemos también (como hipótesis de una inducción sobre $k$): (4) $\vdash_1$ g(x) = w $\sim$ Q (x, w), (5) $\vdash_1$ h (y, z, x) = w $\sim$ R (y, z, x, w) (donde g, h expresan, respectivamente, $\psi$, $\chi$). El teorema (con (3)) nos dice que la adición de f a $S_1$, con P (y, x, f (y, x)) como el axioma adicional, es eliminable. Pero en $S_1$ con f añadida al simbolismo, P (y, x, f (y, x)) es interdeducible con f (0, x) = g(x) & f(y′, x) = = h (y, f (y, x), x), como fácilmente puede verse (usando (1)–(5), y, en una dirección, la inducción sobre y). De ahí que pueda utilizarse el par de ecuaciones f (0, x) = g (x), f (y′, x) = h (y, f (y, x), x) en lugar de la fórmula P (y, x, f (y, x)) como axiomas adicionales, con los mismos resultados. (Este par de ecuaciones es obtenido de modo ligeramente diferente en Hilbert-Bernays 1934 en la pág. 421).

EJEMPLO 10. Sea $S_1$ el formalismo de la teoría de números. Por la demostración del Teorema 32 (a) § 59, hay una fórmula P (z, x, w) tal que, si $e$ es un número de Gödel de una función recursiva general $\varphi(x)$, entonces P ($\boldsymbol{e}$, x, w) representa numeralmente a $\varphi(x)$. Luego, $\exists!$wP ($\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x}$, w) es demostrable para cada número natural $x$. ¿Ha de ser $\exists!$wP ($\boldsymbol{e}$, x, w) demostrable? (Ciertamente lo es para algunas elecciones de $\varphi$ y $e$, p. ej. formalizando mediante § 56 el razonamiento dado en § 54). Por el Teorema 31 § 52, $\{\vdash_1 \exists!\text{wP}(\boldsymbol{z}, \text{x}, \text{w})\} \equiv (Ey) R(z, y)$ para algún $R$ recursivo primitivo. Sea $\theta$ obtenida a partir de este $R$ por el Teorema XIV (b) § 60. Entonces $\theta$ es recursiva primitiva, y $\theta(y)$ para $y = 0, 1, 2, \ldots$ es una enumeración de los números $z$ para los cuales es demostrable $\exists!$wP ($\boldsymbol{z}$, x, w). Bajo la interpretación, $\exists!$wP ($\boldsymbol{z}$, x, w) es verdadero sólo cuando $z$ es el número de Gödel de una función recursiva general de una variable. Supóngase que $S_1$ tiene la propiedad de consistencia de que $\exists!$wP ($\boldsymbol{z}$, x, w) es demostrable sólo en dicho caso. Ahora para cada $y$, $\theta(y)$ es el número de Gödel de una función recursiva

general, que puede ser escrita $\Phi_1(\theta(y),x)$ (principio de §65); y así $\Phi_1(\theta(x),x)+1$ es una función recursiva general $\varphi(x)$, para cualquier número de Gödel $e$ del cual $\exists!\,\mathrm{wP}(\mathfrak{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w})$ sea indemostrable en $S_1$.— Para un tal $e$, sea $S_2$ obtenido de $S_1$ por la adición de un nuevo símbolo funcional f con el axioma $\mathrm{P}(\mathfrak{e}, \mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$. Entonces f (y su axioma) no son eliminables. Porque, utilizando *174a y el resultado (3) de la Observación 1 § 49 para la función recursiva primitiva $U$ (cfr. la demostración del Teorema 32), mostramos fácilmente que $\mathrm{P}(\mathfrak{e}, \mathrm{x}, \mathrm{t}) \vdash_1 \exists!\,\mathrm{wP}(\mathfrak{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w})$. De donde, utilizando el nuevo axioma, $\vdash_2 \exists!\,\mathrm{wP}(\mathfrak{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w})$. Si f fuera eliminable, entonces $\exists!\,\mathrm{wP}(\mathfrak{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w})$ sería demostrable en $S_1$, lo cual no es el caso. Así *en el sistema de teoría de números, hay una fórmula* $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{w})$ *que contiene libres solamente a* x *y a* w *tal que, bajo una suposición de consistencia:* $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{w})$ *representa numeralmente una función recursiva general* $\varphi$, *pero un nuevo símbolo de función* f *(que exprese* $\varphi$*) con el axioma* $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$ *no es eliminable.*

Para un F, f y reglas de formación (aquí las de $S_2$) dados, entendemos por una *transformación* de una fórmula E cualquier fórmula D tal que $\mathrm{E} \sim \mathrm{D}$ sea deducible en el cálculo de predicados con igualdad a partir de la fórmula (iii).

OBSERVACION 2. (a) Las transformaciones de E incluyen su transformación principal f-exenta $\mathrm{E}'$ (por el Lema 28 y la demostración del Lema 29) y todas las fórmulas obtenibles a partir de ello por manipulaciones de F-cuantificadores basadas en el Lema 25 (por el Lema 26). (b) Cualesquiera dos transformaciones f-exentas $\mathrm{E}^1$ y $\mathrm{E}^2$ de una fórmula E de $S_2$, dado que son equivalentes en $S_2$ (por los Lemas 26 y 27), son equivalentes en $S_1$ (por (V)). Ello vale para cualquier $S_1$ y en lo que respecta al Teorema 42 con las reglas de formación dadas (sin la estipulación para los esquemas axiomáticos adicionales, puesto que la demostración de $\mathrm{E}^1 \sim \mathrm{E}^2$ en $S_2$ utiliza sólo los axiomas de $S_1$), y, en particular, cuando $S_1$ es simplemente el cálculo de predicados con igualdad e (i) como un axioma.

REEMPLAZABILIDAD DE FUNCIONES INDEFINIDAS POR PREDICADOS. TEOREMA 43. (a) *Sea* $S_2$ *un cálculo aplicado de predicados con igualdad que tenga un símbolo* f *para una función de* $n$ *variables* ($n \geq 0$); *y supóngase que* $S_1$ *proviene de* $S_2$ *omitiendo* f *e introduciendo en cambio un símbolo* F *para un predicado de* $n+1$ *variables con el axioma* $\exists!\,\mathrm{wF}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ (*o bien los postulados de* $S_2$ *pueden ser los del cálculo de predicados con los axiomas de igualdad para los símbolos de función y predicativos de* $S_2$, *en cuyo caso, en la formación de* $S_1$ *omitimos también los* $n$ *axiomas de igualdad para* f *e introducimos en cambio los* $n+1$ *axiomas de igualdad para* F).

*Para cualquier fórmula* E *de* $S_2$, *sea* $\mathrm{E}'$ *una transformación particular* f-*exenta de* E (*con las presentes* f *y* F, *bajo reglas de formación que permitan ambas en en el simbolismo*). *Para cualquier fórmula* E *de* $S_1$, *sea* $\mathrm{E}^\circ$ *la fórmula de* $S_2$ *obtenida a partir de* E *reemplazando simultáneamente cada parte de la forma* $\mathrm{F}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n, \mathrm{s})$, *donde* $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n, \mathrm{s}$ *son términos, por* $\mathrm{f}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n) = \mathrm{s}$. *Entonces*:

(VIa) $\vdash_1 \mathrm{E} \sim \mathrm{E}^{\circ\prime}$. (VIb) $\vdash_2 \mathrm{E} \sim \mathrm{E}'^{\circ}$.

(VIIa) $\{\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}\} \rightarrow \{\Gamma' \vdash_1 \mathrm{E}'\}$. (VIIb) $\{\Gamma \vdash_1 \mathrm{E}\} \rightarrow \{\Gamma^\circ \vdash_2 \mathrm{E}^\circ\}$.

(b) *Del mismo modo, cuando* $S_2$ *tiene axiomas adicionales particulares* $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_k$ *y esquemas axiomáticos* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, *y* $S_1$ *tiene a* $\mathrm{B}'_1, \ldots, \mathrm{B}'_k$ *como axiomas adicionales*

*particulares y esquemas axiomáticos adicionales* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$ *tales que, si* E *es un axioma de* $S_2$ *por* $\mathfrak{B}$ *(de* $S_1$ *por* $\mathfrak{A}$*), entonces* $\vdash_1 E'$ ($\vdash_2 E^\circ$). (Cfr. Hilbert-Bernays 1934 págs. 460 ss.).

De (VIa)–(VIIb) se sigue que:

(VIIIa) $\{\Gamma \vdash_2 E\} \equiv \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$. (VIIIb) $\{\Gamma \vdash_1 E\} \equiv \{\Gamma^\circ \vdash_2 E^\circ\}$.

DEMOSTRACIONES. (VIIIa). Recíprocamente a (VIIa): Si $\Gamma' \vdash_1 E'$, entonces por (VIIb), $\Gamma'^\circ \vdash_2 E'^\circ$; y, por tanto, por (VIb), $\Gamma \vdash_2 E$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 43. (a) Comenzamos con la versión en la cual la lógica es el cálculo de predicados con igualdad. Supóngase que $S_{3a}$ proviene de $S_2$ por la adición de F al simbolismo con $f(x_1, \ldots, x_n) = w \sim F(x_1, \ldots, x_n, w)$ como axioma. Considerando este axioma como una definición explícita de F, las adiciones son eliminables con $^\circ$ como la correlación, por el Ejemplo 1. Pero por el Lema 26, el axioma $f(x_1, \ldots, x_n) = w \sim F(x_1, \ldots, x_n, w)$ puede ser reemplazado en $S_{3a}$ por el par de axiomas $\exists ! w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ y $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ sin que cambie la relación de deducibilidad. Así, las relaciones de eliminación son también válidas en el sistema resultante $S_3$, esto es:

(Ib) Si E es una fórmula de $S_2$, $E^\circ$ es E.

(IIb) $\vdash_3 E \sim E^\circ$. (IIIb) $\{\Gamma \vdash_3 E\} \rightarrow \{\Gamma^\circ \vdash_2 E^\circ\}$.

Pero el Teorema 42 es aplicable a $S_3$ (en el lugar de $S_2$), y el resultado de la eliminación de f en $S_3$ es $S_1$. Así, utilizando la Observación 2 (b) si $'$ indica alguna otra transformación distinta de la transformación principal f-exenta:

(Ia) Si E es una fórmula de $S_1$, $\vdash_1 E' \sim E$.

(IIa) $\vdash_3 E \sim E'$. (IIIa) $\{\Gamma \vdash_3 E\} \rightarrow \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$.

Ahora se siguen (VIa)–(VIIb), p. ej.:

(VIa) Por (IIb) y (IIa), $\vdash_3 E \sim E^\circ \sim E^{\circ\prime}$. Pero $E \sim E^{\circ\prime}$ es una fórmula de $S_1$. De donde por (Va), $\vdash_1 E \sim E^{\circ\prime}$.

(VIIa) $\{\Gamma \vdash_2 E\} \rightarrow \{\Gamma \vdash_3 E\}$ (a fortiori) $\rightarrow \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$ (por (IIIa)).

La versión con los axiomas de igualdad se sigue por el Teorema 41 (b), o bien puede ser tratada directamente del siguiente modo. Los axiomas de igualdad para F son demostrables en $S_{3a}$. Para pasar a $S_3$, los añadimos primero como axiomas, luego reemplazamos (iii) por (i) y (ii), y finalmente omitimos los axiomas de igualdad para f (utilizando el Lema 27).

OBSERVACION 3. Cualesquiera dos transformaciones f-exentas $E^1$ y $E^2$ de E son equivalentes en $S_1$, por la demostración. Puesto que esta equivalencia está ya establecida en el sistema $S_1$ de (a) del teorema, ello basta para satisfacer las condiciones de (b), sea cual sea la manera adecuada de elegir las transformaciones.

OBSERVACION 4. Para la versión con axiomas de igualdad, y siendo F un símbolo predicativo: Es válida en su totalidad la discusión que comienza con el Teorema 42 y que incluye la definición de 'transformación', cuando, para ciertos valores de $i$ excluimos la formación de términos $f(t_1, \ldots, t_n)$ y fórmulas $F(t_1, \ldots, t_n, s)$

con $t_i$ para cualesquiera de esos valores de $i$ que contengan f, y omitimos los axiomas de igualdad para f y F para esos valores de $i$.

OBSERVACION 5. Con los axiomas de igualdad, en el Teorema 43 (b) los postulados adicionales pueden hacer redundantes en $S_2$ algunos de los $n$ axiomas de igualdad para f. ¿Son redundantes en $S_1$ los axiomas de igualdad correspondientes a F? Supóngase, de modo más particular, que para ciertos valores de $i$ existen demostraciones de los $i$-ésimos axiomas de igualdad para f a partir de los restantes postulados de $S_2$, en las cuales demostraciones no ocurren f-términos $f(t_1, ..., t_n)$ con $t_i$ para cualesquiera de esos valores de $i$ que contengan f. Entonces los axiomas de igualdad de F para esos valores de $i$ son redundantes en $S_1$, supuesto que (b) sea satisfecho cuando $'$ significa transformación principal f-exenta, o cualquier otra transformación f-exenta en el sentido modificado de la Observación 4. Porque entonces por la Observación 4, utilizando (VII) las transformaciones principales f-exentas de los axiomas de igualdad en cuestión para f son demostrables en el $S_1$ modificado, y por tanto lo son los correspondientes axiomas de igualdad para F.

EJEMPLO 11. (a) Sea $S_2$ el sistema total de teoría de números o el de Robinson (Lema 18b § 49). Por (b) del teorema, podemos reemplazar el símbolo de función $\cdot$ por un símbolo predicativo de la siguiente manera. Digamos que el nuevo símbolo predicativo es $\cdot$, escribiéndolo ante sus tres argumentos. Añadimos como nuevos axiomas

$$a=b \supset (\cdot (c, d, a) \supset \cdot (c, d, b)), \quad \exists ! c \cdot (a, b, c);$$

y si usamos transformaciones principales $\cdot$-exentas, cambiamos los Axiomas 20 y 21 en

$$\exists b [\cdot (a, 0, b) \& b=0], \quad \exists c [\cdot (a, b', c) \& \exists d [\cdot (a, b, d) \& c=d+a]],$$

respectivamente, pero estas expresiones pueden ser simplificadas así

$$\cdot (a, 0, 0), \quad \exists d [\cdot (a, b', d+a) \& \cdot (a, b, d)].$$

No es necesario añadir los otros dos axiomas de igualdad

$$a=b \supset (\cdot (a, c, d) \supset \cdot (b, c, d)), \quad a=b \supset (\cdot (c, a, d) \supset \cdot (c, b, d))$$

para $\cdot$ como símbolo predicativo, si $S_2$ es el sistema total de teoría de números, puesto que son de hecho demostrables en el sistema descrito (por Observación 5 con las demostraciones de los axiomas de igualdad para $\cdot$ como un símbolo de función § 38); pero si $S_2$ es el sistema de Robinson, los añadimos como axiomas en lugar de las fórmulas de *106 y *107. Por una segunda aplicación del teorema podemos reemplazar ulteriormente $+$. Al hacerlo así, si el Axioma 18 se cambia por su transformación principal $+$-exenta o $+(a, 0, a)$, $a=a$ será todavía demostrable (y seguirá siéndolo si 0 es reemplazado similarmente conforme a (b) según se indica más abajo). Por una tercera aplicación podemos reemplazar ulteriormente $'$. Al hacer así, cambiamos el esquema de inducción, digamos, en $A(0) \& \forall x (A(x) \supset \exists y [' (x, y) \& A(y)]) \supset A(x)$. Así obtenemos un sistema $S_1$ sin símbolos de función en el sentido ordinario, esto es, para $n > 0$ en relación a $S_2$ por (VIa)–(VIIIb), donde ahora $'$ y $^\circ$ denotan sucesivas eliminaciones de varios símbolos. (b) Si deseamos un sistema desprovisto también

de símbolos individuales, podemos aun reemplazar ulteriormente 0 por una aplicación con $n=0$, o podemos eliminar 0 antes de reemplazar $'$ (ejemplo siguiente).

EJEMPLO 12. Utilizando *137 y el Axioma 15, $0 = b \sim \forall a\,(a' \neq b)$ (que es de la forma (iii)) es demostrable. Este hecho puede ser utilizado para eliminar 0 por el Teorema 42 después de algunas transformaciones preliminares.

EJEMPLO 13. ELIMINABILIDAD DE UNA ESPECIE DEFINIDA DE VARIABLES. Sea $S_1$ el cálculo de predicados (digamos, bajo reglas de formación que usan símbolos individuales, de función y predicativos) con axiomas particulares y esquemas axiomáticos adicionales. Supóngase que para una cierta fórmula M(w) que contiene libre solamente a w, la fórmula $\exists w M(w)$ es demostrable en $S_1$. Supóngase que $S_2$ proviene de $S_1$ por adjuntarle una nueva especie de variables $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ admitiendo a éstas en la construcción de términos y fórmulas y en lo que respecta a las Reglas 9 y 12, imponiendo a la x de los Esquemas Axiomáticos 10 y 11 la restricción de ser una variable de la especie original, y añadiendo los tres esquemas axiomáticos siguientes, donde $\bar{x}$ es una variable de la nueva especie, $A(\bar{x})$ es una fórmula, y t es un término libre con respecto a $\bar{x}$ en $A(\bar{x})$ y con respecto a w en M(w).

$\overline{0}$. $M(\bar{x})$. $\overline{10}$. $M(t) \supset (\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(t))$. $\overline{11}$. $M(t) \supset (A(t) \supset \exists \bar{x} A(\bar{x}))$.

Dada cualquier fórmula E de $S_2$, sea $E^\dagger$ el resultado de E al reemplazar cada parte de la forma $\forall \bar{x} A(\bar{x})$, por una de la forma $\forall x\,[M(x) \supset A(x)]$, y de $\exists \bar{x} A(\bar{x})$ por $\exists x\,[M(x)\ \&\ A(x)]$, donde x es una variable de la especie original que no ocurre en $A(\bar{x})$ o M(w); entonces provenga $E^\ddagger$ de $E^\dagger$ anteponiendo a modo de prefijo $M(\bar{y}_1)\ \&\ \ldots\ \&\ M(\bar{y}_m) \supset$ donde $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ son exactamente las distintas variables de la nueva especie que ocurren libres en E (y por tanto, en $E^\dagger$); y provenga $E'$ de $E^\ddagger$ sustituyendo $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ por distintas variables $y_1, \ldots, y_m$ de la especie original no ocurrentes en $E^\ddagger$ (y por tanto, tampoco en E). Entonces (I)–(III) valen con las siguientes modificaciones, suponiendo que, con respecto a cada esquema axiomático adicional de $S_1$, para cada axioma A de $S_2$ de él obtenido, $A'$ sea demostrable en $S_1$. Para $m > 0$, (II) se convierte en: $E^{y_1 \cdots y_m}_{2} \dashv\vdash^{\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_m}_{2} E'$. En (III), si se mantienen constantes las variables correspondientes para las correspondientes fórmulas supuestas, habría que sustituir cada $\bar{y}$ por la misma y en E, y cada $\Gamma$ en donde $\bar{y}$ se mantenga constante (así, en este caso, la operación $'$ no está especificada de suyo para cada fórmula singular). Antes de tratar (II), los Teoremas 1, 2 y 14 pueden ser apropiadamente extendidos a $S_2$. Podemos usar el Lema 8a § 24 para reducir (III) al caso correspondiente con $\Gamma$ vacía. Para tratar esta cuestión, escríbase $E^\dagger$ como "$E^\dagger(\bar{y}, \ldots, \bar{y}_m)$". Podemos demostrar por inducción que si $\vdash_2 E$, entonces $M(y_1), \ldots, M(y_m) \vdash_1 E^\dagger(y_1, \ldots, y_m)$, manteniendo constantes $y_1, \ldots, y_m$. (Para la Regla 2, pongamos p. ej. que $A^\dagger$ contiene solamente una nueva variable $\bar{y}$, escribiendo al respecto "$A^\dagger(\bar{y})$", y que $B^\dagger$ no contiene ninguna. Por hip. de ind., $M(y) \vdash_1 A^\dagger(y)$ y $M(y) \vdash_1 A^\dagger(y) \supset B^\dagger$. Por la Regla 2, $M(y) \vdash_1 B^\dagger$. Por $\exists$-elim. y *74, $\exists w M(w) \vdash_1 B^\dagger$. Pero $\vdash_1 \exists w M(w)$. Por tanto $\vdash_1 B^\dagger$).– De modo similar, introduciendo varias especies de variables sucesivamente.

§ 75. **Sistemas axiomáticos, paradoja de Skolem, la secuencia de los números naturales.** Supóngase que estamos tratando un sistema axiomático (§ 8) que

tenga como nociones primitivas o indefinidas un conjunto o dominio $D$ de individuos, ciertos individuos $z_1, ..., z_q$ de $D$, y ciertos predicados $P_1, ..., P_s$ sobre $D$. Llamamos *elemental* a un axioma del sistema que pueda ser expresado por una fórmula en el simbolismo del cálculo de predicados (es decir, el cálculo de predicados restringido o de primer orden, cfr. § 37) con símbolos individuales $e_1, ..., e_q$ que expresen $z_1, ..., z_q$ y símbolos predicativos $Pr_1, ..., Pr_s$ para expresar $P_1, ..., P_s$, respectivamente. Si cada axioma es elemental, y los axiomas son finitos en número, llamamos al sistema axiomático *elemental* o de *primer orden.*

Ahora bien, podemos elegir siempre fórmulas cerradas para expresar axiomas elementales, ya que bajo la interpretación de generalidad cualquier fórmula es sinónima con su clausura (cfr. final de § 32). Es más, ya que los axiomas de un sistema elemental son finitos en número, podemos formar la conjunción F ($e_1, ..., e_q$, $Pr_1, ..., Pr_s$) de las fórmulas cerradas que expresen los axiomas. Finalmente, cambiando los símbolos individuales $e_1, ..., e_q$ por las distintas variables respectivas $z_1, ..., z_q$, que no ocurran en F ($e_1, ..., e_q, Pr_1, ..., Pr_s$), y los símbolos predicativos $Pr_1, ..., Pr_s$ por letras predicativas distintas $P_1, ..., P_s$, obtenemos una fórmula de letras predicativas F($z_1, ..., z_q, P_1, ..., P_s$) o, brevemente, F. Una ilustración simple (con $q = 0, s = 1$) ha sido ya dada en § 37.

Expresar así el sistema axiomático por una fórmula de letras predicativas F ayuda a subrayar el punto de vista de las axiomáticas formales (§ 8), desde el cual el conjunto $D$, los individuos $z_1, ..., z_q$ y los predicados $P_1, ..., P_s$ de la teoría axiomática están indeterminados, excepto cuando los axiomas los caracterizan. Puede considerarse que toda fórmula de letras predicativas expresa un sistema axiomático con las variables libres y letras predicativas que en ella ocurran representando los individuos y predicados no definidos.

Cuando interpretamos los símbolos lógicos clásicamente, y tratamos los predicados "extensionalmente" como simples funciones lógicas, las nociones de lógica de predicados de teoría de conjuntos (§ 37) se tornan aplicables a la discusión de sistemas axiomáticos. Decir que los axiomas son satisfechos (en el sentido intuitivo, § 8) por algún sistema no-vacío de objetos (que, asimismo, expresábamos en § 8 diciendo que los axiomas eran 'no-vacuos') significa ahora exactamente que la fórmula F es satisfacible (en el sentido de teoría de conjuntos) en algún dominio no-vacío. Fórmulas de letras predicativas que sean satisfacibles, pero no válidas, son las que interesan como sistemas axiomáticos. Una fórmula válida de letras predicativas no restringe o caracteriza los individuos y predicados expresados por sus variables libres y letras predicativas; sino que, más bien, expresa una ley lógica aplicable a todas las elecciones de aquellos individuos y predicados en cualquier dominio no-vacío.

En axiomáticas formales, sin el paso ulterior de formalizar el proceso de deducción lógica a fin de obtener un sistema formal (§ 15), los teoremas son deducidos de los axiomas sobre la base del significado de los símbolos lógicos. Lo que significa sobre esta base que una proposición sea un teorema, puede ser expresado en la lógica de predicados de la teoría de conjuntos del modo que sigue. Considérese cualquier proposición de la teoría axiomática que sea expresable por una fórmula de letras predicativas en $P_1, ..., P_s$. Podemos elegir siempre una fórmula que no contenga libre ninguna variable diferente de $z_1, ..., z_q$, y que contenga sólo libres a éstas. Ahora bien, cualquier fórmula tal B ($z_1, ..., z_q, P_1, ..., P_s$), o brevemente, B, expresa una proposición verdadera o teorema de la teoría axiomática, precisamente si toda asignación de individuos $z_1, ..., z_q$ de algún dominio no vacío $D$ a $z_1, ..., z_q$ y

de predicados $P_1, ..., P_s$ sobre $D$ a $P_1, ..., P_s$, que satisfaga F asimismo satisface B. En vista de la tabla de evaluación para $\supset$ § 28, esto es equivalente a decir que la fórmula $F \supset B$ sería válida en todo dominio no-vacío.

Supóngase ahora que la teoría axiomática se formaliza (§ 15) adoptando las reglas deductivas del cálculo de predicados como los medios de deducir teoremas, bajo el requisito de que las variables $z_1, ..., z_q$ se mantengan constantes; o sea, ahora decimos en la teoría de la demostración que B expresa un teorema, si en el cálculo de predicados $F \vdash B$ con $z_1, ..., z_q$ mantenidas constantes. (Por Observaciones 1 y 2 (a) § 34, podemos encontrar siempre una deducción de B a partir de F en que no ocurra ninguna letra predicativa más que $P_1, ..., P_s$, y sólo ocurran libres $z_1, ..., z_q$).

Por las $\supset$-reglas, advirtiendo que, ya que F no contiene ninguna variable libre excepto $z_1, ..., z_q$, no es variada ninguna variable, esto es equivalente a decir que $\vdash F \supset B$ en el cálculo de predicados.

Nos hallamos ahora en situación de establecer que la formalización de la deducción para teorías axiomáticas elementales por el cálculo de predicados es al mismo tiempor correcta (o consistente) y adecuada (o completa), esto es, el cálculo de predicados permite la deducción a partir de F de sólo aquellas fórmulas y de todas las fórmulas que expresen proposiciones que sean verdaderas de cualquier sistema que satisfaga los axiomas. Para $\{\vdash F \supset B\} \equiv \{F \supset B$ es válida en todo dominio no-vacío$\}$, por Teorema 21 § 37 y Corolario 1 Teorema 34 § 72.

La cuestión de si los teoremas son consistentes con los axiomas (acabada de responder afirmativamente) está por supuesto separada de la cuestión de si los axiomas mismos son consistentes. Anteriormente a la teoría de la demostración de Hilbert o metamatemática, las demostraciones de consistencia de un sistema o teoría axiomática se hicieron exhibiendo un modelo para la teoría (§ 14). La propiedad de consistencia demostrada inmediatamente en este caso es la satisfacibilidad de F en algún dominio no-vacío.

Dimos un argumento heurístico en §14 sobre el hecho de que esta propiedad implica consistencia en el sentido de no-existencia en la teoría de una contradicción (un teorema que niegue otro) deducible de los axiomas. La conversa de que, a partir de cualquier sistema de axiomas insatisfacible debe seguirse necesariamente una contradicción por un número finito de pasos lógicos no fue aclarada entonces por medio alguno.

Sólo con el paso de formalizar la deducción, dado por los formalistas modernos, la consistencia en el sentido de no-deducibilidad de una contradicción se constituye en objeto de discusión exacta. Ahora tenemos como propiedad de consistencia que, para ninguna fórmula A, al mismo tiempo $F \vdash A$ y $F \vdash \neg A$ con $z_1, ..., z_q$ mantenidas constantes.

Por las $\neg$-reglas § 23 (ya que F sólo contiene libres $z_1, ..., z_q$), esta propiedad es equivalente a 'no $\vdash \neg F$', es decir, a 'F es irrefutable'. La transformación formalista del problema de la consistencia puede ser descrita entonces (para el caso de sistemas axiomáticos elementales) como el reemplazo de satisfacibilidad por irrefutabilidad.

Por el Teorema 21 (que ahora ocupa el lugar del razonamiento dado en § 14) y el teorema de completud de Gödel (Teorema 34), satisfacibilidad e irrefutabilidad son equivalentes.

El propósito de la transformación formalista en las nociones de deducibilidad y consistencia es obtener nociones que sean finitistas. Una reducción de lo no-enume-

rable a lo enumerablemente infinito es realizada, cuando validez y satisfacibilidad se refieren a la totalidad de funciones lógicas, que es no-enumerable, mientras que la demostrabilidad e irrefutabilidad, sus equivalentes en la teoría de la demostración, se refieren sólo al infinito enumerable de las demostraciones formales. En metamatemática el razonamiento con las nociones es asimismo finitista. Aunque la demostración de equivalencia, tal como es dada por el teorema de completud de Gödel, no puede pertenecer a la metamatemática, es significativo para esta última que las nociones de la teoría de conjuntos sean realmente equivalentes a las de la teoría de la demostración, cuando se razona sobre el plano no-finitista al que las nociones de la teoría de conjuntos pertenecen.

Vemos ahora que el problema de la decisión para la demostrabilidad en el cálculo puro de predicados incluye el problema de la decisión para la demostrabilidad en toda teoría axiomática que tenga un sistema axiomático elemental (cuestionando si una cierta fórmula de letras predicativas $F \supset B$ es demostrable), y asimismo el problema de la decisión de si cualquier sistema axiomático elemental dado es consistente (cuestionando si $\neg F$ es indemostrable).

Los sistemas axiomáticos usados en matemáticas a menudo emplean $=$ en el papel de un término lógico u ordinario, que debe ser entendido de antemano, más bien que como uno de los predicados indefinidos que los axiomas caracterizan. Las observaciones precedentes se aplicarán, si suministramos primero algunos axiomas adicionales para la igualdad, formalizados como $\mathrm{Eq}(=, \mathrm{Pr}_1, \ldots, \mathrm{Pr}_s)$ o $\mathrm{Eq}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s)$; o podemos, en su lugar, formalizar los axiomas, tal como se encuentren, por una fórmula de igualdad y de letras predicativas, y efectuar la deducción a partir de los axiomas por el cálculo de predicados con igualdad, y usar luego la extensión del teorema de completud de Gödel para éste. Los dos métodos dan resultados que son equivalentes vía Lema 24 (a) y Teorema 41 (c) § 73, aunque desde el punto de vista de la teoría de conjuntos el primero no restringe las interpretaciones que satisfacen los axiomas a aquéllas en que $Q$ es la igualdad, sino que permite asimismo que $Q$ sea una relación de equivalencia.

EJEMPLO 1. El sistema axiomático L1–L3 para orden lineal (final de § 8) es expresado por la fórmula de igualdad y letras predicativas siguiente (llamémosla "$\mathrm{F}(=, \mathscr{A})$") con $\mathscr{A}$ expresando $<$:

$$\forall a \forall b \forall c\, [\mathscr{A}(a, b) \,\&\, \mathscr{A}(b, c) \supset \mathscr{A}(a, c)] \,\&\, \forall a \forall b\, [\neg (\mathscr{A}(a, b) \,\&\, a = b) \,\&\, \neg (\mathscr{A}(a, b) \,\&\, \mathscr{A}(b, a)) \,\&\, \neg (a = b \,\&\, \mathscr{A}(b, a))] \,\&\, \forall a \forall b\, [\mathscr{A}(a, b) \vee a = b \vee \mathscr{A}(b, a)].$$

El mismo sistema axiomático es expresado por la fórmula de letras predicativas $\mathrm{Eq}(\mathscr{B}, \mathscr{A}) \,\&\, \mathrm{F}(\mathscr{B}, \mathscr{A}))$, con $\mathscr{B}$ expresando $=$ (cfr. Ejemplo 1 § 73).

Asimismo nuestras observaciones se aplican indirectamente a sistemas axiomáticos que tengan funciones $f_1, \ldots, f_r$ entre sus nociones primitivas, en cuanto que con la ayuda de $=$ éstas pueden ser reemplazadas por los predicados representantes de las funciones, como se discutió desde el punto de vista de la teoría de la demostración en Teorema 43 § 74.

Sistemas axiomáticos elementales ocurren frecuentemente en matemáticas, si usamos el término 'elemental' más ampliamente, a fin de que incluya sistemas que pueden ser transformados por recursos bien conocidos, de modo que resulten elementales en el sentido formulado al comienzo de la sección. Por ejemplo, los

axiomas para grupos, y axiomas de Hilbert para la geometría con el axioma de continuidad omitido, son elementales en el sentido amplio. (En el primero, la operación de grupo puede ser reemplazada por su predicado representante, usando $=$; y en ambos, axiomas para $=$ pueden ser suministrados. Es elaborado un ejemplo en Hilbert-Bernays 1934 págs. 3-8, 380-381).

La discusión precedente para el caso de un sistema axiomático elemental puede tener una paralela en el caso de un infinito enumerable de axiomas elementales, como sigue. Sean $F_0$, $F_1$, $F_2$, ... fórmulas de letras predicativas que expresen los axiomas respectivos y que sólo contengan libres las variables $z_0$, $z_1$, $z_2$, ... que representan los individuos indefinidos de la teoría axiomática. Ahora {B es un "teorema" de teoría de conjuntos} $\equiv$ {toda asignación que satisfaga a todas las $F_0$, $F_1$, $F_2$, ... satisface B} $\equiv$ {para toda asignación, una de las B, $\neg F_0$, $\neg F_1$, $\neg F_2$, ... es t} $\equiv$ {alguna disyunción de un número finito de B, $\neg F_0$, $\neg F_1$, $\neg F_2$, ... es demostrable} (por Teorema 21 y Corolario 1 Teorema 37) $\equiv$ {$\vdash F \supset B$ para alguna conjunción F de un número finito de $F_0$, $F_1$, $F_2$, ...} (usando *62, *59) $\equiv$ {$F_0, F_1, F_2, \ldots \vdash B$ con $z_0$, $z_1$, $z_2$, ... mantenidas constantes} $\equiv$ {B es un "teorema" de la teoría de la demostración}. Similarmente {los axiomas son "consistentes" en teoría de conjuntos} $\equiv$ {$F_0, F_1, F_2, \ldots$ son juntamente satisfacibles} $\equiv$ {toda conjunción F de un número finito de $F_0$, $F_1$, $F_2$, ... es irrefutable} (por Teoremas 21 y 37) $\equiv$ {para todo A, no ambos $F_0, F_1, F_2, \ldots \vdash A$ y $F_0, F_1, F_2, \ldots \vdash \neg A$, con $z_0$, $z_1$, $z_2$, ... mantenidas constantes} $\equiv$ {los axiomas son "consistentes" en teoría de la demostración}. Como antes, las nociones de teoría de conjuntos y de teoría de la demostración son equivalentes. Pero falla el método anterior de reducir los problemas de la decisión para deducibilidad a partir de los axiomas y para consistencia de los axiomas al de la decisión para demostrabilidad en el cálculo de predicados, ya que ahora hay cuantificaciones con respecto a las conjunciones finitas F de $F_0, F_1, F_2, \ldots$ (no obstante cfr. Observación 3 § 76).

Usando las formas con asterisco de los Teoremas 21 y 37 (cfr. Teorema 39 § 73), estos resultados se extienden al caso en que $=$ es usada como una noción lógica, y los axiomas son expresados por fórmulas de igualdad y de letras predicativas.

TEORIA AXIOMATICA DE CONJUNTOS. Los sistemas axiomáticos para teoría de conjuntos de von Neumann 1925, de Bernays 1937-48 y de Gödel 1940* son elementales (en el sentido amplio).

Según son establecidos los axiomas de Gödel, hay tres nociones primitivas, $\mathfrak{Cls}$ (ser una clase), $\mathfrak{M}$ (ser un conjunto) y $\in$ (pertenecer a), además de las cuales $=$ es usada como una noción lógica. Todos los conjuntos son clases, y ningún otro objeto es considerado; de modo que las clases constituyen el dominio. El sistema axiomático puede entonces ser expresado por una fórmula de igualdad y de letras predicativas $F(=, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ donde $\mathcal{A}(a)$ y $\mathcal{B}(a, b)$ expresan $\mathfrak{M}(a)$ y $a \in b$, respectivamente, o por una fórmula de letras predicativas $\mathrm{Eq}(C, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \& F(C, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ donde $C(a, b)$ expresa $a = b$.

Este sistema axiomático es extremadamente poderoso. A partir de él, con definiciones apropiadas, el análisis clásico usual y gran parte de la teoría general de conjuntos pueden ser deducidas. En particular, es postulada (por el axioma de infinito) la existencia de cualquier conjunto infinito, y asimismo la existencia de cualquier conjunto de un conjunto que incluya los subconjuntos de este conjunto; así es deducible vía Teorema de Cantor (Teorema C § 5) que existe un conjunto infinito no-enumerable de conjuntos.

Pero por el Teorema de Löwenheim (Corolario 2 Teorema 34*, cfr. Teorema 39), si la fórmula $F(=, \mathcal{A}, \mathcal{B})$, que expresa los axiomas, es satisfacible en general, como parece ser a partir de su interpretación presupuesta por teoría de conjuntos, es satisfacible en un dominio finito o enumerablemente infinito. (Un examen de los axiomas regula el caso de un dominio finito). Entonces podemos interpretar las nociones primitivas de modo que sólo haya un infinito enumerable de conjuntos y los axiomas sean todos verdaderos (esto es, un modelo enumerable existe para teoría axiomática de conjuntos, con = en su significado usual), aun cuando un teorema en la teoría asevere que hay un infinito no enumerable de conjuntos. Se trata de la "paradoja" de Skolem (1922-23).

Por la extensión de Skolem del teorema de Löwenheim al caso de satisfacibilidad conjunta de un infinito enumerable de fórmulas $F_0$, $F_1$, $F_2$, ... (Corolario 2 Teorema 37*), la "paradoja" se aplica igualmente a axiomatizaciones de la teoría de conjuntos que usen un número infinito de axiomas, tales como las de Fraenkel 1922 y de Skolem 1922-23.

Alguna luz dan sobre la "paradoja" dos reflexiones. Sólo son definibles dentro de la teoría axiomática aquellos subconjuntos particulares de un conjunto dado que puedan ser construidos por operaciones, o separados del conjunto por propiedades (es decir, predicados), disponibles en la teoría. Las operaciones básicas para construir conjuntos (o procesos para construir predicados), proporcionadas por los axiomas, son finitas o, a lo sumo, enumerablemente infinitas en número. Su iteración da, entonces, los medios para definir sólo un infinito enumerable de subconjuntos de un conjunto dado. Esto explica la posibilidad de interpretar el sistema axiomático, es decir, de satisfacer la(s) fórmula(s) que expresen los axiomas, en un dominio enumerable.

Por otra parte, enumerar un conjunto es dar una correspondencia 1–1 del conjunto con un conjunto enumerable particular, digamos el conjunto de los números naturales (§ 1). Una correspondencia 1–1 puede ser considerada como el conjunto de los pares correspondientes.

Así puede ser posible para los subconjuntos de un conjunto infinito dado, definibles dentro de la teoría, ser enumerables sin la teoría, y, con todo, ser no-enumerables dentro de la teoría, porque ningún conjunto de enumeración de pares correspondientes se da entre los conjuntos definibles dentro de la teoría. La construcción del conjunto de enumeración de pares es llevada a cabo teniendo en cuenta la estructura del sistema axiomático como un todo, y esta construcción no es posible dentro de la teoría, es decir, usando sólo las operaciones proporcionadas por los axiomas.

La situación es similar a la del teorema de incompletud de Gödel o teorema de indecidibilidad (Teorema 28 § 42), donde, si suponemos que el sistema formal de teoría de números es consistente, podemos reconocer que $A_p(\boldsymbol{p})$ es verdadera teniendo en cuenta la estructura de este sistema como un todo, aunque no podemos reconocer la verdad de $A_p(\boldsymbol{p})$ usando sólo los principios de inferencia formalizados dentro de este sistema, esto es, no $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$.

Aunque haya esta "explicación", la "paradoja" nos enfrenta todavía a la alternativa siguiente. O bien debemos mantener que los conceptos de un subconjunto arbitrario de un conjunto dado, y de un conjunto no-enumerable, son conceptos a priori que eluden una caracterización por cualquier sistema finito o enumerablemente infinito de axiomas elementales; o, además (si nos adherimos a lo que pueda ser explícitamente caracterizado por axiomas elementales, como bien podemos desear a consecuencia de las paradojas de teoría de conjuntos §11), debemos acep-

tar los conceptos de teoría de conjuntos, en particular el de no-enumerabilidad, como relativos, de modo que un conjunto que sea no-enumerable en una axiomatización dada, puede llegar a ser enumerable en otra, y no exista no-enumerabilidad absoluta alguna. Esta relativización de la teoría de conjuntos fue propuesta por Skolem (1922-3, 1929, 1930-1).

El teorema de Löwenheim, ya que conduce a la "paradoja" de Skolem, puede ser considerado como el primero de los modernos teoremas de incompletud. Para discusión ulterior, véase Skolem 1938.

ARITMETICA AXIOMATICA. El Grupo B de Postulados de nuestro sistema formal de teoría de números proporciona un ejemplo de un sistema axiomático para la teoría de los números naturales, que consta de un infinito efectivamente enumerable de axiomas elementales, es decir, las fórmulas que expresan los axiomas son efectivamente enumerables (cfr. Teorema 38 § 72). Las funciones son, por supuesto, reemplazables por sus predicados representantes. Ryll-Nardzewski 1952* muestra que ningún subconjunto finito de estos axiomas bastaría para la deducción de la misma clase de teoremas.

Otra cuestión es si estos axiomas caracterizan completamente la secuencia de los números naturales. La teoría de completud de Gödel para el cálculo de predicados nos proporciona una demostración del teorema siguiente, que fue originalmente obtenido, por otro camino, por Skolem (1933, 1934; cfr. 1938).

Consideraremos axiomas para la secuencia de los números naturales (llámese el conjunto de ellos $N$), usando como nociones primitivas el individuo 0 y el predicado $a'=b$, es decir, en la $\lambda$-notación (§ 10) $\lambda ab\, a' = b$, y quizá otras nociones primitivas. Los axiomas serán expresables por fórmulas de igualdad y de letras predicativas, con z expresando 0 y $P_0$ (a, b) expresando $a' = b$.

En la discusión de asignaciones a las variables libres y letras predicativas de cualquier fórmula tal, represéntese el dominio por "$D$", el individuo asignado a z por "$z$" y el predicado asignado a $P_0$ (a, b) por "$P_0(a, b)$". Entonces $(D, z, P_0(a, b))$ es un sistema matemático en el sentido de § 8, que consta de un conjunto o dominio, un miembro del conjunto, y un predicado binario sobre el conjunto.

TEOREMA 44$^C$. *Cualquier clase finita o infinita, efectivamente enumerable, de fórmulas de igualdad y de letras predicativas, que pueda ser juntamente satisfecha de modo que* $(D, z, P_0(a, b))$ *es* $(N, 0, a' = b)$ *pueda asimismo ser juntamente satisfecha* $(\text{con } 0 < \overline{\overline{D}} \leq \aleph_0)$, *de modo que* $(D, z, P_0(a, b))$ *no sea isomórfica con* $(N, 0, a' = b)$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis, hay una asignación satisfaciente para las fórmulas dadas juntamente en la que el dominio $D$ es $N$, z tiene el valor 0, y $P_0(a, b)$ tiene el valor $a' = b$.

Sean $P_1$, $P_2$ y $P_3$ otras letras predicativas distintas, que o bien no ocurran en las fórmulas dadas, o tengan los valores respectivos $a + b = c$, $a \cdot b = c$ y $(x)\,(Ey)\,T_2(a, a, x, y)$ en la asignación dada. Extendemos las clases dadas de fórmulas añadiendo siete fórmulas (si no están ya incluidas) que sean satisfechas cuando la asignación dada sea extendida (si fuera necesario) asignando a $P_1$, $P_2$ y $P_3$ los valores acabados de mencionar.

Añadimos cuatro fórmulas cerradas, digamos

(a) $\forall a P_1(a, z, a)$, $\forall a \forall b \exists c \exists d \exists e [P_0(b, c) \,\&\, P_1(a, c, d) \,\&\, P_1(a, b, e) \,\&\, P_0(e, d)]$,
$\forall a P_2(a, z, z)$, $\forall a \forall b \exists c \exists d \exists e [P_0(b, c) \,\&\, P_2(a, c, d) \,\&\, P_2(a, b, e) \,\&\, P_1(e, a, d)]$

(cfr. Ejemplo 11 (a) § 74), que bajo la asignación descrita expresen las ecuaciones de recursión para $a + b$ y $a \cdot b$, como parafraseadas en términos de los predicados representantes $a + b = c$ y $a \cdot b = c$, junto con las dos fórmulas

(b) $\forall a \forall b \exists !\, cP_1(a, b, c)$, $\forall a \forall b \exists !\, cP_2(a, b, c)$,

que expresan que $a + b = c$ y $a \cdot b = c$ son predicados representantes. Ya que $T_2(a, b, x, y)$ es recursiva primitiva por el Corolario del Teorema I §49 es aritmética (§ 48), y así (reemplazando $'$, $+$, $\cdot$ por sus predicados representantes) podemos encontrar una fórmula literal $T_2(a, b, x, y)$ en $=, P_0, P_1, P_2$ que la exprese bajo la asignación descrita. Entonces añadimos la fórmula

(c) $$\forall a (P_3(a) \sim \forall x \exists y T_2(a, a, x, y)).$$

Sean las fórmulas de la clase resultante (ampliada) $F_0, F_1, F_2, \ldots$ Como en la demostración del teorema de Löwenheim (Corolario 2 Teorema 37*), la hipótesis del Teorema 37* es satisfecha; y usamos el Teorema 37* y el 40 para obtener otra asignación satisfaciente para $F_0, F_1, F_2, \ldots$ juntamente. Sean $D^*$, $z^*$, $P_0^*$, $P_1^*$, $P_2^*$, $P_3^*$ respectivamente el dominio y los valores de z, $P_0, P_1, P_2, P_3$ en él.

Supóngase (para reductio ad absurdum) que $(D^*, z^*, P_0^*(a^*, b^*))$ es isomórfica (§ 8) a $(N, 0, a' = b)$, es decir, $D^*$ es infinito y puede ser enumerado como $s_0, s_1, s_2, \ldots$ de modo que $z^* = s_0$ y $P_0^*(s_a, s_b) \equiv a' = b$.

Entonces por Teorema 40,

(i) $$P_3^*(s_a) \equiv (Ex)(y) R_3^*(a, x, y)$$

para alguna recursiva primitiva $R_3^*$.

En §43 razonábamos sobre el hecho de que, cuando las variables tienen como rango los números naturales, y 0 y $'$ tienen sus significados usuales, las ecuaciones de recursión para $+$ y $\cdot$ tienen las funciones usuales $+$ y $\cdot$ como su única solución. Ya que las fórmulas (a) y (b) son satisfechas, este razonamiento (con reajustes menores a fin de acoplar el uso de predicados representantes en lugar de funciones) se aplica ahora para mostrar que $P_1^*(s_a, s_b, s_c) \equiv a + b = c$ y $P_2^*(s_a, s_b, s_c) \equiv a \cdot b = c$. Entonces nuestra demostración del Teorema I § 49 muestra simultáneamente que la fórmula $T_2$ (a, b, x, y) expresa ahora un predicado $T_2^*(a^*, b^*, x^*, y^*)$ tal que $T_2^*(s_a, s_b, s_x, s_y) \equiv T_2(a, b, x, y)$. De aquí que $\forall x \exists y T_2$ (a, a, x, y) exprese un predicado $T^*(a^*)$ tal que

(ii) $$T^*(s_a) \equiv (x)(Ey) T_2(a, a, x, y).$$

Por las reglas de evaluación para $\sim$ (Ejemplo 1 § 28) y $\forall$, ya que (c) es satisfecho,

(iii) $$P_3^*(a^*) \equiv T^*(a^*).$$

Combinando (i)–(iii), $(Ex)(y) R_3^*(a, x, y) \equiv (x)(Ey) T_2(a, a, x, y)$. Pero por Teorema V (16) § 57, el predicado $(x)(Ey) T_2(a, a, x, y)$ no es expresable en la otra forma de 2-cuantificadores; para un cierto número $g$,

$$(Ex)(y) R_3^*(g, x, y) \not\equiv (x)(Ey) T_2(g, g, x, y).$$

Por reductio ab adsurdum $(D^*, z^*, P_0^*(a^*, b^*))$, no es isomórfica a $(N, 0, a' = b)$.

DISCUSION. Por el teorema, ningún conjunto finito o infinito, efectivamente enumerable, de axiomas elementales puede caracterizar la secuencia de los números naturales 0, 1, 2, ..., $a$, $a'$, ... Cualquier conjunto tal, que sea verdadero para la secuencia de los números naturales, asimismo debe ser verdadero bajo otra interpretación. Establecimos el teorema para la secuencia de los números naturales como un sistema de la forma ($N$, 0, $a' = b$), pero por la reemplazabilidad de $a'$ por $a' = b$ se aplica asimismo a la secuencia de los números naturales como un sistema de la forma ($N$, 0, $'$). En particular, los axiomas del Grupo B de Postulados de nuestro sistema formal de teoría de números (§ 19) admiten una interpretación (usando los símbolos lógicos e $=$ en sus significados usuales) diferente de la pretendida.

Esta incompletud del Grupo B de Postulados como una caracterización de la secuencia de los números naturales se puede entender, cuando se compara el quinto axioma de Peano (el principio de inducción matemática, § 7) con el Esquema Axiomático 13. El quinto axioma de Peano asevera que

$$(I) \qquad A(0) \,\&\, (x)(A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow (x)\, A(x)$$

vale para todos los predicados $A(x)$ de teoría de números. Estos predicados constituyen una totalidad no-enumerable. Pero el haz de axiomas proporcionados por el Esquema Axiomático 13 sólo expresa que (I) vale para aquellos predicados $A(x)$ que sean expresables por fórmulas $\mathrm{A}(x)$ del sistema, es decir, sólo para un infinito enumerable de predicados. El quinto axioma de Peano no es elemental. Podemos expresarlo en el simbolismo del cálculo de predicados de segundo orden (§ 37), usando un cuantificador de generalidad con una variable predicativa $\mathcal{A}$, así:

$$\forall \mathcal{A}[\mathcal{A}(0) \,\&\, \forall x\,(\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')) \supset \forall x\, \mathcal{A}(x)].$$

Estas ideas tienen una conexión con el teorema de Gödel sobre proposiciones formalmente indecidibles (Teorema 28 ó 29 § 42).

Puede pensarse que la fórmula $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ o $\mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ (que es verdadera pero indemostrable, si el sistema de teoría de números es simplemente consistente) expresa una proposición que puede ser "demostrada" a partir de los axiomas de Peano, pero sólo haciendo uso de la inducción con algún predicado de inducción $A(x)$ que no sea expresable en el sistema bajo la interpretación pretendida. (Esta sugerencia recibirá confirmación más tarde; cfr. final de § 79, reparando en (II) § 42).

La indemostrabilidad de $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ puede llegar a entenderse asimismo a partir del resultado de Skolem (Teorema 44), sobre la base de que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$, aunque sea verdadera para los números naturales, es falsa bajo una de las otras interpretaciones que satisfagan los axiomas. Entonces la indecibilidad de $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ en el formalismo de la teoría de números parece ser un fenómeno del mismo tipo que la imposibilidad de demostrar o bien el postulado de las paralelas de Euclides o su negación a partir de los demás axiomas de la geometría (§ 8). Los axiomas dados no son categóricos.

En realidad, inversamente, como arriba observábamos (usando Corolario 1 Teorema 37*), una fórmula es demostrable, si es verdadera bajo todas las interpretaciones que hagan verdaderos los axiomas. Así la conocida indemostrabilidad de $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ torna absurdo que $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ sea verdadera bajo todas las interpretaciones que satisfagan los axiomas. Así, los teoremas 28 y 37* de Gödel proporcionan otra demostración del Teorema 44 para el caso en que la clase de fórmulas para el Teorema 44 sea el Grupo B de Postulados de nuestro sistema formal (restablecido

como fórmulas de igualdad y de letras predicativas). Pero (como arriba observábamos, usando Teorema 21*), si cualesquiera clases enumerables de fórmulas de igualdad y de letras predicativas son juntamente satisfacibles, el sistema formal obtenido adjuntándolas como axiomas al cálculo de predicados con igualdad es (simplemente) consistente. Así, dada cualquier clase de fórmulas para el Teorema 44, adjuntando el Grupo B de Postulados y llevando a cabo la demostración del Teorema 28 en el sistema resultante (o usando Teorema XIII Parte III §60), obtenemos el Teorema 44 en general.

Mostowski 1949 da un ejemplo interesante (sugerido por la "paradoja" de Skolem) de una proposición en teoría axiomática de conjuntos, que demostró que era indecible mostrando que era verdadera bajo una interpretación y falsa bajo otra. Kreisel 1950 trata problemas similares.

La demostración del Teorema 44 que dimos primero, y la basada sobre el Teorema 28 (o XIII), son establecidas para el caso de un sistema axiomático elemental o un sistema axiomático que tenga un infinito efectivamente enumerable de axiomas elementales. La demostración de Skolem no restringe la enumeración de los axiomas a la efectividad. La generalidad adicional no es esencial, cuando estamos considerando el teorema como un teorema de incompletud para axiomáticas formales desde el punto de vista de que la finalidad principal de la axiomatización es hacer explícitos los supuestos de la teoría.

OBSERVACION 1. Nuestra (primera) demostración del Teorema 44 puede ser modificada de modo que asegure una generalidad adicional. Supóngase ahora que las clases de las fórmulas para el Teorema 44 es simplemente *aritmética*, en el sentido de que, bajo una numeración de Gödel establecida por los métodos de §§ 52 y 56, el predicado '$x$ es el número de Gödel de una fórmula de la clase', llamémoslo "$C(x)$", es aritmético. Entonces por Teorema VII (d) § 57, $C(x)$ es expresable en una de las formas del Teorema V, digamos una forma de $q$-cuantificadores. Refiérase, similarmente, $B(x)$ a la clase dada de fórmulas extendidas añadiendo alguna lista finita (como arriba añadíamos las siete (a)–(c)); entonces, sea cual sea la lista elegida, $B(x)$ es expresable en la misma forma de $q$-cuantificadores. Por Teorema XIV (b) § 60 (tomando $R(x, y) \equiv B(x)$), la clase $\hat{x}B(x)$ es enumerada por una función recursiva $\theta(k)$ en predicados de $q$-cuantificadores (en el caso de la forma de $q$-cuantificadores con existencia primero, incluso en predicados de $q$-1-cuantificadores). Pero las demostraciones de Teoremas 38 y 40 valen, cuando es omitida la hipótesis de que la enumeración $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$ sea efectiva, y la conclusión sea alterada al cambiar "recursiva primitiva" por "recursiva primitiva en $\theta$", donde $\theta(k)$ es el número de Gödel de $\mathrm{F}_k$; y de aquí (usando Teorema XI § 58, y (17) y (18) § 57), si $\theta$ es recursiva en predicados de $q$-cuantificadores, cuando la alteración en la conclusión consista en sustituir las formas de 2-cuantificadores por las de $q+2$-cuantificadores. Así la demostración del Teorema 44 se realiza ahora, usando un caso del Teorema V para una forma de $q+2$-cuantificadores en lugar de 2-cuantificadores. Podemos todavía generalizar más el $C(x)$, para el Teorema 44, estableciendo que sea aritmético en el predicado $M$ del Teorema VIII § 57, incluyendo entre las fórmulas añadidas tres que expresen la definición de $M$, y usando los Teoremas I*, V*, VII*, XI* (con $M$ como $\Psi$) en lugar de I, V, VII, XI. (La segunda demostración del Teorema 44 puede asimismo realizarse bajo hipótesis más generales, usando generalizaciones del Teorema 28 ó XIII a "lógicas no constructivas").

El teorema de indecidibilidad de Gödel, no obstante, no está restringido al caso en que los axiomas son elementales (Teorema XIII § 60). Pero podemos caracterizar la secuencia de los números naturales completamente por axiomas de Peano, el quinto de los cuales no es elemental, si garantizamos la noción de todos los predicados sobre el dominio. Supóngase que tenemos un sistema formal consistente, que contenga estos axiomas categóricos para los números naturales. Bajo la concepción del sistema formal que estamos sosteniendo, un sistema formal puede tener sólo un infinito enumerable de objetos formales. Así la variable predicativa $\mathcal{A}$ del quinto axioma de Peano sólo puede ser sustituida en el sistema por un infinito enumerable de fórmulas. Entonces, para propósitos deductivos dentro del sistema, exactamente como antes, se puede disponer de (I) sólo para un infinito enumerable de predicados. En efecto, por el teorema de Gödel (Teorema XIII), hay una consecuencia de los axiomas bajo la interpretación que no es demostrable, es decir, no es deducible de los axiomas por la lógica formalizada en el sistema. Así, cuando tenemos axiomas no-elementales no todas las fórmulas que sean verdaderas bajo todas las interpretaciones que satisfagan los axiomas necesitan ser demostrables. (En nuestro ejemplo, esencialmente hay una única interpretación tal). La incompletud, que apareció en el sistema axiomático en el caso de los axiomas elementales, es transferida al aparato deductivo, si se intenta evitarla usando axiomas no-elementales.

Como Skolem lo expresa (1934 pág. 160): "... la serie de números naturales está completamente caracterizada, por ejemplo, por los axiomas de Peano, si se considera la noción de 'conjunto' o 'función proposicional' como algo dado de antemano con un significado absolutamente independiente de todos los principios de generación o axiomas. Pero si se hiciesen las axiomáticas consecuentes, de modo que asimismo el razonamiento con los conjuntos o funciones proposicionales estuviese axiomatizado, entonces, como hemos visto, la caracterización única o completa de las series de números sería imposible".

Esta situación es discutida en Henkin 1950, que ocupó la atención del autor después de haberse escrito esta sección (el primer borrador en 1947). Otros artículos son, p. ej., Mostowski 1947a (cfr. recensión de Kemeny 1948) y Rosser y Wang 1950 (cfr. recensión de Skolem 1951).

§ 76. **El problema de la decisión.** TEOREMA 54. *El problema de la decisión para el cálculo puro de predicados (cálculo puro de predicados con igualdad) es insoluble, esto es, no hay procedimiento de decisión para determinar si una fórmula de letras predicativas (una fórmula de letras predicativas e igualdad) es demostrable en el cálculo.* (Church 1936a, Turing 1936-7).

DEMOSTRACION, para el cálculo de predicados. Vimos en § 75 que el problema de decisión para la demostrabilidad en cualquier teoría axiomática que posea un sistema de axiomas elemental se reduce al de la demostrabilidad en el cálculo de predicados puro. De ahí que para demostrar este teorema de Church será suficiente hallar una teoría axiomática elemental para la cual, sobre la base de la tesis de Church (§ 60), no exista procedimiento de decisión.

De acuerdo con Teorema 33 § 61, un ejemplo de una teoría axiomática semejante lo suministra el sistema formal de Robinson descrito en el Lema 18b § 49, si ese sistema es simplemente consistente. Una demostración de su consistencia

simple, cuya numeración prosigue el presente teorema, se dará en § 79 (Teorema 53 (a)).

Repetimos en detalle el razonamiento (ya esbozado en § 75). Sea $S_2$ el sistema del Lema 18b con trece axiomas particulares.

(A) Por aplicaciones del Teorema 43 (véase Ejemplo 11 (a) § 74), hallamos otro sistema $S_1$ en el que los símbolos de función $'$, $+$, $\cdot$ son reemplazados por símbolos respectivos predicativos, siendo aumentado el número de axiomas a diecinueve. Por (VIIIa), una fórmula E de $S_2$ es demostrable en $S_2$ si y sólo si la fórmula E′ de $S_1$ es demostrable en $S_1$.

(B) Podemos reemplazar después los axiomas por sus clausuras, sin cambiar la noción de demostrabilidad (final de § 32).

(C) Además, por las &-reglas, puesto que los axiomas son finitos en número, podemos, similarmente, reemplazarlos por su conjunción como un solo axioma.

(D) Podemos, por añadidura, cambiar la notación empleando una variable z que no ocurra en el (los) axioma(s) en lugar del símbolo individual 0, comprendiendo que entonces demostrabilidad significará deducibilidad a partir del (de los) axioma(s) en el cálculo de predicados manteniéndose constante z. Si C es el resultado de introducir este cambio en una fórmula D de $S_1$ que no contenga a z, entonces, por Observación 2 (b) § 34, C es demostrable ahora si y sólo si D era antes demostrable. (Este tratamiento de 0 independientemente de los símbolos de función puede evitarse utilizando en su lugar Ejemplo 11 (b) § 74 en (A)).

(E) Podemos además cambiar la notación para emplear letras predicativas en lugar de los símbolos predicativos. Si B resulta de una fórmula C por este cambio de notación, entonces, por aplicaciones triviales de los Teoremas 15 y 16 § 34, B es ahora demostrable si y sólo si C lo era antes. (En § 75 considerábamos que B no contenía variables libres excepto z, pero ello se hizo para lograr una más propia más idónea de las nociones de teoría de conjuntos, y es ahora innecesario).

(F) Finalmente, por las $\supset$-reglas, B es demostrable en el último sistema descrito, esto es $F \vdash B$ en el cálculo de predicados manteniendo constante z donde F es la fórmula (que contiene sólo libre a z) que expresa ahora los axiomas, si y sólo si $F \supset B$ es demostrable en el cálculo de predicados.

El proceso total por el cual a partir de la fórmula E de $S_2$ hallamos una fórmula de letras predicativas $F \supset B$ tal que $\{\vdash E \text{ en } S_2\} \equiv \{\vdash F \supset B$ en el cálculo de predicados$\}$ es efectivo. (Podría ser representado vía numeración de Gödel por una función recursiva general, tal y como se discutió en § 61, y podría ser efectuado por una máquina de Turing según se indica al final § 70). Por lo tanto, si hubiera un procedimiento de decisión para la demostrabilidad en el cálculo de predicados puro, habría un procedimiento tal para $S_2$, que consistiría, dada una fórmula E de $S_2$, en hallar la correspondiente fórmula de letras predicativas $F \supset B$, y aplicar a ésta el procedimiento relativo al cálculo de predicados. Pero por el Teorema 33, si $S_2$ es simplemente consistente, entonces no hay procedimiento de decisión para la demostrabilidad de $S_2$.

El argumento es también aplicable al cálculo de predicados con igualdad, puesto que por Teorema 41 (b) la demostrabilidad en el sistema del Lema 18b es equivalente a la demostrabilidad en un sistema que conste del cálculo de predicados con igualdad y siete axiomas particulares.

OBSERVACION 1. El orden en el que se efectúen los pasos de reducción (A)–(F) es irrelevante en tanto (B) y (C) precedan a (F), (A) preceda a (B), (C) y (E), y si (D) precede a (B) la variable z esté exenta de la operación de clausura de (B). (O (C) puede ser omitido, y (F)ejecutado una vez paracada axioma; cfr. *4 y *5 § 26).

OBSERVACION 2. La demostración del Teorema 54 puede basarse en el Teorema XII § 60, en lugar de hacerlo en el Teorema 33, así. Por las precedentes reducciones (A)–(F) en el sistema del Lema 18b con Ejemplo 2 § 60, o por (el método de) esas reducciones en el sistema del Ejemplo 2 § 73, y usando la propiedad de consistencia que se establecerá en § 79 (Teorema 53 (b) o Teorema 52): *Para cualquier predicado recursivo primitivo (o general) fijo* $R(x, y)$, *hay un procedimiento efectivo por el cual, dado cualquier número* $x$, *puede hallarse una fórmula de letras predicativas* $\mathrm{K}_x$ *tal que*

(1) $\qquad (Ey)\, R(x, y) \equiv \{\vdash \mathrm{K}_x$ *en el cálculo de predicados*$\}$.

El Teorema 54 se sigue entonces del Teorema XII tomando $R(x, y) \equiv T_1(x, x, y)$. Esta demostración a partir del Teorema XII con el Ejemplo 2 § 73 es esencialmente la demostración original de Church; la que se basa en el Teorema 33 es esencialmente de Mostowski y Tarski (1940 resumen).

OBSERVACION 3. Nuestra concepción de un sistema formal $S$ implica que las fórmulas de $S$ deberán ser efectivamente enumerables o admitir una numeración de Gödel, de suerte que dada cualquier fórmula A podamos hallar efectivamente su número $x$, e inversamente, dado cualquier número $x$ podamos decidir efectivamente si es el número de Gödel de una fórmula, y si lo es hallar esa fórmula $\mathrm{A}_x$. Entonces (cfr. Observación 1(a) §60): *Hay un predicado recursivo general* $R$ *tal que*

(2) $\qquad \{\vdash \mathrm{A}_x \text{ en } S\} \equiv (Ey)\, R(x, y).$

Así el problema de la decisión para la demostrabilidad en cualquier sistema $S$ es equivalente a ese mismo problema para un predicado de la forma $(Ey)\, R(x, y)$. Por Observación 2, o por la (primera) demostración del Teorema 54 con la última parte del Ejemplo 3 § 61, el problema de la decisión para el cálculo de predicados presenta la insolubilidad máxima en el caso de predicados de esa forma (cfr. el precedente Ejemplo 3 §61). Así (combinando (1) y (2)), el problema de decisión para la demostrabilidad en cualquier sistema formal se reduce a ese mismo problema para el cálculo de predicados (o clásico o intuicionista). Ello generaliza nuestra observacion (§ 75) de que el problema para cualquier teoría axiomática con un sistema axiomático elemental se reduce a éste; pero sin duda, las reducciones para pasar del sistema a una numeración de Gödel vía (2), y de ahí al cálculo de predicados vía (1), son muy indirectas.

Por §§ 37, 72, 73, 75, la demostrabilidad en el cálculo de predicados con igualdad es equivalente a la validez en todo dominio no-vacío; así pues no hay

procedimiento de decisión para la última propiedad de igualdad y de fórmula de letras predicativas. Trahténbrot 1950 demuestra el teorema análogo para validez en todo dominio finito no-vacío.

REDUCCIONES Y CASOS ESPECIALES. Comoquiera que muchas cuestiones particulares (p. ej. el "último teorema" de Fermat, § 13) y problemas de decisión se reducen al problema de decisión para el cálculo de predicados, se ha trabajado mucho sobre este punto, con la obtención de resultados positivos de dos clases: ($\alpha$) reducciones del problema general, y ($\beta$) soluciones de casos especiales. Los resultados son a menudo presentados en una forma dual de teoría de conjuntos, en la que el problema consiste en decidir acerca de la satisfacibilidad de una fórmula de letras predicativas en un dominio no vacío (§§ 72, 75), en lugar de decidir acerca de la demostrabilidad de la misma.

Un temprano ejemplo de ($\alpha$) es la forma normal de Skolem (Skolem 1920, Hilbert-Bernays 1934 págs. 158 ss.). La forma normal de teoría de la demostración (teoría de la satisfacción) de Skolem es una fórmula prenexa (Teorema 19 § 35) en la que todos los cuantificadores existenciales (generales) se hallan en primer lugar. Dada una fórmula de letras predicativas G, puede hallarse efectivamente una fórmula de letras predicativas M (N) de dicha forma, y tal que M es demostrable en el cálculo de predicados (N es satisfacible en un dominio dado) si y sólo si G lo es. Así el problema de la decisión de la demostrabilidad (satisfacibilidad) de fórmulas de letras predicativas es generalmente reducido al mismo problema para formas normales de Skolem (cfr. la última parte de § 61), la forma normal M (N) no es en general equivalente a G, pero M ($\neg$ N) es interdeducible con G ($\neg$ G) en el cálculo de predicados con una regla postulada de sustitución (§ 37). Skolem utilizó su forma normal de la teoría de la satisfacción para simplificar la demostración del teorema de Löwenheim y generalizarlo, y Hilbert y Bernays 1939, la emplean para demostrar el teorema de completud de Gödel de un modo que simplifica razonablemente la formalización referida en la demostración del Teorema 36 § 72.

Un ejemplo de ($\beta$) es la solución del problema de decisión por Löwenheim 1915 (simplificada por Skolem 1919), e independientemente por Behmann 1922, para el caso de fórmulas de letras predicativas que contengan sólo letras predicativas con 0 ó 1 argumentos. Equivalentemente, por la Observación 1 § 34, el problema de la decisión está resuelto para el *cálculo de predicados 1-posicional*, esto es, el cálculo que solamente cuenta con letras predicativas 0- y 1-posicionales (cfr. final § 72, Hilbert-Bernays 1934, págs. 179-209).

Reducciones y casos especiales del problema de la decisión han seguido siendo un activo campo de investigación desde que Church mostró que no puede haber solución general (Teorema 54). La literatura es demasiado extensa para ser citada aquí; remítase el lector a la bibliografía de Church y a las secciones de crítica bibliográfica del Journal of Symbolic Logic (cfr. el prefacio a la bibliografía de este libro). Buen número de los resultados se describen en Hilbert-Bernays 1934 y 1939. Church 1951 discute casos especiales.

TEORIAS AXIOMATICAS. Abordamos ahora un método de Tarski (1949 resumen) para investigar los problemas de decisión en teorías axiomáticas. Consideraremos teorías formalizadas sobre la base de un cálculo lógico, que puede ser o bien el cálculo de predicados o el cálculo de predicados con igualdad. (Tarski utiliza este último). Por razones de uniformidad con nuestra previa terminología,

diremos usualmente "sistema formal $S$" donde Tarski dice "teoría $\mathfrak{T}$", que pone el énfasis en la aplicación matemática.

Por *constantes lógicas* entenderemos los seis símbolos lógicos $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, si el cálculo lógico es el cálculo de predicados; éstos y también $=$, si es el cálculo de predicados con igualdad. Los términos y fórmulas de un sistema han de ser construidos utilizando, además de estas constantes lógicas, un número finito de símbolos individuales, funcionales y predicativos, a los que se denomina las *constantes no-lógicas* (pero no letras predicativas). Los postulados, además de los correspondientes al cálculo lógico, serán un conjunto finito o infinito de *axiomas no-lógicos.*

Siguiendo a Tarski, llamamos a un sistema tal *finitamente axiomatizable*, si los axiomas no-lógicos son finitos en número o todos salvo algún conjunto finito de ellos son redundantes (Ejemplo 2 § 74). Decimos de tales sistemas que $S_2$ es una *extensión* de $S_1$ (o $S_1$ es un *subsistema* de $S_2$), si cada fórmula demostrable en $S_1$ es demostrable en $S_2$; $S_2$ ha de tener entonces todas las constantes no-lógicas de $S_1$, pero puede tener otras además. Una extensión $S_2$ de $S_1$ es una *extensión finita*, si todos los axiomas, salvo un número finito de ellos, de $S_2$ son demostrables en $S_1$. Decimos en suma que $S_1$ es *indecidible* para significar que el problema de la decisión para la demostrabilidad en $S_1$ es insoluble.

Siguiendo a Tarski decimos que $S$ es *esencialmente indecidible* si $S$ es (simplemente) consistente, y toda extensión (simplemente) consistente de $S$ es indecidible.

Rosser 1936 mostró que sistemas similares a nuestro sistema de teoría de números del Capítulo IV (si son consistentes) tienen esta propiedad (cfr. Teorema 33 § 61). Entonces los sistemas formalizados de la teoría axiomática de conjuntos de von Neumann 1925, de Bernays 1937-48 y de Gödel 1940 (si son consistentes) son ejemplos de sistemas $S$ que son a la par esencialmente indecidibles (puesto que incluyen la teoría usual de números) y finitamente axiomatizables. Mostowski y Tarski (1949 resumen) fueron los primeros en observar la existencia de un sistema $S$ que es a la par esencialmente indecidible y finitamente axiomatizable, y además lo bastante simple como para ser fácilmente interpretable en otras teorías, en el sentido que se va a definir a continuación. Ello suministra la base para la aplicación del método de Tarski que se da en Teorema 45 (b) y (c). Un ejemplo todavía más simple de un sistema esencialmente indecidible y finitamente axiomatizable es el de Raphael Robinson (1950 resumen), que tiene trece axiomas no lógicos tal y como se describen en el Lema 18b § 49 sobre la base del cálculo de predicados, o siete solamente (Axs. 14, 15, 18–21, y la fórmula de *137, o, equivalentemente, de *136) tal y como fue descrito por Robinson sobre la base del cálculo de predicados con igualdad. Robinson establece que ninguno de esos siete puede ser omitido sin sacrificar la esencial indecidibilidad.

Tarski dice que dos sistemas $S_1$ y $S_2$ son *compatibles* si tienen las mismas constantes no-logicas y una extensión común (simplemente) consistente. Considérense ahora dos sistemas cualesquiera $S_1$ y $S_2$ que, en general, no tengan las mismas constantes no-lógicas. Primero consideramos el caso de que la lógica sea el cálculo de predicados con igualdad. Entonces $S_2$ es *consistentemente interpretable* en $S_1$, si $S_1$ y $S_2$ tienen una extensión común consistente $S_3$, en la que es demostrable, para cada símbolo predicativo $n$-posicional P (símbolo de función f) de $S_2$ que no pertenezca a $S_1$, una fórmula que tenga la forma $\mathrm{P}(x_1, ..., x_n) \sim \mathrm{F}(x_1, ..., x_n)$ de una definición explícita de P (la forma $\mathrm{f}(x_1, ..., x_n) = w \sim \mathrm{F}(x_1, ..., x_n, w)$, esto es (iii) del Lema 26 § 74) donde las variables mostradas son distintas y

$F(x_1, ..., x_n)$ $(F(x_1, ..., x_n, w))$ contienen sólo estas variables libres y, como constantes no-lógicas, sólo las pertenecientes a $S_1$, y posiblemente símbolos individuales adicionales. Para el caso en que el cálculo lógico sea el cálculo de predicados y $S_2$ tenga símbolos de función que no pertenezcan a $S_1$, además $S_1$ tendrá a $=$ entre sus constantes, y en $S_3$ serán demostrables los axiomas de igualdad para los símbolos de función y predicativos de $S_1$. La situación se ilustra (un tanto trivialmente) por los $S_1$, $S_2$ y $S_3$ en la demostración del Teorema 43 § 74 (pero suponiendo consistencia o bien para (a), o bien para (b)).

TEOREMA 45. (a) *Si S es indecidible, entonces todo sistema $S_1$, que no carezca de ninguna de las constantes de S excepto, posiblemente, símbolos individuales y respecto del cual sea S una extensión finita, es indecidible.*

(b) *Si S es esencialmente indecidible y finitamente axiomatizable, entonces todo sistema S, que no carezca de ninguna de las constantes de S excepto, posiblemente, símbolos individuales y que tenga con S una extensión común consistente $S_3$ (en particular todo sistema $S_1$ compatible con S), es indecidible.*

(c) *Si S es esencialmente indecidible y finitamente axiomatizable, entonces todo sistema $S_1$ en el cual S sea consistentemente interpretable, es indecidible.* (Tarski 1949 resumen).

DEMOSTRACIONES. (a) Por las reducciones (B), (C), (D) aplicadas sólo a los símbolos individuales de $S$ que $S_1$ no posea, y (F). (Tarski considera que los axiomas han de cerrarse ab initio, y trata el caso de que $S_1$ y $S$ tengan las mismas constantes; entonces (B) y (D) no son requeridas).

(b) Sea $S_2$ el sistema que tenga los axiomas (y constantes) de $S_1$ y de $S$. Entonces $S_2$ es un subsistema de $S_3$; y por tanto, puesto que $S_3$ es consistente, $S_2$ lo es. Además $S_2$ es una extensión de $S$; y por tanto, puesto que $S$ es esencialmente indecidible y $S_2$ es consistente, $S_2$ es indecidible. Pero $S_2$ es una extensión finita de $S_1$. Ahora (a) se aplica con $S_2$ como su $S$.

(c) Trataremos en detalle el caso en que $S$ tenga un símbolo de función f como única constante suya (excepto quizá símbolos individuales) que $S_1$ no posea, siendo la lógica el cálculo de predicados. Si $S$ tiene más símbolos de tal índole, reiteramos meramente la aplicación del Teorema 42 y sus lemas; y si $S$ tiene tales símbolos de predicados, utilizamos similarmente el Ejemplo 1 § 74. Los resultados serán también válidos para el cálculo de predicados con igualdad, puesto que (por el Teorema 41 (b)) extender la lógica a dicho cálculo equivale a suponer que los axiomas de igualdad para todos los símbolos de función y predicativos están presentes en todos los sistemas considerados (lo cual sólo hace más fácil el argumento).

Sea $S_3$ la extensión común de $S_1$ y $S$ descrita en la definición de interpretabilidad consistente (con $S$ en el lugar de $S_2$).

Sea $S_{4a}$ el subsistema de $S_3$ que tiene como constantes las de $S_1$, f, y los símbolos individuales adicionales (si los hay) que pertenezcan a $S$ o que ocurran en $F(x_1, ..., x_n, w)$, y cuyos axiomas no-lógicos sean los de $S_1$ y de $S$, los axiomas de igualdad para los símbolos predicativos y de función de $S_1$, y (iii).

Puesto que $S_{4a}$ es un subsistema de $S_3$ y $S_3$ es consistente, $S_{4a}$ es consistente. De donde, dado que $S_{4a}$ es una extensión de $S$ y $S$ es esencialmente indecidible, $S_{4a}$ es indecidible.

Utilizando los Lemas 26 y 27 y la Observación 2 (a) § 74, en la lista de axio-

mas no-lógicos para $S_{4a}$ podemos reemplazar cada una de las A de los axiomas no-lógicos de $S$ por su transformación principal f-exenta A′, y (iii) por (i) y (ii), sin que cambie la clase de las fórmulas demostrables; llamemos $S_4$ al sistema indecidible resultante.

Por el Teorema 42 § 74, el símbolo de función f y su axioma (ii) pueden ser eliminados de $S_4$, con lo que queda un sistema $S_5$ que (por (IV) § 74) es también indecidible.

Pero $S_5$ tiene como constantes sólo las de $S_1$ y posiblemente símbolos individuales, y $S_5$ es una extensión finita de $S_1$. Así por (a) (con $S_5$ en el lugar de $S$), $S_1$ es indecidible.

OBSERVACION 4. Para las condiciones sobre $S_3$ en la definición de interpretabilidad consistente, en lugar de (iii) podemos tener como demostrable en $S_3$ una fórmula que tenga la forma $f(x_1, ..., x_n) = t(x_1, ..., x_n)$ de una definición explícita de f, donde $t(x_1, ..., x_n)$ es un término que contiene sólo las variables mostradas y como constantes no-lógicas sólo símbolos de función de $S_1$ excepto, posiblemente, símbolos individuales. Porque entonces $t(x_1, \ldots, x_n) = w$ es un $F(x_1, ..., x_n, w)$.

EJEMPLO 1. Por (b), dado que el sistema de Robinson, llamémosle $S$, es esencialmente indecidible y finitamente axiomatizable, todo sistema formal $S_1$ con las constantes $=$, $'$, $+$, $\cdot$ (y quizá otras, p. ej., 0), cuyas sentencias demostrables expresen proposiciones verdaderas acerca de números naturales, es indecidible, si aceptamos la consistencia simple de una extensión común $S_3$ (digamos aquélla que tiene los axiomas y constantes tanto de $S_1$ como de $S$) en tanto garantizada por la verdad. Para hacer de la indecidibilidad de un tal sistema $S_1$ un resultado metamatemático, resta aportar una demostración metamatemática de consistencia para $S_3$.—Por (c) y la Observación 4, puesto que $'$ es definible explícitamente a partir de 1 como un símbolo individual y $+$, lo mismo es válido para sistemas tales que contengan las constantes $=$, $+$, $\cdot$ (al menos).

Partiendo del ejemplo de Mostowski y Tarski de un sistema finitamente axiomatizable y esencialmente indecidible, Mostowski y Tarski (1949 resumen), Tarski (1949a, 1949b resúmenes), Julia Robinson (1949 resumen, 1949) y Raphael Robinson (1949 resumen) obtienen en rápida sucesión la indecidibilidad de una variedad de teorías matemáticas en la aritmética de enteros y racionales, anillos, grupos, campos, retículos y geometrías proyectivas.

CAPITULO XV

# CONSISTENCIA, SISTEMAS CLASICOS E INTUICIONISTAS

§ 77. **Sistema formal de Gentzen.** En el Ejemplo 2 § 73 establecimos lo que podría describirse como un procedimiento directo de deducir A (𝔞) a partir de los axiomas de $S$ en el cálculo de predicados cuando $(Ey)\,R\,(x, y)$. Este procedimiento directo puede conducirnos desde los axiomas a A (𝔞) sólo cuando $(Ey)\,R\,(x, y)$. Para establecer la propiedad de consistencia, esto es, que A (𝔞) es deducible sólo cuando $(Ey)\,R\,(x, y)$, lo que precisamos es mostrar que un modo indirecto de proceder en el cálculo de predicados puede conducirnos partiendo de los axiomas hasta A (𝔞), sólo cuando el procedimiento directo lo hace. En el formalismo de las funciones recursivas, el problema correspondiente de consistencia era trivial (§ 54, Ejemplo 3 § 60), justamente porque las reglas del sistema no permiten modo alguno de proceder a partir de las fórmulas supuestas que no sea el directo. Ello nos lleva a preguntar si no podría existir un teorema sobre el cálculo de predicados que afirmase que, si una fórmula es demostrable (o deducible de otras fórmulas), es demostrable (o deducible) en un determinado proceso directo; en otras palabras, un teorema que proporcione una forma normal a demostraciones y deducciones, siendo en cierto sentido directas las demostraciones y deducciones en forma normal.

Un teorema de este tipo fue obtenido por Gentzen 1934-5*. Lo presentaremos en § 78, y lo aplicaremos en § 79 para alcanzar los resultados de consistencia a que se ha hecho referencia en el Ejemplo 2 § 60 y en el Ejemplo 2 § 73 (y de que se ha hecho uso en § 76), así como la consistencia de la teoría de números con la regla restringida de inducción (mencionada al comienzo de § 42). Estas demostraciones de consistencia pueden obtenerse mediante otros métodos, tales como los de Ackerman 1924-5, von Neumann 1927 y Herbrand 1930, 1931-2. Todos son algo largos. El de Gentzen es uno de los más fáciles de seguir, pues la demostración de su "Hauptsatz" o teorema de la forma normal (en el que básicamente consiste) se divide en una serie de casos, cada uno de los cuales es fácil de tratar. Se ofrece otra aplicación de este teorema en § 80. Salvo incidentalmente, §§ 81 y 82 son independientes de §§ 77–80.

La forma normal de Gentzen para demostraciones en el cálculo de predicados requiere una clasificación de los pasos deductivos diferente a la ofrecida por los postulados del sistema formal del cálculo de predicados del Capítulo IV (§ 19). El símbolo de la implicación $\supset$ ha de ser diferenciado en su papel de mediador de inferencias de su papel de símbolo componente de la fórmula a demostrar. En el primero de los casos será reemplazado por un nuevo símbolo formal $\rightarrow$ (léase 'da' o 'entraña'), al que se asignarán propiedades similares a las del símbolo formal '$\vdash$' en nuestras primeras reglas derivadas.

La clasificación de Gentzen de las operaciones deductivas se explicita mediante el establecimiento de un nuevo sistema formal del cálculo de predicados. Al sistema formal del cálculo proposicional y de predicados anteriormente estudiado (Capítulos IV ss.) lo denominaremos ahora un *sistema de tipo Hilbert*, y lo denotaremos

por $H$. Concretamente $H$ denota uno cualquiera o uno particular de entre determinados sistemas según consideremos un cálculo proposicional o un cálculo de predicados, en la versión clásica o en la intuicionista (§ 23), y según el sentido en que utilicemos 'término' y 'fórmula' (§§ 17, 25, 31, 37, 72–76). Las mismas decisiones respectivas valdrán en relación con el *sistema de tipo Gentzen* $G1$ que ahora introducimos y los sistemas $G2$, $G3$ y $G3a$ que introduciremos más adelante.

Las reglas de transformación o deductivas de $G1$ se aplicarán a objetos que no son fórmulas del sistema $H$, pero que están construidos a partir de ellas por una regla adicional de formación, por lo que hacemos uso de un nuevo término 'secuente' para dichos objetos. (Gentzen utiliza "Sequenz", que traducimos por "secuente" debido a que ya hemos utilizado "secuencia" para toda sucesión de objetos, que en alemán es "Folge"). Un *secuente* es una expresión formal de la forma $A_1, ..., A_l \rightarrow B_1, ..., B_m$ donde $l, m \geq 0$ y $A_1, ..., A_l, B_1, ..., B_m$ son fórmulas. La parte $A_1, ..., A_l$ es el *antecedente*, y $B_1, ..., B_m$, el *consiguiente* del secuente $A_1, ..., A_l \rightarrow B_1, ..., B_m$.

Si $l, m \geq 1$, el secuente $A_1, ..., A_l \rightarrow B_1, ..., B_m$ tiene para $G1$ la misma interpretación que la fórmula $A_1 \,\&\, ... \,\&\, A_l \supset B_1 \vee ... \vee B_m$ para $H$. La interpretación se extiende a los casos en que $l = 0$ ó $m = 0$ considerando $A_1 \,\&\, ... \,\&\, A_l$ para $l = 0$ (la "conjunción vacía") como verdadera y $B_1 \vee ... \vee B_m$ para $m = 0$ (la "disyunción vacía") como falsa.

Una fórmula *ocurre* en (o *pertenece* a) un secuente $A_1, ..., A_l \rightarrow B_1, ..., B_m$, si es una de las $l + m$ ocurrencias de fórmulas $A_1, ..., A_l, B_1, ..., B_m$; y similarmente para la ocurrencia de una fórmula en antecedente o consiguiente. Por ejemplo $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$ ocurren en el secuente $\mathcal{A}, \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, pero $\mathcal{B}$ no. Una variable (símbolo, cuantificador, etc.) *ocurre* en un secuente, etc., si ocurre en alguna fórmula del mismo.

Como en el capítulo V, haremos uso de las mayúsculas griegas "$\Gamma$", "$\Delta$", "$\Theta$", "$\Lambda$", etc. para representar secuencias finitas de cero o más fórmulas, pero ahora también como antecedente (consiguiente), o partes de antecedente (consiguiente), incluyendo las comas formales de separación.

## Postulados para el sistema formal $G1$

Convenciones: A, B, C, D son fórmulas; $\Gamma$, $\Delta$, $\Theta$, $\Lambda$ son secuencias finitas de cero o más fórmulas; x es una variable; A (x) es una fórmula; t es un término libre con respecto a x en A (x) y b es una variable libre con respecto a x en A (x) y (a menos que b sea x) que no ocurre libre en A (x).

Restriccion sobre variables (para dos de los postulados tal como se indica): La variable b del postulado no ocurrirá libre en su conclusión. (Si A (x) no contiene la x libre, entonces A(b) es A (x) independientemente de cuál sea la variable b; acordamos en tal caso elegir para el análisis una b que no ocurra libre en la conclusión, con lo que se satisface la restricción).

La diferencia entre los sistemas $G1$ clásico e intuicionista está garantizada por la restricción impuesta a dos de los postulados.

Esquema axiomático.

$$C \rightarrow C.$$

Reglas lógicas de inferencia para el cálculo proposicional.

| Introducción de | en el consiguiente. | en el antecedente. |
|---|---|---|
| $\supset$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B.}$ | $\dfrac{\Delta \to \Lambda, A \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.}$ |
| & | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \,\&\, B.}$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta.} \quad \dfrac{B, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta.}$ |
| $\vee$ | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \vee B.} \quad \dfrac{\Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B.}$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta.}$ |
| $\neg$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A,}$ | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta.}$ |

con $\Theta$ vacía para
el sistema intuicionista.

Reglas lógicas adicionales de inferencia
para el cálculo de predicados.

| Introducción de | en el consiguiente. | en el antecedente. |
|---|---|---|
| $\forall$ | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(b)}{\Gamma \to \Theta, \forall x A(x),}$ | $\dfrac{A(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Theta.}$ |
| | sujeta a la restricción sobre variables. | |
| $\exists$ | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(t)}{\Gamma \to \Theta, \quad xA(x).}$ | $\dfrac{A(b), \Gamma \to \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \to \Theta,}$ |
| | | sujeta a la restricción sobre variables. |

Reglas estructurales de inferencia.

| | en el consiguiente. | en el antecedente. |
|---|---|---|
| Atenuación | $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, C,}$ | $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{C, \Gamma \to \Theta.}$ |

con $\Theta$ vacía para
el sistema intuicionista.

Contracción $\dfrac{\Gamma \to \Theta, C, C}{\Gamma \to \Theta, C.}$ $\qquad$ $\dfrac{C, C, \Gamma \to \Theta}{C, \Gamma \to \Theta.}$

Intercambio $\dfrac{\Gamma \to \Lambda, C, D, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, D, C, \Theta.}$ $\qquad$ $\dfrac{\Lambda, D, C, \Gamma \to \Theta}{\Lambda, C, D, \Gamma \to \Theta.}$

Corte. $\dfrac{\Delta \to \Lambda, C \qquad C, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.}$

Así pues, para el sistema clásico $G1$, los postulados, a excepción de las dos $\supset$-reglas, se ordenan en una distribución simétrica dual. Las reglas para & y $\vee$ son duales entre sí, transformándose un conjunto en el otro mediante el intercambio de & con $\vee$ y de $\to$ con $\leftarrow$. Similarmente, las $\forall$- y $\exists$-reglas son duales. El esquema axiomático, las $\neg$-reglas y las reglas estructurales de las cuatro clases son autoduales cada una.

Denominamos *reglas del consiguiente* a las reglas de la columna izquierda; y las denotamos en abreviatura por "$\to \supset$", "$\to$ &", "$\to \vee$", "$\to \neg$", "$\to \forall$", "$\to \exists$", "$\to A$", "$\to C$", "$\to I$", respectivamente. Denominamos *reglas del antecedente* a las reglas de la columna derecha, y las denotamos por "$\supset \to$", "& $\to$", etc.

Las reglas lógicas constituyen introducciones de un símbolo lógico, pero unas veces en el consiguiente (columna izquierda) y otras en el antecedente (columna derecha). Se denomina *fórmula principal* a la fórmula en que se introduce el símbolo lógico; y *fórmula(s) lateral(es)* a la fórmula o a las dos fórmulas indicadas explícitamente en la(s) premisa(s).

EJEMPLO 1. La regla superior de la columna derecha es "$\supset$-introducción en el antecedente", o "la regla de $\supset$-antecedente", o, en abreviatura, "$\supset \to$". La fórmula principal es A $\supset$ B; la primera premisa tiene como fórmula lateral a A, y la segunda a B.

Las reglas lógicas de $G1$ son más o menos similares en su forma a las reglas derivadas respectivas del Teorema 2 § 23, con la aparición, en el caso presente, del símbolo formal no definido $\to$ en lugar del símbolo metamatemático definido "$\vdash$". Una introducción en el consiguiente corresponde a una introducción en el Teorema 2, y una introducción en el antecedente a una eliminación en el Teorema 2. El actual esquema axiomático y las reglas estructurales corresponden a propiedades generales del anterior $\vdash$ enumeradas en el Lema 5 § 20.

En la construcción de demostraciones en $G1$ se utiliza la forma de árbol (final de § 24); y se utiliza "$\vdash$ S", donde S es un secuente, para expresar que el secuente S es demostrable.

En la exposición de demostraciones (o de partes de ellas) resulta tedioso mostrar por separado todas las aplicaciones de las reglas estructurales de una premisa. Adoptaremos la convención de que una doble línea (con o sin mención de otra regla) representa una serie de cero o más atenuaciones ("$A$"), contracciones ("$C$") e intercambios ("$I$") (seguida de la aplicación de la otra regla cuando se ha hecho mención de otra).

EJEMPLO 2. Para toda fórmula A, B y C, (a) y (b) son demostraciones en $G1$ desde el punto de vista intuicionista, (c) tan sólo lo es desde el punto de vista clásico.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B \quad C \to C}{B \supset C,\ B \to C}\supset\to}{A \to A \quad B \supset C,\ B \to C}\supset\to}{A \to A \quad B,\ A \supset (B \supset C),\ A \to C}\supset\to}{A,\ A \supset (B \supset C),\ A \supset B \to C}\to\supset}{A \supset (B \supset C),\ A \supset B \to A \supset C}\to\supset}{A \supset B \to (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}\to\supset}{\to (A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)).}\to\supset$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A,\ \neg A \to B}\neg\to}{\neg A \to A \supset B}\to\supset}{\to \neg A \supset (A \supset B).}\to\supset$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A,\ \neg A}\to\neg}{\neg\neg A \to A}\neg\to}{\to \neg\neg A \supset A.}\to\supset$$

Sobre la base de la lista de postulados de *G*1, verificamos por inducción:

LEMA 32a. *Si* $\vdash \Gamma \to B_1, \ldots, B_m$ *en el sistema intuicionista* *G*1, *entonces* $m = 0$ *ó* $m = 1$.

LEMA 32b. *Si* $\vdash \Gamma \to B_1, \ldots, B_m$ *en el sistema intuicionista* *G*1, *sin que se haga uso de la regla* $\neg \to$, *entonces* $m = 1$.

El Lema 32a pone de manifiesto la diferencia total entre el sistema *G*1 clásico y el intuicionista; mas es conveniente indicar que necesitábamos restringir tan sólo dos de los postulados del sistema *G*1 intuicionista para garantizar tal diferencia.

Nuestro primer objetivo es mostrar (como hizo Gentzen) que el sistema *G*1 es equivalente a nuestro primer sistema *H*, en el sentido de que, para toda fórmula E, $\vdash \to E$ en *G*1 si y sólo si $\vdash E$ en *H*. Este resultado estará contenido en los dos próximos teoremas, cuando $\Gamma$ es vacía.

TEOREMA 46. *Si* $\Gamma \vdash E$ *en H manteniéndose constantes todas las variables, entonces* $\vdash \Gamma \to E$ *en G*1. *Si la deducción dada en H hace uso de los postulados para tan sólo algunos de los símbolos* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, *entonces la demostración resultante en G*1 *hace uso tan sólo de las reglas lógicas para* $\supset$ *y para aquellos mismos símbolos.*

DEMOSTRACION, por inducción de curso-de-valores sobre la longitud de la deducción dada de E a partir de $\Gamma$ en *H*. De acuerdo con el análisis de E en la deducción dada, surgen dieciséis casos, como se verá a continuación.

CASO 0: E es una de las fórmulas $\Gamma$. Entonces la siguiente es una demostración de $\Gamma \to E$ en *G*1.

$$\dfrac{E \to E}{\Gamma \to E.}$$

Los restantes casos se numerarán, como los postulados respectivos de *H*, 1a, 1b, 2, 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 6, 7, 8 u $8^{I}$, 9–12.

CASO 1b: E es un axioma conforme al Esquema axiomático 1b; es decir, E es $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$ para algunas fórmulas A, B y C. Escribiendo $\Gamma$ antes de $\rightarrow$ en el secuente final del Ejemplo 2 (a), y duplicando la línea superior a él (con el fin de representar atenuaciones), convertimos este árbol en una prueba de $\Gamma \rightarrow E$ en $G1$.

CASO 2: E es una consecuencia inmediata de dos fórmulas precedentes por la Regla 2; es decir, para algún par de fórmulas A y B, E es B y las dos fórmulas precedentes son A y $A \supset B$. Por la hipótesis de la inducción, existen en $G1$ demostraciones de $\Gamma \rightarrow A$ y de $\Gamma \rightarrow A \supset B$. Injertando estas dos demostraciones en el árbol siguiente, obtenemos una demostración de $\Gamma \rightarrow B$.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \rightarrow A \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow A \supset B \qquad \dfrac{A \rightarrow A \quad A \rightarrow B}{A \supset B,\ A \rightarrow B}\ \supset\rightarrow}{A,\ \Gamma \rightarrow B}\ \text{Corte}}{\Gamma \rightarrow B.}\ \text{Corte}$$

CASO 8 o $8^{\mathrm{I}}$. Véase Ejemplo 2 (c) o (b), respectivamente.

CASO 9: E es una consecuencia inmediata de una fórmula precedente por la Regla 9. Entonces E es $C \supset \forall x A(x)$, y la fórmula precedente es $C \supset A(x)$, donde C no contiene a x libre. Sea $\Gamma_1$ la secuencia parcial de $\Gamma$ que comprenda, de entre las fórmulas $\Gamma$, aquellas de las que dicha fórmula precedente $C \supset A(x)$ depende en la deducción dada de E a partir de $\Gamma$. Si eliminamos en la deducción dada todas las fórmulas posteriores a la fórmula $C \supset A(x)$ y aquellas anteriores que dependen de fórmulas supuestas distintas a $\Gamma_1$, obtenemos una deducción de $C \supset A(x)$ a partir de $\Gamma_1$. Por aplicación de la hipótesis de inducción a esta deducción, existe en $G1$ una prueba de $\Gamma_1 \rightarrow C \supset A(x)$. Puesto que se mantienen constantes las variables en la deducción dada de $C \supset \forall x A(x)$ a partir de $\Gamma$, ninguna de las fórmulas $\Gamma_1$ contiene libre la variable x de la aplicación de la Regla 9. Esto y el hecho de que C no contiene libre a x se utilizan para verificar que la restricción sobre variables se satisface para la $\rightarrow \forall$ en lo siguiente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \rightarrow C \supset A(x) \qquad \dfrac{C \rightarrow C \quad A(x) \rightarrow A(x)}{C \supset A(x),\ C \rightarrow A(x)}\ \supset\rightarrow}{C,\ \Gamma_1 \rightarrow A(x)}\ \text{Corte}}{C,\ \Gamma_1 \rightarrow \forall x A(x)}\ \rightarrow\forall}{\Gamma \rightarrow C \supset \forall x A(x).}\ \rightarrow\supset$$

CASO 12: E es una consecuencia inmediata de una fórmula precedente por la Regla 12. Dual del caso 9.

Introducimos ahora la notación de que se hará uso en el Teorema 47. Sea F una fórmula particular clausurada. Digamos que $\Theta$ es $B_1, \ldots, B_m$ $(m \geq 0)$. Sea $\Theta'$ entonces $B_1, \ldots, B_{m-1}$ (vacía si $m \leq 1$), $\Theta''$ sea $B_m$ si $m \geq 1$ y $\neg(F \supset F)$, si $m = 0$, $\neg\Theta$ sea $\neg B_1, \ldots, \neg B_m$, y $\neg\Theta'$ sea $\neg B_1, \ldots, \neg B_{m-1}$ (vacía si $m \leq 1$).

COROLARIO 1. *Si* $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ *en H manteniéndose constantes todas las variables, y bajo la condición para los sistemas intuicionistas de que* $m \leq 1$, *entonces* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en G*1.

Hágase uso de casos según que $m = 1$, $m = 0$ ó $m > 1$.

COROLARIO 2. *Para los sistemas clásicos (intuicionistas) cuando* $l$, $m \geq 1$ ($l \geq 1, m = 1$): *Si* $\vdash A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_l \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ *en H, entonces* $\vdash A_1, \ldots, A_l \to B_1, \ldots, B_m$ *en G*1.

TEOREMA 47. *Si* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en G*1, *entonces* $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ *en H manteniéndose constantes todas las variables.* (En particular: *Si* $\vdash \Gamma \to E$ *en G*1, *entonces* $\Gamma \vdash E$ *en H manteniéndose constantes todas las variables*).

*Además, para los sistemas intuicionistas (clásicos), si la demostración dada en G*1 *hace uso de las reglas lógicas para sólo algunos de los símbolos* $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$, *entonces la deducción resultante en H hace uso de sólo los* $\supset$*-postulados (los* $\supset$*- y* $\neg$*-postulados) y de los postulados para aquellos mismos símbolos, siempre que, cuando los símbolos incluyen* $\forall$ *pero no* &, *los* $\forall$*-postulados incluyan el Esquema axiomático* 9a *del Lema* 11 § 24.

DEMOSTRACION. Demostramos el primer enunciado del teorema por inducción de curso-de-valores sobre la altura (es decir, número de niveles) de la demostración dada de $\Gamma \to \Theta$ en $G1$, recurriendo a la división en casos de acuerdo con el último postulado de $G1$ aplicado en dicha demostración.

Los detalles adicionales presentados en la segunda parte del teorema se verificarán después de que hayamos discutido en detalle los casos. En todos los casos, excepto en los casos y subcasos marcados con un asterisco simple o doble, la demostración de la existencia de la deducción resultante es casi inmediata haciendo uso de las propiedades generales de $\vdash$ y, en el caso de una regla lógica de $G1$, aplicando la regla derivada correspondiente (que no sea una $\neg$-regla) del Teorema 2 § 23, o en el caso de $\to \forall$ y $\exists \to$, de la regla fuerte correspondiente del Lema 10 § 24. En los casos marcados con un solo asterisco, hacemos uso también de las $\neg$-reglas intuicionistas ($\neg$-introd. y $\neg$-elim. débil § 23) y a veces de *1 § 26. En los casos marcados con un doble asterisco utilizamos también la regla clásica de $\neg$-elim. (fuerte) (Teorema 2). Ninguno de los restantes nueve casos no mencionados a continuación requiere ser dividido en subcasos o marcado con asteriscos:

CASO 1: el esquema axiomático. Por las propiedades generales de $\vdash$, $C \vdash C$ en *H*.

CASO 2: $\to \supset$. Por la hipótesis de la inducción tenemos que $A, \Gamma, \neg\Theta \vdash B$ en *H*, manteniéndose constantes todas las variables, y debemos inferir que asimismo $\Gamma, \neg\Theta \vdash A \supset B$. Podemos hacer esto por $\supset$-introd.

CASO 3: $\to \supset$. SUBCASO 1: $\Lambda$ vacía o $\Theta$ no vacía. Entonces $(\Lambda, \Theta)''$ es $\Theta''$. Por hipótesis de inducción, $\Delta, \neg\Lambda \vdash A$ y $B, \Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$. En consecuencia, haciendo uso de $\supset$-elim., $A \supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda, \neg\Theta' \vdash \Theta''$. SUBCASO 2**: $\Lambda$ no vacía y $\Theta$ vacía. Por hipótesis de inducción, $\Delta, \neg\Lambda \vdash A$ y $B, \Gamma \vdash \neg(F \supset F)$. Por $\supset$-elim., $A \supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda \vdash \neg(F \supset F)$. Haciendo uso de *1, $A \supset B$,

$\Delta, \Gamma, \neg A \vdash F \supset F$. Por tanto, por $\neg$-introd. y $\neg$-elim., $A \supset B, \Delta, \Gamma, \neg A' \vdash \neg \neg A''$ $\vdash A''$.

CASO 10*: $\rightarrow\neg$. SUBCASO 1: $\Theta$ vacía. De $A, \Gamma \vdash \neg (F \supset F)$, inferimos $\Gamma \vdash \neg A$ por 1* y $\neg$-elim. SUBCASO 2: $\Theta$ no vacía. De $A, \Gamma, \neg \Theta' \vdash \Theta''$, inferimos $\Gamma, \neg \Theta', \neg \Theta'' \vdash \neg A$ por $\neg$-introd.

CASO 11: $\neg \rightarrow$. SUBCASO 1*: $\Theta$ vacía. Hágase uso de $\neg$-elim. débil de $\neg$. SUBCASO 2**: $\Theta$ no vacía. Hágase uso de $\neg$-introd. y $\neg$-elim.

CASO 12: $\rightarrow \forall$. Por hipótesis de inducción, $\Gamma, \neg \Theta \vdash A(b)$ manteniéndose constantes todas las variables. Por $\forall$-introd. fuerte, $A(b) \vdash^{b} \forall x A(x)$. En consecuencia $\Gamma, \neg \Theta \vdash \forall x A(x)$, manteniéndose constantes todas las variables, b inclusive, ya que, por la restricción impuesta en $\rightarrow \forall$ a las variables, $\Gamma$ y $\Theta$ no contienen libre a b.

CASO 16: Una regla estructural de una premisa. Sea $\Gamma \rightarrow \Theta$ la premisa y $\Gamma^{\dagger} \rightarrow \Theta^{\dagger}$, la conclusión. Entonces $\Gamma^{\dagger} (\Theta^{\dagger})$ proviene de $\Gamma(\Theta)$ por permutación de fórmulas, supresión de repeticiones de fórmulas o introducción de nuevas fórmulas. SUBCASO 1: $\Theta^{\dagger}$ es $\Theta$. Inferimos $\Gamma^{\dagger}, \neg \Theta' \vdash \Theta''$ a partir de $\Gamma, \neg \Theta' \vdash \Theta''$, en virtud de las propiedades generales de $\vdash$. SUBCASO 2: $\Theta^{\dagger}$ no es $\Theta$ y $\Theta$ es vacía. Por hipótesis de inducción, $\Gamma \vdash \neg (F \supset F)$. En consecuencia, $\Gamma^{\dagger}, \Theta^{\dagger\prime} \vdash \neg (F \supset F)$ en virtud de las propiedades generales de $\vdash$. Por tanto, por *1 y $\neg$-elim. débil, $\Gamma^{\dagger}, \neg \Theta^{\dagger\prime} \vdash \Theta^{\dagger\prime\prime}$. SUBCASO 3**: $\Theta^{\dagger}$ no es $\Theta$ y $\Theta$ no es vacía. Entonces $\Theta^{\dagger}$ no es vacía y $\Theta$ y $\Theta^{\dagger}$ son tales que al menos una de las dos consta de más de una fórmula. Por hipótesis de inducción, $\Gamma, \neg \Theta' \vdash \Theta''$. Por $\neg$-elim. débil, $\Gamma, \neg \Theta', \neg \Theta'' \vdash \neg (F \supset F)$, es decir, $\Gamma, \neg \Theta \vdash \neg (F \supset F)$. Por tanto, en virtud de las propiedades generales de $\vdash$, $\Gamma^{\dagger}, \neg \Theta^{\dagger} \vdash \neg (F \supset F)$, es decir $\Gamma^{\dagger}, \neg \Theta^{\dagger\prime}, \neg \Theta^{\dagger\prime\prime} \vdash \neg (F \supset F)$. En consecuencia, por *1, $\neg$-introd. y $\neg$-elim., $\Gamma^{\dagger}, \neg \Theta^{\dagger\prime} \vdash \Theta^{\dagger\prime\prime}$.

CASO 17: Corte. Tratado como el caso 3, excepto en que no se hace uso de $\supset$-elim. SUBCASO 1: $\Lambda$ vacía o $\Theta$ no vacía. SUBCASO 2**: $\Lambda$ no vacía y $\Theta$ vacía.

Para verificar el enunciado segundo del teorema, primero supóngase que la demostración dada de $\Gamma \rightarrow \Theta$ en $G1$, donde $\Theta$ es $B_1, \ldots, B_m$, es intuicionista y no hace uso de las $\neg$-reglas. Entonces, aplicando el Lema 32b, vemos que no puede ocurrir ninguno de los casos o subcasos marcados con uno o dos asteriscos. El enunciado, por tanto, se sigue del modo de tratar los casos no marcados con asterisco, por el Lema 11 § 24.

Si la demostración hace uso de las $\neg$-reglas pero es intuicionista, el enunciado permite que en la deducción resultante se haga uso de los $\neg$-postulados intuicionistas de $H$, y necesitamos tan sólo verificar, aplicando el Lema 32a, que no puede ocurrir ninguno de los casos o subcasos marcados con dos asteriscos.

COROLARIO. *Si* $l, m \geq 1$ (*y en consecuencia para los sistemas intuicionistas,* $m = 1$): *Si* $\vdash A_1, \ldots, A_l \rightarrow B_1, \ldots, B_m$ *en* $G1$, *entonces* $\vdash A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_l \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ *en* $H$.

§ 78. **Teorema de la forma normal de Gentzen.** EJEMPLO 1. La demostración (a) contiene un corte, mientras que (b) es una demostración del mismo secuente, pero sin corte.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b) \to \mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b) \to \exists x \mathcal{A}(x)} \to \exists \qquad \dfrac{\exists x \mathcal{A}(x) \to \exists x \mathcal{A}(x)}{\exists x \mathcal{A}(x), \neg \exists x \mathcal{A}(x) \to} \neg \to}{\dfrac{\mathcal{A}(b), \neg \exists x \mathcal{A}(x) \to}{\neg \exists x \mathcal{A}(x) \to \neg \mathcal{A}(b)} \to \neg}}{\dfrac{\neg \exists x \mathcal{A}(x) \to \forall x \neg \mathcal{A}(x)}{\to \neg \exists x \mathcal{A}(x) \supset \forall x \neg \mathcal{A}(x).} \to \supset} \quad \text{Corte}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b) \to \mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b) \to \exists x \mathcal{A}(x)} \to \exists}{\mathcal{A}(b), \neg \exists x \mathcal{A}(x) \to} \neg \to}{\neg \exists x \mathcal{A}(x) \to \neg \mathcal{A}(b)} \to \neg}{\neg \exists x \mathcal{A}(x) \to \forall x \neg \mathcal{A}(x)} \to \forall}{\to \neg \exists x \mathcal{A}(x) \supset \forall x \neg \mathcal{A}(x).} \to \supset$$

La primera demostración hace uso en los antecedentes de la rama derecha de una fórmula $\exists x \mathcal{A}(x)$ innecesariamente complicada. Dicha complicación se resuelve mediante el corte. La segunda demostración procede de un modo directo, sin introducir complicaciones que sean posteriormente resueltas.

La significación de las demostraciones sin corte como, en un sentido, demostraciones en forma normal, quedará ulteriormente puesta de relieve por la propiedad de subfórmula (Lema 33a, más abajo).

Definimos así 'subfórmula' de una fórmula dada.

1. Si A es una fórmula, A es una *subfórmula* de A. 2–4. Si A y B son fórmulas, las *subfórmulas* de A y las *subfórmulas* de B son *subfórmulas* de $A \supset B$, $A \,\&\, B$ y $A \vee B$. 5. Si A es una fórmula, las *subfórmulas* de A son *subfórmulas* de $\neg A$. 6–7. Si x es una variable, A(x) es una fórmula y t es un término libre con respecto a x en A(x), las *subfórmulas* de A(t) son *subfórmulas* de $\forall x A(x)$ y $\exists x A(x)$. 8. Una fórmula tiene tan sólo las *subfórmulas* determinadas por 1–7.

EJEMPLO 2. Las subfórmulas de $\mathcal{A} \supset (\neg \mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ son las cinco fórmulas $\mathcal{A} \supset (\neg \mathcal{A} \supset \mathcal{B})$, $\mathcal{A}$, $\neg \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, $\neg \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

EJEMPLO 3. (a) Las subfórmulas de $\forall b \forall c (\mathcal{B}(c) \,\&\, \mathcal{A}(b))$ son las fórmulas $\forall b \forall c (\mathcal{B}(c) \,\&\, \mathcal{A}(b))$, $\forall c (\mathcal{B}(c) \,\&\, \mathcal{A}(\mathrm{t}))$, $\mathcal{B}(\mathrm{u}) \,\&\, \mathcal{A}(\mathrm{t})$, $\mathcal{B}(\mathrm{u})$, $\mathcal{A}(\mathrm{t})$, para todo término t que no contenga a $c$ libre y para todo término u. (b) La única subfórmula de $\mathcal{A}(c)$ es $\mathcal{A}(c)$.

Sobre la base de la lista de postulados de $G1$, verificamos por inducción:

LEMA 33a. *Cada fórmula que ocurre en algún secuente de una demostración en G1 sin corte alguno es una subfórmula de alguna fórmula que ocurre en el secuente final.* (Propiedad de subfórmula).

LEMA 33b. *Cada fórmula que ocurre en el antecedente (consiguiente) de algún secuente de una demostración en G1 sin corte alguno o aplicación de las* $\supset$- *o* $\neg$-*reglas es una subfórmula de alguna fórmula que ocurre en el antecedente (consiguiente) del secuente final.*

El "Hauptsatz" de Gentzen o teorema de la forma normal (Teorema 48 más adelante) afirma que los cortes se pueden eliminar siempre de las demostraciones de todo secuente en el que ninguna variable ocurra unas veces libre y otras ligada.

La restricción de que ninguna variable ocurra unas veces libre y otras ligada no mengua la utilidad del teorema. Porque si en un secuente dado, ocurren variables unas veces libres y otras ligadas, podemos obtener, reemplazando las fórmulas por otras congruentes con ellas, un secuente que satisface la restricción y que es demostrable si y sólo si el dado es demostrable (por el Teorema 47, el Lema 15b § 33, *18a y *18b § 26 y el Corolario 1 del Teorema 46). La restricción es necesaria, tal como ahora ilustramos.

EJEMPLO 4. Consideremos la demostración

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b) \to \mathcal{A}(b)}{\mathcal{B}(c)\ \&\ \mathcal{A}(b) \to \mathcal{A}(b)}\ \&\to}{\forall c(\mathcal{B}(c)\ \&\ \mathcal{A}(b)) \to \mathcal{A}(b)}\ \forall\to}{\forall b\forall c(\mathcal{B}(c)\ \&\ \mathcal{A}(b)) \to \mathcal{A}(b)}\ \forall\to}{\forall b\forall c(\mathcal{B}(c)\ \&\ \mathcal{A}(b)) \to \forall b\mathcal{A}(b)}\ \to\forall \qquad \dfrac{\mathcal{A}(c) \to \mathcal{A}(c)}{\forall b\mathcal{A}(b) \to \mathcal{A}(c)}\ \forall\to}{\forall b\forall c(\mathcal{B}(c)\ \&\ \mathcal{A}(b)) \to \mathcal{A}(c).}\ \text{Corte}$$

No se puede eliminar el corte. Porque, por el Lema 33a, en una demostración sin corte de $\forall b\forall c\,(\mathcal{B}\,(c)\ \&\ \mathcal{A}\,(b)) \to A\,(c)$ ningún secuente puede contener los símbolos $\supset$ y $\neg$; por tanto, no se pueden utilizar las $\supset$- y $\neg$-reglas. En consecuencia, tiene aplicación el Lema 33b. Ahora bien, en el Ejemplo 3 las dos listas de subfórmulas no tienen fórmula alguna en común, de modo que ningún axioma satisface el requisito del Lema 33b. (El método de este ejemplo se desarrollará más adelante en § 80).

En la demostración del teorema de la forma normal, hacemos uso de un sistema formal $G2$ obtenido de $G1$ modificando dos de los postulados, tal como sigue.

Se reemplaza el corte por la regla siguiente, denominada "fusión". Aquí M es una fórmula (la *fórmula de fusión*); $\Pi$, $\Phi$, $\Sigma$, $\Omega$ son secuencias de cero o más fórmulas tales que tanto $\Phi$ como $\Sigma$ contienen a M; y $\Phi_M$ y $\Sigma_M$ son los resultados de suprimir todas las ocurrencias de M en $\Phi$ y $\Sigma$, respectivamente.

$$\dfrac{\Pi \to \Phi \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega.}\ \text{Fusión}$$

EJEMPLO 5. La siguiente es una fusión.

$$\frac{\mathcal{A} \to \mathcal{B} \qquad \mathcal{B} \vee C, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{B} \to}{\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee C, \mathcal{D} \to .} \text{ Fusión}$$

La $\supset \to$ de $G1$ (identificada como $\supset \to_1$) es reemplazada por una nueva ($\supset \to_2$), debida para el sistema clásico a Ketonen 1944, Ahora A, B, $\Gamma$, $\Theta$ se interpretan como anteriormente; y $\Theta^\circ$ es $\Theta$ para el sistema clásico y es vacía para el intuicionista.

$$\frac{\Gamma \to \Theta^\circ, A \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta.} \supset \to_2$$

Todo corte puede ser perfectamente sustituido por una fusión (abajo, a la izquierda), y viceversa (a la derecha), con la ayuda de pasos *ACI*.

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \Lambda, C \qquad C, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \Gamma_C \to \Lambda_C, \Theta}\text{ Fusión}}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Phi \quad \Sigma \to \Omega}{\Pi \to \Phi_M, M \quad M, \Sigma_M \to \Omega}}{\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega.}\text{ Corte}$$

Similarmente, toda $\supset \to_1$ puede ser perfectamente sustituida por una $\supset \to_2$ (abajo), teniendo presente que para el caso intuicionista $\Lambda$ es vacía, según el Lema 32a; y viceversa (se deja al lector).

$$\frac{\dfrac{\Delta \to \Lambda, A}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta^\circ, A} \qquad \dfrac{B, \Gamma \to \Theta}{B, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta}}{A \supset B, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.} \supset \to_2$$

Esto demuestra que los dos cambios no alteran la clase de los secuentes demostrables, como establecemos con detalles adicionales en el Lema 34.

De una demostración en $G1$ o en $G2$ se dice que posee la *propiedad de variable pura*, o que es una *demostración de variable pura*, si ninguna variable ocurre en la demostración unas veces libre y otras ligada, y si para cada aplicación de $\to\forall$ o $\exists \to$ la variable b de la aplicación ocurre tan sólo en secuentes anteriores a la conclusión de la aplicación (en aquellos casos en que A (x) no contenga libre la x, elegimos para el análisis una b que ocurra tan sólo entonces).

LEMA 34. *Si* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en* $G1$, *entonces* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en* $G2$; *e inversamente. La demostración en* $G2$ *contiene una fusión sólo si la demostración en* $G1$ *contiene un corte; e inversamente. Cada demostración contiene aplicaciones de las reglas lógicas de exactamente la misma denominación que la otra. Si una demostración posee la propiedad de variable pura, también la posee la otra. Los Lemas* 32a–33b (*establecidos anteriormente para* $G1$ *y el corte*) *resultan válidos también para* $G2$ *y la fusión.*

LEMA 35. *Una aplicación dada de un postulado de* $G1$ *o* $G2$ *sigue siendo una aplicación del mismo postulado cuando, en el (los) secuente(s) de la aplicación*

*(a saber, el axioma en el caso del esquema axiomático, y la(s) premisa(s) y la conclusión en el caso de una regla de inferencia), una variable es reemplazada exactamente en sus ocurrencias libres (o exactamente en sus ocurrencias ligadas) por otra variable que no figure ni libre ni ligada en el (los) secuente(s) en cuestión.*

El Lema 35, en el caso de una aplicación de $\rightarrow \forall$ o $\exists \rightarrow$, se basa en el hecho de que la b y la x no precisan ser la misma variable (como sí precisaban serlo en sus correspondientes reglas 9 y 12 del sistema *H*).

LEMA 36. *Una aplicación dada de un postulado de G1 o G2 sigue siendo una aplicación del mismo postulado cuando, en el (los) secuente(s) de la aplicación, se reemplaza un término dado por (las ocurrencias libres de) una variable dada siempre que, en el caso de una* $\rightarrow \forall$ *o* $\exists \rightarrow$, (i) *el término no contenga la* b *de la aplicación y* (ii) *la variable no sea la* b *de la aplicación, y además, en todos los casos,* (iii) *el término sea libre con respecto a la variable en cada fórmula del (de los) secuente(s).*

La condición (i) garantiza que se sigue satisfaciendo la restricción sobre variables para una $\rightarrow \forall$ o $\exists \rightarrow$.

LEMA 37. *Dada una demostración en G1 o G2 de un secuente en el que ninguna variable ocurra unas veces libre y otras ligada, mediante reemplazos de ocurrencias libres y ligadas de variables en los secuentes de la demostración (y siendo cada aplicación de un postulado una aplicación del mismo postulado), podemos obtener una demostración del mismo secuente en la que ninguna variable ocurre unas veces libre y otras ligada.*

DEMOSTRACION. Sean $x_1, ..., x_n$ las distintas variables que ocurren libres en el secuente final y ocurren ligadas (en alguna parte) en la demostración, y sean $a_1, ..., a_p$ las diversas variables restantes que ocurren en la demostración unas veces libres y otras, ligadas. Sean $y_1, ..., y_n, b_1, ..., b_p$ variables distintas que no ocurren en la demostración. Reemplácense $x_1, ..., x_n$ en sólo sus ocurrencias ligadas por $y_1, ..., y_n$ respectivamente, y $a_1, ..., a_p$ en sólo sus ocurrencias libres por $b_1, ..., b_p$. En virtud del Lema 35, la figura sigue siendo una demostración y, por la hipótesis de que el secuente final no contiene variable alguna libre unas veces y ligada otras, el secuente final permanece inalterado.

LEMA 38. *Dada una demostración en G1 o G2 en la que ninguna variable ocurre unas veces libre y otras ligada, mediante reemplazos de sólo ocurrencias libres de variables en ella (siendo cada aplicación de un postulado una aplicación del mismo postulado), podemos obtener una demostración de variable pura del mismo secuente.*

DEMOSTRACION. Supongamos que en la demostración dada en *G1* o *G2* existen exactamente $q$ aplicaciones de las reglas $\rightarrow \forall$ y $\exists \rightarrow$ siendo respectivamente las variables $c_1, ..., c_q$ (no necesariamente distintas) las b de las aplicaciones. Elijamos $q$ variables cualesquiera distintas $d_1, ..., d_q$ que no ocurran en la demostración dada. Tomemos una de las aplicaciones supremas (es decir, no precedida de ninguna otra), y digamos que su $b_1$ es $c_1$. Sustituyamos $c_1$ por $d_1$ a lo largo de todos los secuentes que preceden a la conclusión de la aplicación, y sólo en ellos. Por la restricción

sobre variables para $\rightarrow\forall$ y $\exists\rightarrow$, $c_1$ no puede ocurrir libre en la conclusión de la aplicación, y por tanto, haciendo uso del Lema 35, todas las aplicaciones de postulados siguen siendo válidas. Repitamos el proceso, operando en cada ocasión, sobre una de las aplicaciones de $\rightarrow\forall$ o $\exists\rightarrow$ que sea suprema respecto a aquéllas aún no tratadas, hasta que las b de todas las $q$ aplicaciones hayan sido transformadas de c en d. Puesto que cada sustitución altera tan sólo secuentes anteriores a la conclusión de una aplicación de $\rightarrow\forall$ o $\exists\rightarrow$, el secuente final permanece inalterado.

TEOREMA 48. *Dada una demostración en G1 (en G2) de un secuente en el que ninguna variable ocurra unas veces libre y otras, ligada, se puede encontrar otra demostración en G1 (en G2) del mismo secuente que no contenga ningún corte (ninguna fusión). Esta demostración es una demostración de variable pura. Las únicas reglas lógicas aplicadas en ella son reglas aplicadas en la demostración dada.* (Hauptsatz o teorema de la forma normal de Gentzen, 1934-5).

DEMOSTRACION, por reducción del teorema a un lema. En virtud de los Lemas 34, 37 y 38, es suficiente demostrar el teorema para *G2* suponiendo que la demostración dada posee ya la propiedad de variable pura. Lo hacemos, pues, por inducción sobre el número $m$ de fusiones existentes en esta 'demostración dada'. Si $m>0$, debe ocurrir en ella una fusión que no tenga ninguna otra fusión sobre sí. Consideremos la parte de la demostración dada que finaliza con la conclusión $\Pi, \Sigma_M \rightarrow \Phi_M, \Omega$ de esta fusión; denominémosla la 'parte dada'. Supongamos que podemos transformar esta parte dada hasta obtener otra demostración en *G2* de $\Pi, \Sigma_M \rightarrow \Phi_M, \Omega$ sin fusión; llamémosle la 'parte resultante'. Entonces el reemplazo de la parte dada por la parte resultante nos proporciona una nueva demostración en *G2* del mismo secuente con sólo $m-1$ fusiones. Supongamos, además, que la parte resultante puede ser construida de modo tal que posea por sí misma la propiedad de variable pura, y que tampoco contiene ninguna variable libre (ligada; como la b de una $\rightarrow\forall$ o $\exists\rightarrow$) que no ocurriera así en la parte dada. Entonces la nueva demostración en conjunto poseerá la propiedad de variable pura. En consecuencia, podemos aplicar la hipótesis de la inducción para concluir que existe una demostración de variable pura sin fusión alguna. Para demostrar el teorema resta, pues, establecer el siguiente lema.

EJEMPLO 1 (continuación). La parte dada para (a) (reformulada con una fusión en lugar de con un corte) es como sigue.

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b)\rightarrow\mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b)\rightarrow\exists x\mathcal{A}(x)}\rightarrow\exists \qquad \dfrac{\exists x\mathcal{A}(x)\rightarrow\exists x\mathcal{A}(x)}{\neg\exists x\mathcal{A}(x),\exists x\mathcal{A}(x)\rightarrow}\neg\rightarrow}{\mathcal{A}(b),\neg\exists x\mathcal{A}(x)\rightarrow.}\ \text{Fusión}$$

LEMA 39. *Dada una demostración en G2 de* $\Pi, \Sigma_M \rightarrow \Phi_M, \Omega$ *cuyo paso final sea una fusión, y en la que no exista ninguna otra fusión, y que posea la propiedad de variable pura, se puede encontrar en G2 una demostración de* $\Pi, \Sigma_M \rightarrow \Phi_M, \Omega$ *que no contenga ninguna fusión, que posea la propiedad de variable pura, y tal que en ella no ocurra variable alguna libre (ligada; como la* b *de una* $\rightarrow\forall$ *o* $\exists\rightarrow$) *que no ocurriera así en la demostración dada. Sólo se aplican en la demostración*

*resultante reglas lógicas que hayan sido aplicadas en la demostración dada.* (Lema principal).

DEMOSTRACION DEL LEMA PRINCIPAL. Definimos el *rango izquierdo a* de una fusión como el mayor número de secuentes, situados consecutivamente uno sobre otro sobre el origen de una rama que finaliza con la premisa izquierda de la fusión, que contiene en el consiguiente la fórmula de fusión M. El *rango derecho b* se define de un modo similar. El *rango* $r = a + b$ (el menor rango posible es 2). El *grado g* de la fusión es el número ($\geq 0$) de ocurrencias de símbolos lógicos ($\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$) en la fórmula de fusión M.

EJEMPLO 1 (conclusión). El rango izquierdo es 1, el rango derecho 2, el rango 3 y el grado 1.

Se demuestra el lema por inducción de curso-de-valores sobre el grado $g$ de la fusión. Tanto en la base como en el paso inductivo de esta inducción se hace uso de una inducción de curso-de-valores sobre el rango $r$. Ofrecemos un tratamiento por casos, de modo que ordenando los resultados de los casos, se pueden construir fácilmente las bases y los pasos inductivos de las inducciones.

Escribimos la fusión a eliminar así,

$$\frac{\Pi \to \Phi \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega,} \quad \text{o abreviadamente} \quad \frac{S_1 \qquad S_2}{S_3,}$$

donde $M \in \Phi$ y $M \in \Sigma$.

Las letras "A", "B", "C", "D", "$\Gamma$", "$\Theta$", "x", "A(x)", "t", "b" harán referencia a los enunciados de los otros postulados en cuestión.

A. CASOS PRELIMINARES.

CASO 1a: $S_1$ contiene a M en el antecedente, es decir $M \in \Pi$. Entonces la conclusión $\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega$ de la fusión se deriva de su segunda premisa $\Sigma \to \Omega$ por *ACI*, y es en consecuencia demostrable sin fusión. La restricción intuicionista sobre las $\to A$ puede ser satisfecha, puesto que los pasos *ACI* finalizan con el secuente final original, el cual, en virtud del Lema 32a, puede contener en su consiguiente, desde el punto de vista intuicionista, a lo sumo una fórmula.

CASO 2a: el rango izquierdo es 1, y $S_1$ se obtiene por aplicación de una regla estructural. Puesto que $M \in \Phi$, pero no al consiguiente de la premisa utilizada en la inferencia de $S_1$, la inferencia tan sólo puede ser $\to A$ siendo M la C. En consecuencia, la base de la demostración dada es similar a la que se ofrece a continuación a la izquierda, donde $M \notin \Theta$. Transformamos ésta en la figura de la derecha, para obtener una demostración del secuente final original sin fusión.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\ M}\to A \qquad \Sigma \to \Omega}{\Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta, \Omega.}\ \text{Fusión} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta, \Omega.}$$

CASOS 1b, 2 b: Similarmente, leyendo "$S_2$", "consiguiente", "$\Omega$", "derecho" en lugar de "$S_1$", "antecedente", "$\Pi$", "izquierdo", respectivamente. Su tratamiento es simétrico al de los casos 1a y 2a.

B. OTROS CASOS. Para cada uno de estos casos es parte de la hipótesis del caso el que no se aplica ninguno de los cuatro casos preliminares.

B1: el rango es 2. Puesto que se excluyen los Casos 1a y 1b, $S_1$ y $S_2$ deben ser ambos conclusiones de inferencias. Puesto que el rango es 2 y se excluyen los casos 2a y 2b, ambas inferencias deben ser lógicas. Además, ya que el rango es tan sólo 2, M debe ser la fórmula principal de ambas inferencias. Por tanto M contiene algún símbolo lógico y la fusión es de grado $\geq 1$. En consecuencia, estos casos pueden presentarse solamente en el paso inductivo de la inducción sobre el grado y en su tratamiento es legítimo usar la hipótesis de la inducción sobre el grado. Las reglas de que se hace uso en la inferencia de $S_1$ y $S_2$ pueden ser solamente la que introduce el símbolo lógico principal de M en el consiguiente, y la que introduce el mismo símbolo en el antecedente, respectivamente. Por tanto en B1 tenemos tan sólo los seis casos siguientes.

CASO 3: $S_1$ se obtiene por $\rightarrow \supset$, y $S_2$ por $\supset \rightarrow$, y M es la fórmula principal $A \supset B$. Por tanto el origen de la demostración dada es como sigue, donde $A \supset B \in \Theta, \Gamma$ ya que el rango es solamente 2.

$$\dfrac{\dfrac{A, \Pi \rightarrow \Theta, B}{\Pi \rightarrow \Theta, A \supset B} \rightarrow\supset \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \Omega^{\circ}, A \qquad B, \Gamma \rightarrow \Omega}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Omega} \supset\rightarrow}{\Pi, \Gamma \rightarrow \Theta, \Omega.} \text{ Fusión}$$

Transformamos ésta en la siguiente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \rightarrow \Omega^{\circ}, A \qquad A, \Pi \rightarrow \Theta, B}{\Gamma, \Pi_A \rightarrow \Omega^{\circ}_A, \Theta, B} \text{ Fusión} \qquad B, \Gamma \rightarrow \Omega}{\Gamma, \Pi_A, \Gamma_B \rightarrow \Omega^{\circ}_{AB}, \Theta_B, \Omega} \text{ Fusión}}{\Pi, \Gamma \rightarrow \Theta, \Omega.}$$

La fusión superior es de grado inferior al de la original, por lo que, en virtud de la hipótesis de la inducción sobre el grado, puede ser eliminada, es decir se puede encontrar para su conclusión una demostración sin fusión. La fusión inferior entonces no tendrá fusión alguna sobre ella y podrá igualmente ser eliminada. En consecuencia obtenemos una demostración del secuente final original $\Pi, \Gamma \rightarrow \Theta, \Omega$ sin fusión.

CASO 4: $S_1$ se obtiene por $\rightarrow \&$, y $S_2$ por $\& \rightarrow$, y M es la fórmula principal $A \& B$.

CASO 5: $S_1$ se obtiene por $\rightarrow \vee$, y $S_2$ por $\vee \rightarrow$, y M es la fórmula principal $A \vee B$. Su tratamiento es dual al del caso 4.

CASO 6: $S_1$ se obtiene por $\rightarrow \neg$, y $S_2$ por $\neg \rightarrow$, y M es la fórmula principal $\neg A$.

CASO 7: $S_1$ se obtiene por $\rightarrow \forall$, y $S_2$ por $\forall \rightarrow$, y M es la fórmula principal $\forall x A(x)$. Tenemos como figura dada, en la que $\forall x A(x) \notin \Theta, \Gamma$,

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \rightarrow \Theta, A(b)}{\Pi \rightarrow \Theta, \forall x A(x)} \rightarrow \forall \qquad \dfrac{A(t), \Gamma \rightarrow \Omega}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow \Omega} \forall \rightarrow}{\Pi, \Gamma \rightarrow \Theta, \Omega.} \text{ Fusión}$$

Para la construcción de la figura modificada, necesitaremos una demostración de $\Pi \rightarrow \Theta$, A (t). Si A (x) no contiene la x libre, entonces A (b) y A (t) son la misma fórmula y ya la tenemos. Supongamos ahora que A (x) contiene la x libre. Entonces A (t) contiene a t, y por lo tanto, puesto que t es libre con respecto a x en A (x), las variables de t ocurren libres en A (t). Por tanto, si tenemos en cuenta la propiedad de variable pura de la demostración dada de $\Pi, \Gamma \rightarrow \Theta, \Omega$, podemos concluir que (i) ninguna variable de t es la b de una $\rightarrow \forall$ o $\exists \rightarrow$ en la demostración de $\Pi \rightarrow \Theta$, A (b) en la rama izquierda de nuestra figura, (ii) nuestra b no es la b de una $\rightarrow \forall$ o $\exists \rightarrow$ en la misma, y (iii) t es libre con respecto a b en todas las fórmulas de la misma (porque la propiedad de variable pura prohíbe que variable alguna ocurra unas veces libre y otras, ligada). Además, en atención a la restricción sobre variables correspondiente a la $\rightarrow \forall$ presentada, (iv) b no ocurre en $\Pi, \Theta$. Por lo tanto, haciendo uso del Lema 36, mediante la sustitución de b por t en la demostración de $\Pi \rightarrow \Theta$, A (b) obtenemos una demostración de $\Pi \rightarrow \Theta$, A (t). Si se hace uso de esta demostración en la figura modificada como sigue, la nueva demostración de $\Pi, \Gamma \rightarrow \Theta, \Omega$ así obtenida poseerá la propiedad de variable pura y no contendrá variable libre (ligada; como la b de una $\rightarrow \forall$ o $\exists \rightarrow$) alguna que previamente no ocurriera en tal condición.

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \rightarrow \Theta, A(t) \qquad A(t), \Gamma \rightarrow \Omega}{\Pi, \Gamma_{A(t)} \rightarrow \Theta_{A(t)}, \Omega}}{\Pi, \Gamma \rightarrow \Theta, \Omega.} \text{ Fusión}$$

CASO 8: $S_1$ se obtiene por $\rightarrow \exists$, y $S_2$ por $\exists \rightarrow$, y M es la fórmula principal $\exists x A(x)$. Dual del caso 7.

B2: El rango es $> 2$. Estos casos pueden ocurrir solamente en el paso inductivo de una inducción sobre el rango (o en la base, o el paso inductivo, de la inducción sobre el grado). Por lo tanto, al tratarlos tiene validez la hipótesis de la inducción sobre el rango.

B2.1.: el rango izquierdo es $\geq 2$. Entonces M ocurre en el consiguiente de al menos una de las premisas de la inferencia de $S_1$.

CASO 9a: $S_1$ se obtiene por una regla estructural *S* de consiguiente y M no es la C ni la D, o $S_1$ se obtiene por una regla estructural *S* de antecedente. Sea la figura dada tal como se muestra a la izquierda. Modificamos dicha figura tal como se muestra a la derecha (sigue explicación).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \to \Phi_1}{\Pi \to \Phi}\,S \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}\ \text{Fusión}}{\qquad}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \to \Phi_1 \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi_1,\ \Sigma_M \to \Phi_{1M}, \Omega}\ \text{Fusión}}{\Pi_1,\ \Sigma_M \to \Omega,\ \Phi_{1M}}}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Omega,\ \Phi_M}\,S}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}$$

Puesto que $M \in \Phi_1$ (por B2.1), podemos tomar $\Pi_1 \to \Phi_1$ como primera premisa de la nueva fusión. Por la hipótesis del caso y la forma de las reglas estructurales de una premisa, verificamos que la nueva $S$ es correcta. En la figura modificada, el rango de la fusión es menor que en la original. En consecuencia, por la hipótesis de la inducción sobre el rango, podemos encontrar una demostración de su conclusión, y por tanto del secuente final original, sin fusión.

CASO 10a: $S_1$ se obtiene por una regla estructural $S$ de consiguiente y M es la C o la D. Sea la premisa $\Pi \to \Phi_1$. Por la forma de las reglas estructurales de consiguiente, verificamos que entonces $\Phi_{1M}$ y $\Phi_M$ son idénticas.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Phi_1}{\Pi \to \Phi}\,S \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}\ \text{Fusión}}{\qquad}$$

$$\dfrac{\Pi \to \Phi_1 \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega.}\ \text{Fusión}$$

CASO 11a: $S_1$ se obtiene por una regla lógica $L$ de una premisa. La inferencia por una de estas reglas que da $S_1$ tiene la forma

$$\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2}{\Xi_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Xi_2}\,L$$

donde cada una de las secuencias $\Lambda_1, \Lambda_2$ es o una fórmula lateral o vacía, y una de las secuencias $\Xi_1, \Xi_2$ es la fórmula principal mientras que la otra es vacía.

SUBCASO 1: $\Xi_2$ no es M. Entonces $M \in \Theta$, ya que $M \in \Theta, \Xi_2$. Escribimos así la figura dada.

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2}{\Xi_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Xi_2}\,L \qquad \Sigma \to \Omega}{\Xi_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Xi_2,\ \Omega.}\ \text{Fusión}$$

La transformamos en ésta (sigue explicación).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2 \qquad \Sigma \to \Omega}{\Lambda_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Lambda_{2M}, \Omega}\ \text{Fusión}}{\Lambda_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Omega,\ \Lambda_2}}{\Xi_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Omega,\ \Xi_2}\,L}{\Xi_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Xi_2, \Omega.}$$

La nueva $L$ tiene $\Gamma, \Sigma_M$ por $\Gamma$ y $\Theta_M, \Omega$ por $\Theta$. La conclusión de la nueva $L$ es el secuente final original, excepto en el orden de las fórmulas en el consiguiente. Esto nos permite inferir que, si $L$ es $\rightarrow\forall$ o $\exists\rightarrow$, se satisface la restricción sobre variables para la nueva aplicación, ya que por la propiedad de variable pura de la demostración dada la b no puede ocurrir en el secuente final original. Si la demostración dada es intuicionista, entonces (por el Lema 32a), $\Theta, \Lambda_2$ consta a lo sumo de una fórmula. Pero $M \in \Theta$; por lo tanto $\Lambda_2$ es vacía. En consecuencia, los pasos *ACI* que preceden a la nueva $L$ no precisan violación alguna de la restricción intuicionista en $\rightarrow A$. (La posibilidad de que la nueva $L$ sea una $\rightarrow\neg$ violando la restricción intuicionista queda descartada a priori si comparamos su conclusión con el secuente final dado; pero de hecho $L$ no puede ser $\rightarrow\neg$). El rango de la nueva fusión es menor en uno que el original.

SUBCASO 2: $\Xi_2$ es M. Entonces $\Xi_1$ es vacía y la omitimos en la escritura de la figura dada.

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda_1, \Gamma \rightarrow \Theta, \Lambda_2}{\Gamma \rightarrow \Theta, M}\, L \qquad \Sigma \rightarrow \Omega}{\Gamma, \Sigma_M \rightarrow \Theta_M, \Omega.}\ \text{Fusión}$$

Puesto que $\Xi_2$ es M, $\Lambda_2$ no es M (y, en consecuencia, $M \in \Theta$, ya que $M \in \Theta, \Lambda_2$ por B2.1). Puesto que se excluye el caso 1b, $M \notin \Omega$. Hacemos uso de estos hechos al escribir las fusiones en la figura modificada así.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda_1, \Gamma \rightarrow \Theta, \Lambda_2 \qquad \Sigma \rightarrow \Omega}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \rightarrow \Theta_M, \Lambda_2, \Omega}\ \text{Fusión}}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \rightarrow \Theta_M, \Omega, \Lambda_2}}{\dfrac{\Gamma, \Sigma_M \rightarrow \Theta_M, \Omega, M}{\Gamma, \Sigma_M, \Sigma_M \rightarrow \Theta_M, \Omega, \Omega}\ \text{Fusión}}\, L \qquad \Sigma \rightarrow \Omega}{\Gamma, \Sigma_M \rightarrow \Theta_M, \Omega.}$$

Si $L$ es $\rightarrow\forall$ o $\exists\rightarrow$, se satisface la restricción sobre variables ya que $\Gamma, \Sigma_M, \Theta_M, \Omega$, M ocurren todas en la demostración dada de variable pura en lugares distintos a los de antes de la conclusión de la $L$ original. (Ahora bien, $L$ no puede ser $\exists\rightarrow$). Desde el punto de vista intuicionista este subcaso no puede tener lugar, ya que el secuente $\Gamma \rightarrow \Theta$, M que ocurre en la demostración dada contiene más de un M en su consiguiente. En la figura alterada la fusión superior tiene rango menor en uno que la fusión original; por consiguiente, en virtud de la hipótesis de la inducción sobre el rango, puede ser eliminada. Entonces la fusión inferior no tendrá sobre sí fusión alguna. Puesto que $M \notin \Omega, \Lambda_2$, el rango de izquierda será sólo 1, mientras que el rango de derecha será el mismo que en la fusión original. Dado que por hipótesis el rango de izquierda era en principio $\geq 2$, el rango de esta fusión es menor que el de la original; y en consecuencia, por la hipótesis de la inducción sobre el rango, dicha fusión puede también ser eliminada.

CASO 12a: $S_1$ se obtiene por aplicación de una regla lógica $L$ de dos premisas, que no sea la $\supset\rightarrow$ intuicionista. La inferencia que proporciona $S_1$ puede escribirse así:

$$\frac{\Lambda_{11}, \Gamma \to \Theta, \Lambda_{12} \quad \Lambda_{21}, \Gamma \to \Theta, \Lambda_{22}}{\Xi_1, \Gamma \to \Theta, \Xi_2.} L$$

El modo de tratarlo es similar al del Caso 11a. Ambas premisas se fusionan con $\Sigma \to \Omega$ (téngase presente que $M \varepsilon \Theta$) con anterioridad a la $L$ en la figura modificada.

CASO 13: $S_1$ se obtiene por aplicación de la $\supset \to$ intuicionista. Puesto que $M \varepsilon \Theta$ y $\Theta$ consta a lo sumo de una fórmula, $\Theta$ es M. Sólo la segunda premisa B, $\Gamma \to M$ se fusiona en la figura alterada con $\Sigma \to \Omega$.

B2.2. CASOS 9b–12b. Enunciado y modo de tratarlos simétricos a los de los casos 9a–12a, excepto en lo que sigue. Las verificaciones intuicionistas para el Caso 11b son inmediatas. (El Subcaso 2 puede surgir en el punto de vista intuicionista.) El modo de tratar la $\supset \to$ intuicionista puede ser incluida en el Caso 12b si escribimos $\Theta^\circ$ en la primera premisa; la verificación de que la nueva $\supset \to$ tiene un secuente vacío para su $\Theta^\circ$ se consigue observando que desde el punto de vista intuicionista la $\Phi$ de la fusión es simplemente M.

Curry 1939 presentó la siguiente aplicación del Teorema 48 al sistema intuicionista.

TEOREMA 49. *Si una fórmula* E *es demostrable en el sistema H intuicionista (clásico), es demostrable haciendo uso tan sólo de los* $\supset$*-postulados (los* $\supset$*- y* $\neg$*-postulados) y de los postulados de aquellos símbolos lógicos que figuran en la fórmula, siempre que, en el caso de que* $\forall$ *ocurra y* & *no, los* $\forall$*-postulados incluyan el Esquema Axiomático* 9a *del Lema* 11 § 24.

DEMOSTRACION. Por aplicación del Lema 33a, ninguna regla lógica, a excepción de las reglas de los símbolos lógicos que figuran en el secuente final, puede ser aplicada en una demostración sin corte en *G*1. El teorema se sigue de los Teoremas 46 (aplicando la primera parte tan sólo), 48 y 47 (ambas partes), si ninguna variable figura en E unas veces libre y otras, ligada; en otro caso hágase uso también de la Observación 1 (c) § 33.

El libro de Curry de 1950 (no disponible durante la redacción de los presentes §§ 77–80) contiene contribuciones a la teoría de los sistemas de tipo Gentzen y una bibliografía completa. Curry utiliza la denominación "teorema de eliminación" para el Hauptsatz. Nuestra denominación "teorema de la forma normal" intenta sugerir el sentido del teorema, al ser expuesto simplemente, sin ofrecer detalles del sistema de Gentzen, de que la forma normal es una de las formas posibles para demostraciones; y hemos reservado la de "teorema de eliminación" para aquellos casos en que se elimine un símbolo o notación, como en § 74. (Ahora bien, "forma normal" tiene la desventaja similar de que hace referencia comúnmente a una de las formas posibles para fórmulas, como en §§ 29, 76.)

Las dos próximas secciones, en las que se presentan dos aplicaciones del teorema, pueden ser leídas independientemente la una de la otra.

* § 79. **Demostraciones de consistencia.** Respecto de *G*1 o *G*2, denominamos *inferencia estructural* a una aplicación de alguna de las reglas estructurales; *inferencia*

*proposicional*, a la de una de las reglas lógicas del cálculo proposicional; *inferencia de predicados*, a la de una de las reglas lógicas adicionales del cálculo de predicados.

Bajo supuestos especiales relativos a la forma del secuente final, puede conseguirse aún otra normalización de demostraciones, como se afirma en el "Hauptsatz extendido" que sigue, presentado por Gentzen 1934-5 para su sistema clásico. (Está en íntima relación con el teorema de Herbrand de 1930.) Tal como Gentzen hizo notar, la demostración es una ilustración de las posibilidades de permutar inferencias en sus sistemas. Dichas posibilidades son analizadas en Curry 1952 respecto del sistema clásico de su 1950, y en Kleene 1952 respecto de los sistemas clásico e intuicionista aquí descritos. Por ejemplo:

TEOREMA 50. *Dado un secuente que contenga sólo fórmulas prenexas y en el que ninguna variable ocurra unas veces libre y otras ligada, y dada una demostración de dicho secuente en el sistema clásico G1 (el sistema intuicionista G1 sin* $\mathbf{V}\rightarrow$*), puede hallarse en el mismo sistema una demostración del mismo secuente que no contenga corte alguno y en la que existe una (ocurrencia de) un secuente* S (denominado el *secuente medio*) *tal que ningún cuantificador ocurre en* S, *y la parte de la demostración que comprende desde* S *al secuente final consta únicamente de inferencias de predicados y estructurales. La demostración nueva es una demostración de variable pura. Similarmente, leyendo "G2", "fusión" en sustitución de "G1", "corte", respectivamente.*

DEMOSTRACION, por reducción del teorema a un lema. Suponemos que el Teorema 48 ha sido ya aplicado, de modo que operamos con una demostración dada de variable pura en *G1* sin corte (o en *G2* sin fusión). Por la propiedad de la subfórmula, en los secuentes de dicha demostración sólo pueden ocurrir fórmulas prenexas.

Consideremos en la demostración dada cualquier axioma que contenga cuantificadores, y digamos que $\forall$ acaece en primer lugar. Podemos reemplazar el axioma (izquierda) por la siguiente figura (derecha),

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x A(x), \qquad \dfrac{\dfrac{A(b) \rightarrow A(b)}{\forall x A(x) \rightarrow A(b)}\ \forall \rightarrow}{\forall x A(x) \rightarrow \forall x A(x),}\ \rightarrow \forall$$

en la que b es una variable que no ocurre previamente en la demostración. La fórmula A(b) del nuevo axioma contiene un cuantificador menos que la fórmula $\forall x A(x)$ del axioma original. Similarmente, si $\exists$ acaece en primer lugar. Por inducción sobre la suma de los números de cuantificadores existentes en las fórmulas de todos los axiomas, podemos, pues, eliminar los axiomas que contengan cuantificadores a lo largo de toda la demostración dada (reteniendo sus restantes características mencionadas).

Supongamos ahora que, tal como establecemos en el lema que sigue, podemos reordenar las inferencias lógicas en dicha demostración (reteniendo sus restantes características) de modo tal que cada inferencia de predicados sigue a todas las inferencias proposicionales. Entonces existirá (una ocurrencia de) un secuente $S_1$ por debajo de la cual la demostración contiene inferencias tan sólo de predicados y estructurales (sin ramificación alguna, puesto que las reglas en consideración son todas reglas de una premisa) y por encima de la cual la demostración contiene infe-

rencias tan sólo proposicionales y estructurales. En $S_1$ y por encima de él pueden existir ocurrencias de fórmulas con cuantificadores. Sin embargo, ninguna de ellas figura como fórmula lateral de una inferencia proposicional, ya que la fórmula principal resultante no sería prenexa. Ninguna de ellas figura como fórmula principal, ya que no existe ninguna inferencia de predicados en esta parte de la demostración. Ninguna de ellas figura en un axioma, tal como previamente se ha dispuesto. En consecuencia, toda aplicación de postulado que tenga lugar en la parte de la demostración que comprende hasta $S_1$ inclusive, seguirá siendo correcta si modificamos dicha parte de la demostración suprimiendo en ella toda ocurrencia de una fórmula que contenga un cuantificador, con la salvedad de que algunas de las inferencias estructurales pueden con ello resultar inferencias idénticas (con una misma premisa y conclusión), en cuyo caso pueden ser omitidas. Esta modificación reemplazará $S_1$ por un secuente S que no contiene cuantificador alguno, pero de S podemos pasar a $S_1$ mediante cero o más pasos *A* e *I*, y, en consecuencia, valiéndonos de la parte inalterada de la demostración que hace uso de inferencias tan sólo de predicados y estructurales, pasar al secuente final primitivo. De este modo obtenemos la nueva demostración tal como ha sido descrita en el teorema, siendo S el secuente medio.

LEMA 40. *Dada en el sistema clásico G1 (el sistema intuicionista G1 sin* $\forall \rightarrow$*) una demostración de variable pura sin corte de un secuente que contenga tan sólo fórmulas prenexas, puede encontrarse una demostración del mismo secuente tal que en ella cada inferencia de predicados sigue a toda inferencia proposicional. En la nueva demostración ocurren como axiomas los mismos secuentes que en la demostración dada. Similarmente, leyendo "G2" y "fusión" en sustitución de "G1" y "corte", respectivamente.*

DEMOSTRACION DEL LEMA. Consideremos una inferencia de predicados en la demostración dada y contemos el número de inferencias proposicionales que ocurren en la rama que desciende desde su conclusión hasta el secuente final de la demostración entera. A la suma de dichos números, relativos a todas las inferencias de predicados existentes en la demostración, la denominamos *orden* de la demostración. Establecemos el lema por inducción sobre el orden.

Si el orden no es 0, existe alguna inferencia de predicados tal que por debajo de ella ocurre alguna inferencia proposicional sin que medie inferencia lógica alguna.

CASO 1: La inferencia de predicados es una $\rightarrow \forall$, y la primera inferencia proposicional inferior a ella es una inferencia *L* de una premisa. Tal como se ha indicado anteriormente en virtud de la propiedad de subfórmula, la $\forall x A(x)$ de la $\rightarrow \forall$ no puede ser la fórmula lateral de la inferencia *L*. Por lo tanto la figura dada es tal como se presenta a la izquierda. Clásicamente transformamos ésta en la figura que se presenta a la derecha.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ A(b)}{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, \forall x A(x)} \rightarrow \forall}{\Gamma_2 \rightarrow \Phi,\ \forall x A(x), \Theta_2}}{\Gamma_3 \rightarrow \Phi,\ \forall x A(x), \Theta_3.} L \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ A(b)}{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1,\ A(b),\ \forall x A(x)} A}{\Gamma_2 \rightarrow \Phi,\ A(b),\ \forall x A(x), \Theta_2}}{\dfrac{\Gamma_3 \rightarrow \Phi,\ \forall x A(x),\ \Theta_3, A(b)}{\Gamma_3 \rightarrow \Phi,\ \forall x A(x),\ \Theta_3.} \rightarrow \forall} L$$

La $\rightarrow A$ ha de prever la posibilidad de que los pasos *ACI* de la figura dada incluyan una $\rightarrow C$ en la que $\forall x A(x)$ sea $C$. La propiedad de variable pura garantiza el que se satisfaga la restricción sobre variables para la $\rightarrow \forall$ de la figura transformada. Intuicionistamente $\Theta_1$, $\Phi$, $\Theta_2$ y $\Theta_3$ son todas vacías, y por tanto, omitimos la $\rightarrow A$ en la construcción de la figura transformada. La transformación hace decrecer el orden de la demostración en 1.

CASO 2: $\rightarrow \forall$ seguida de una inferencia proposicional $L$ de dos premisas. Desde el punto de vista clásico el modo de tratarlo sólo ha de ser alterado de modo que presente una premisa extra (ya izquierda, ya derecha) antes de la $L$, precedida en la figura transformada (excepto cuando $L$ es $\supset \rightarrow_1$) por una $\rightarrow A$. Desde el punto de vista intuicionista $L$ puede ser tan sólo $\supset \rightarrow$, con la premisa extra a la izquierda.

CASOS 3–8. El modo clásico e intuicionista de tratar los casos de $\forall \rightarrow$ seguido por una inferencia proposicional tanto de una como de dos premisas es esencialmente simétrico al modo clásico de tratar $\rightarrow \forall$. Los cuatro casos de $\rightarrow \exists$ y $\exists \rightarrow$ se siguen por dualidad.

EJEMPLO 1. El Teorema 50 no es válido para el sistema intuicionista $G1$ con $\vee \rightarrow$. Porque consideremos la siguiente demostración.

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(a)}{\mathcal{A}(a) \rightarrow \exists x \mathcal{A}(x)} \rightarrow \exists \qquad \dfrac{\mathcal{A}(b) \rightarrow \mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b) \rightarrow \exists x \mathcal{A}(x)} \rightarrow \exists}{\mathcal{A}(a) \vee \mathcal{A}(b) \rightarrow \exists x \mathcal{A}(x).} \vee \rightarrow$$

Supongamos que existiera otra demostración como se describe en el teorema. Entonces el secuente medio S debería tener la forma $\Pi \rightarrow \Phi$ donde $\Pi$ consta de cero o más ocurrencias de $A(a) \vee \mathcal{A}(b)$ y $\Phi$ es vacía o es $\mathcal{A}(t)$ para algún término t, puesto que, leyendo en sentido ascendente desde el secuente final hasta S, los pasos *ACI* (si los hay) pueden tan sólo suprimir, duplicar o permutar fórmulas, pero no introducir nuevas fórmulas, y las inferencias de predicados (si las hay) pueden solamente ser una $\rightarrow \exists$ que (leyendo en sentido ascendente) convierte $\exists x A(x)$ en $\mathcal{A}(t)$. Pero entonces, en virtud de los Lemas 33a y 33b aplicados como en el Ejemplo 4 § 78, si $\Pi$ o $\Phi$ fuesen vacías, $\Pi \rightarrow \Phi$ no sería demostrable en $G1$ sin corte. Así, consideremos e. g. el caso en que $\Pi \rightarrow \Phi$ es $\mathcal{A}(a) \vee \mathcal{A}(b) \rightarrow \mathcal{A}(t)$. El término t puede ser $a$ o $b$ o ninguna de las dos. Consideremos e. g. el caso en que t es $a$. Entonces, en virtud del Corolario del Teorema 47, $\mathcal{A}(a) \vee \mathcal{A}(b) \supset \mathcal{A}(a)$ sería demostrable en el cálculo proposicional $H$; y por el Teorema 4 § 25, también lo sería $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, en contradicción con el Teorema 9 § 28.

EL TEOREMA DE CONSISTENCIA. Gentzen ilustró el uso de su Hauptsatz extendido estableciendo demostraciones de consistencia tales como habían sido previamente obtenidas por Ackermann, von Neumann y Herbrand. Bernays 1936 y Hilbert y Bernays 1939 establecieron para las teorías axiomáticas un teorema general de consistencia que basaron en el procedimiento de Ackermann. Establecemos ahora tal teorema.

El teorema puede utilizarse en la inferencia metamatemática, desde la teoría de números, la geometría o el álgebra, de la consistencia de una teoría axiomática siempre que pueda establecerse constructivamente, es decir, en términos finitistas, un

modelo de la teoría, o sea, en términos más precisos, un modelo de sus nociones y axiomas (§ 14).

Se ha de formalizar la teoría como un sistema formal, cuyos términos y fórmulas se construyen haciendo uso del simbolismo lógico del cálculo de predicados *H* con determinados símbolos individuales $e_1, ..., e_q$, símbolos de función $f_1, ..., f_r$ y símbolos predicativos $P_1, ..., P_s$. El sistema puede tener un número finito o infinito de axiomas además de los postulados del cálculo de predicados *H*.

Para establecer un modelo constructivo debemos partir de un dominio *D* de objetos que o es finito (y no-vacío) o es enumerablemente infinito. Podríamos convenir que *D* fuesen en todo caso los números naturales *N* adoptando una determinada enumeración efectiva del mismo cuando no sea éste ya el caso (con repeticiones si es finito), y operando posteriormente con los índices de dicha enumeración en vez de hacerlo con los objetos originales. Pero en la práctica es conveniente tratar directamente otros dominios. El caso de un dominio finito admite un modo más simple de tratarlo desde el Teorema 20 § 36 extendido hasta incluir símbolos individuales y de función en el método de evaluación.

En el establecimiento de un modelo, el paso siguiente consiste en interpretar los símbolos individuales, los de función y los predicativos en el dominio *D*, es decir, en elegir en *D* objetos $e_1, ..., e_q$ como valores de $e_1, ..., e_q$, funciones $f_1, ..., f_r$ con variables independiente que fluctúan sobre *D* y valores de *D* como valores de $f_1, ..., f_r$, y, finalmente, funciones lógicas o predicados $P_1, ..., P_s$ con variables independientes que fluctúan sobre *D* como valores de $P_1, ..., P_s$. Para que el modelo sea constructivo, $f_1, ..., f_r$ deben ser funciones efectivamente calculables y $P_1, ..., P_s$, predicados efectivamente decidibles. Decimos en tal caso que $e_1, ..., e_q, f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s$ es una *interpretación efectiva* de $e_1, ..., e_q, f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s$ en *D*. (Si *D* es *N*, en virtud de las tesis de Church §§ 60, 62 podemos esperar que $f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s$ sean recursivas generales, en cuyo caso tenemos una *interpretación recursiva general*. Sin embargo la teoría de consistencia no precisa ser referida a las tesis de Church, puesto que meramente necesitamos asegurarnos en cada aplicación del teorema de consistencia de que los $f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s$ particulares de que hacemos uso son efectivos).

Dada una interpretación efectiva, y con las tablas de verdad de dos valores para $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ (§ 28), tenemos un método de evaluación mediante el cual, dada una fórmula $A(x_1, ..., x_n)$ que no contenga cuantificador alguno y tan sólo las distintas variables $x_1, ..., x_n$, podemos, para cada *n*-tuplo $x_1, ..., x_n$ de objetos de *D* como valores de $x_1, ..., x_n$, determinar efectivamente que el valor de $A(x_1, ..., x_n)$ es t (verdadero) o que es f (falso). (Si *D* es *N*, en virtud de # # A, C, D § 45, el predicado $A(x_1, ..., x_n)$ que la fórmula entonces expresa es recursivo primitivo en $f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s$).

Dado *N* como dominio *D*, en lugar de hablar del valor de $A(x_1, ..., x_n)$ cuando $x_1, ..., x_n$ toman como valores los números naturales $x_1, ..., x_n$, es usualmente más conveniente hablar del valor de $A(\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_n)$ (donde $\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_n$ son los numerales de los números naturales $x_1, ..., x_n$, respectivamente). Si hacemos esto, $A(\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_n)$ es una fórmula en el simbolismo extendido, si es necesario, hasta incluir 0 como símbolo individual y $'$ como símbolo de función, y la interpretación se amplía a dar a 0 y a $'$ sus valores usuales. Podemos suponer que los símbolos originales no han incluido a 0 o a $'$, a menos que en la interpretación original reciban el valor usual. Podemos proceder de un modo similar cuando *D* no es *N*. Se debe disponer de un término particular invariable $\mathfrak{x}$ (el análogo de un numeral)

para cada objeto $x$ de $D$; y el simbolismo e interpretación se extienden (si es necesario) hasta incluir dichos términos (de un modo consistente con la interpretación original). En ambos casos, diremos ahora simplemente "número" por miembro $x$ de $D$, y "numeral" por el término $\mathbf{x}$ sin variables que denota $x$. La extensión del simbolismo (cuando sea necesaria) juega el papel de medio auxiliar en la descripción del método de evaluación y no precisamos aplicarla al sistema formal en consideración, excepto cuando lo indiquemos explícitamente.

En el modelo, o sea, tras la selección del dominio y de la interpretación de las constantes no lógicas, los axiomas deben ser verdaderos. Dado que los axiomas contendrán (en general) variables, precisamos de un sentido de 'verdadero' más general que el proporcionado por el método de evaluación. Lo formularemos aquí para fórmulas prenexas tan sólo (Teorema 19 § 35). Consideremos primero una fórmula prenexa clausurada, e. g. y sólo como ilustración $\exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$ en la que $A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$ no contiene cuantificador alguno y tan sólo las distintas variables presentadas; llamemos "G' a esta fórmula. Bajo la interpretación de $e_1, ..., e_q, f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s$ y las usuales significaciones de los cuantificadores, G es verdadera si y sólo si existe un número $y_1$ tal que, para cada número $x_1$, existe un número $y_2$ dependiente de $x_1$ (representemos esto por "$y_2(x_1)$"), tal que, para cada número $x_2$, existe un número $y_3$ dependiente de $x_1$ y $x_2$ (representemos esto por "$y_3(x_1, x_2)$"), tal que

$$\text{(I)} \qquad A(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2(x_1), \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_3(x_1, x_2))$$

(donde $\mathbf{y}_2(x_1)$ es el numeral del número $y_2(x_1)$, etc.) tiene el valor t. Por motivos metamatemáticos, deseamos además que la existencia se entienda de un modo constructivo, lo que quiere decir que el $y_1$, el $y_2(x_1)$ (para todo $x_1$ dado) y el $y_3(x_1, x_2)$ (para todo $x_1, x_2$ dado) puedan ser encontrados. Ello implica que $y_2(x_1)$ e $y_3(x_1, x_2)$ son funciones efectivamente calculables. Decimos, pues, que G es *efectivamente verdadera*, si existe un número $y_1$ y unas funciones efectivamente calculables $y_2(x_1)$ e $y_3(x_1, x_2)$ tales que, para todo $x_1$ y $x_2$, (I) es t. (Si $D$ es $N$, en virtud de las tesis de Church podemos esperar que $y_2(x_1)$ e $y_3(x_1, x_2)$ sean recursivas generales, en cuyo caso decimos que G es *verdadera de modo recursivamente general.*) Una fórmula prenexa abierta será *efectivamente (de modo recursivamente general) verdadera*, si lo es su clausura. Una fórmula sin cuantificadores se califica de *verificable* si para cada sustitución de sus variables por numerales la fórmula resultante toma el valor t por el método de evaluación, es decir, en la presente terminología, si la fórmula sin cuantificadores es efectivamente verdadera.

De hecho, nuestro requisito de que $y_2(x_1)$ e $y_3(x_1, x_2)$ sean efectivamente calculables sólo hace hincapié en aquello que en todo caso estaría implicado por el uso constructivo del cuantificador existencial; por otra parte (va implícito) también la hipótesis del teorema debe ser satisfecha de modo constructivo para concluir metamatemáticamente la consistencia, p. ej. el número $y_1$ y la descripción de las funciones $y_2(x_1)$ e $y_3(x_1, x_2)$ deben ser efectivamente dadas, y la demostración de que (I) es t para todo $x_1$ y $x_2$ debe hacerse mediante razonamientos finitistas (cfr. las observaciones sobre la conversa de las tesis de Church § 62).

Denominamos *fórmula prenexa* $\forall\exists$ a toda fórmula en la que ningún cuantificador $\forall$ sigue a un cuantificador $\exists$.

TEOREMA 51. *Constrúyanse los términos y las fórmulas haciendo uso del simbolismo lógico del cálculo H de predicados con* $e_1, ..., e_q, f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s$ *como*

*constantes no lógicas. Para todo dominio dado D y evaluación efectiva de dichas constantes en D:*

(a) *Si* $\Gamma$ *son fórmulas prenexas cerradas efectivamente verdaderas*, E *es una fórmula prenexa* $\forall$ E *cerrada, y* $\Gamma \vdash$ E *en el cálculo H de predicados, entonces* E *es efectivamente verdadera.*

(b) *Para todo sistema formal S cuyos postulados son los del cálculo H de predicados y cada uno de cuyos axiomas es (o es equivalente en H a) una fórmula prenexa efectivamente verdadera: Si* E *es una fórmula prenexa* $\forall\exists$, *y* $\vdash$ E *en S, entonces* E *es efectivamente verdadera.* En particular: *S es simplemente consistente.*

DEMOSTRACION DE (b) A PARTIR DE (a). {$\vdash$E en $S$} $\rightarrow$ {$\Gamma \vdash$E en $H$, donde $\Gamma$ es una lista finita de axiomas no lógicos de $S$} $\rightarrow$ {$\Gamma_1 \vdash E_1$ en $H$, donde $\Gamma_1$ son las clausuras de las equivalentes prenexas efectivamente verdaderas de $\Gamma$, que son asimismo efectivamente verdaderas, y $E_1$ es la clausura de E} $\rightarrow$ {$E_1$ es efectivamente verdadera} (por (a) con $\Gamma_1$, $E_1$ como $\Gamma$, E) $\rightarrow$ {E es efectivamente verdadera}. En particular, $1 = 0$ (en el caso del simbolismo de teoría de números con la interpretación usual), o A & $\neg$ A donde A no contiene cuantificador alguno, no es efectivamente verdadera, y, por tanto, es indemostrable en $S$. En consecuencia $S$ es simplemente consistente, por la segunda forma de la definición en § 28.

DEMOSTRACION DE (a). Si es en el $H$ intuicionista donde se da $\Gamma \vdash$ E, entonces a fortiori $\Gamma \vdash$ E en el $H$ clásico, ya que el postulado intuicionista $8^I$ es demostrable desde el punto de vista clásico (§ 23).

Dado que $\Gamma$, E son cerradas, todas las variables se mantienen constantes en la deducción $\Gamma \vdash$ E, y ninguna variable ocurre libre unas veces y ligada otras en el secuente $\Gamma \rightarrow$ E. En consecuencia, por los Teoremas 46 y 50 existe en el cálculo de predicados $G1$ clásico una demostración de $\Gamma \rightarrow$ E con las características descritas en el Teorema 50. Sea $h$ el nivel en que el secuente medio ocurre.

Continuando con la ilustración, digamos que $\Gamma$ consta de sólo la fórmula G anterior y que E es $\forall v_1 \forall v_2 \exists w B(v_1, v_2, w)$ donde $B(v_1, v_2, w)$ no contiene cuantificador alguno y tan sólo las distintas variables presentadas.

Elijamos un par cualquiera $\nu_1, \nu_2$ de números.

Ahora vamos a llevar a cabo una serie de operaciones, una por cada inferencia de predicados existente en esta demostración dada en $G1$, comenzando por la inferior y procediendo en sentido ascendente. Cada operación consistirá en la introducción de un determinado numeral (especificado más abajo) en sustitución de cada ocurrencia a todo lo largo del árbol de cada variable que ocurre libre en la premisa de la inferencia. Cuando dicha operación se ha realizado sobre una inferencia por $\rightarrow \forall$ o $\exists \rightarrow$, la inferencia queda, por supuesto, destruida. La demostración dada es una demostración de variable pura, por tanto la b de una aplicación de $\rightarrow \forall$ o $\exists \rightarrow$ no ocurre por debajo de su premisa. En consecuencia, en virtud del Lema 36, en el estadio (llamémosle *estadio* $g$) en que dichas operaciones han sido realizadas para aquellas inferencias cuyas premisas se encuentran en o por debajo del nivel $g$ ($\leq h$), cada una de las aplicaciones de postulado iniciales cuyas premisas se encuentran por encima del nivel $g$ se ha transformado en una aplicación del mismo postulado, pero ahora en el sistema $G1$ cuyo simbolismo ha sido extendido (si fuese necesario) con la inclusión de los numerales.

Especificamos ahora la elección de los numerales para las sustituciones, al tiempo que demostramos por inducción sobre $g$ que, si $g \leq h$, entonces en el

estadio $g$-ésimo todos los secuentes que se encuentran por debajo del nivel $g$, éste incluido, gozan de la siguiente propiedad (llamémosle $P$): los antecedentes (consiguientes) contienen sólo fórmulas de las formas presentadas en la columna izquierda (derecha).

$$\exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3) \qquad \forall v_1 \forall v_2 \exists w B(v_1, v_2, w)$$
$$\forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(\boldsymbol{y_1}, x_1, y_2, x_2, y_3) \qquad \forall v_2 \exists w B(\boldsymbol{v_1}, v_2, w)$$
$$\exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(\boldsymbol{y_1}, x_1, y_2, x_2, y_3) \qquad \exists w B(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, w)$$
$$\forall x_2 \exists y_3 A(\boldsymbol{y_1}, t_1, \boldsymbol{y_2}(t_1), x_2, y_3) \qquad B(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, s)$$
$$\exists y_3 A(\boldsymbol{y_1}, t_1, \boldsymbol{y_2}(t_1), t_2, y_3)$$
$$A(\boldsymbol{y_1}, t_1, \boldsymbol{y_2}(t_1), t_2, \boldsymbol{y_3}(t_1, t_2))$$

donde $t_1$, $t_2$ y s son términos exentos de variables, $t_1$ y $t_2$ son los números expresados por $t_1$ y $t_2$ bajo la interpretación efectiva dada, respectivamente, e $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2(t_1)$, $\boldsymbol{y}_3(t_1, t_2)$, $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son los numerales de los números $y_1$, $y_2(t_1)$, $y_3(t_1, t_2)$, $v_1$ y $v_2$ respectivamente, donde $y_1$, $y_2(x_1)$ e $y_3(x_1, x_2)$ son los números y las funciones efectivamente calculables dadas por la hipótesis de que G es efectivamente verdadera.

BASE: $g = 1$. Sólo el secuente final se encuentra en o por debajo del nivel $g$, y tiene la propiedad $P$.

PASO DE INDUCCION: $g > 1$. Para $g > h$ la proposición de inducción es válida vacuamente. Para $g \leq h$ por la hipótesis de la inducción, tal como la figura de árbol ahora se encuentra, los secuentes por debajo del nivel $g$ tienen la propiedad $P$. Hacemos una distinción de casos conforme a la clase de inferencia que se aplica en el paso del nivel $g$ al nivel $g - 1$.

CASO 1: $\rightarrow\forall$. En nuestra ilustración, la fórmula principal debe tener una de dos formas, e. g. (haciendo uso de la segunda) $\forall v_2 \exists w B(\boldsymbol{v}_1, v_2, w)$. La fórmula lateral es entonces $\exists w B(\boldsymbol{v}_1, b, w)$ donde b es la b de la $\rightarrow\forall$ original. Sustituimos b por $\boldsymbol{v}_2$ dondequiera que aquélla ocurra, es decir, sólo en la fórmula lateral de la premisa (en el nivel $g$) y en los secuentes que se encuentran por encima del nivel $g$. Mediante esta operación se establece la propiedad $P$ para el nivel $g$, ya que la fórmula lateral se convierte en $\exists w B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, w)$, que es una de las formas del consiguiente permitidas para la propiedad $P$, y todas las demás fórmulas del secuente son duplicados de fórmulas respectivas de la conclusión, las cuales, por la hipótesis de inducción, tenían ya formas permitidas.

CASO 2: $\forall\rightarrow$. En nuestra ilustración, la fórmula principal debe tener una de dos formas, p. ej. (tomando la segunda) $\forall x_2 \exists y_3 A(\boldsymbol{y}_1, t_1, \boldsymbol{y}_2(t_1), x_2, y_3)$; y la fórmula lateral tiene entonces la forma $\exists y_3 A(\boldsymbol{y}_1, t_1, \boldsymbol{y}_2(t_1), t^*, y_3)$ donde t* es un término que se obtiene del t de la inferencia original mediante previas sustituciones. Por la hipótesis de inducción, ninguna variable ocurre libre en los secuentes por debajo del nivel $g$, y, por tanto, sólo las variables de t* ocurren libres en la premisa. Sustituimos por 0 cada una de éstas (si las hay), si el dominio $D$ es $N$, y si no, por un numeral determinado, dondequiera que aquéllas ocurran, esto es, sólo en la fórmula lateral (en el nivel $g$) y por encima del nivel $g$. La fórmula lateral

se convierte en $\exists y_3 A(\boldsymbol{y}_1, t_1, \boldsymbol{y}_2(t_1), t_2, y_3)$ donde $t_2$ es el resultado de dicha sustitución en t*, mientras que las otras fórmulas del nivel $g$ no se han modificado y tenían ya formas permitidas para la propiedad $P$.

CASO 3: $\rightarrow \exists$. Similar al Caso 2 (con una posibilidad respecto de la forma de la fórmula principal en nuestra ilustración).

CASO 4: $\exists \rightarrow$. En nuestra ilustración la fórmula principal debe tener una de tres formas, e. g. $\exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(\boldsymbol{y}_1, t_1, y_2, x_2, y_3)$; y la fórmula lateral tiene entonces la forma $\forall x_2 \exists y_3 A(\boldsymbol{y}_1, t_1, b, x_2, y_3)$ con la b original. Sustituimos b por el numeral $\boldsymbol{y}_2(t_1)$.

CASO 5: $A$, $C$ o $I$. La premisa tiene ya la propiedad $P$, pues no contiene fórmula alguna que no ocurra en la conclusión; y no se ha realizado operación alguna que modifique la situación.

Con ello completamos la especificación de las operaciones, y la demostración de que en el estadio $g$ ($\leq h$) los secuentes por debajo del nivel $g$, éste incluido, gozan de la propiedad $P$. Por lo tanto en el estadio $h$, cuando se ha completado la total transformación de la demostración dada en el cálculo de predicados $G1$ clásico, el secuente medio original, debido a que no contiene cuantificador alguno, ha pasado a tener la forma

$$A(\boldsymbol{y}_1, t_{11}, \boldsymbol{y}_2(t_{11}), t_{12}, \boldsymbol{y}_3(t_{11}, t_{12})), \ldots, A(\boldsymbol{y}_1, t_{l1}, \boldsymbol{y}_2(t_{l1}), t_{l2}, \boldsymbol{y}_3(t_{l1}, t_{l2})) \rightarrow B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_1), \ldots, B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_m).$$

La figura arbórea que desciende hasta el secuente medio se ha convertido en una demostración de dicho secuente en el cálculo proposicional $G1$ con numerales adicionados a su simbolismo. Por lo tanto, en virtud del Corolario del Teorema 47,

$$A(\boldsymbol{y}_1, t_{11}, \boldsymbol{y}_2(t_{11}), t_{12}, \boldsymbol{y}_3(t_{11}, t_{12})) \,\&\, \ldots \,\&\, A(\boldsymbol{y}_1, t_{l1}, \boldsymbol{y}_2(t_{l1}), t_{l2}, \boldsymbol{y}_3(t_{l1}, t_{l2})) \supset B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_1) \vee \ldots \vee B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_m)$$

es demostrable en el cálculo proposicional $H$, y en consecuencia, en virtud del Teorema 9 § 28 (y del Teorema 4 § 25), es idénticamente verdadera si sus distintas partes primas son consideradas como letras proposicionales distintas para el método de evaluación del cálculo proposicional. En particular, toma el valor t si asignamos a las distintas partes primas (que no contienen variable alguna) los valores t o f que toman bajo la interpretación efectiva dada de las constantes no lógicas. Por hipótesis, (I) toma el valor t para todo par $x_1$, $x_2$ de números. En consecuencia, en atención a las tablas de evaluación para &, $\supset$ y $\vee$, uno de los $B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_1), \ldots, B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_m)$ debe ser t. Sea $B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_a)$ el primero que lo es. El término exento de variables $s_a$ denota entonces un número $s_a$ tal que $B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{s}_a)$ es t.

El proceso total mediante el cual, tras la elección de los números $v_1$, $v_2$, obtenemos este número $s_a$ es efectivo; por lo tanto $s_a = w(v_1, v_2)$, donde $w(v_1, v_2)$ es una función efectivamente calculable. En consecuencia, para todo $v_1, v_2$,

$$\text{(II)} \qquad B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}(v_1, v_2))$$

es t, i. e., E es efectivamente verdadera, como se pretendía demostrar.

OBSERVACION 1. La anterior construcción nos permite decir algo acerca de cómo la función $w(v_1, v_2)$ es referida a las funciones y predicados $f_1, ..., f_r$, $P_1, ..., P_s$, $y_2(x_1)$, $y_3(x_1, x_2)$, independientemente de la naturaleza de los últimos. Así, con o sin las hipótesis de efectividad en el teorema, tenemos cuando $D$ es $N$: (a) *$w$ es recursiva primitiva en $f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s, y_2, y_3$*. Porque podemos demostrar por inducción sobre $g$ que, si $g \leq h$, en el estadio $g$ cada término t que ocurre libre en el árbol y que contiene exactamente $p$ variables distintas expresa conforme $v_1$, $v_2$ varían, una función $t(v_1, v_2, u_1, ..., u_p)$ explícita en $f_1, ..., f_r, y_2, y_3$ y constantes. En consecuencia (para $i = 1, ..., m$), $s_i$ expresa una función $s_i(v_1, v_2)$ explícita en los mismos; y cada parte prima de $B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_i)$ expresa un predicado explícito en los mismos y $P_1, ..., P_s$, por lo que haciendo uso de ## A, C, D § 45 $B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_i)$ expresa un predicado $B_i(v_1, v_2)$ recursivo primitivo en $f_1, ..., f_r, P_1, ..., P_s, y_2, y_3$. Entonces (a) se sigue por aplicación de # F con $B_i$ como $Q_i$ y $s_i$ como $\varphi_i$ (sin que se requiera $\varphi_{m+1}$ alguno). Más específicamente: (b) *$w$ está explícito en $f_1, ..., f_r, y_2, y_3, +, \cdot, \overline{sg}$, las funciones representativas de $P_1, ..., P_s$, y constantes* (# # 1, 2, 9).

APLICACIONES. TEOREMA 52. *Para el predicado recursivo primitivo $R(x, y)$, el sistema formal $S$, y las fórmulas* $A(\boldsymbol{x})$ *($x = 0, 1, 2, ...$) descritas en el Ejemplo* 2 § 73: $A(\boldsymbol{x})$ *es demostrable en $S$, sólo si $(Ey)\,R(x, y)$*. (De hecho: *Toda fórmula prenexa $\forall\exists$ demostrable en $S$ es efectivamente verdadera bajo la interpretación propuesta*).

DEMOSTRACION. Los axiomas de $S$ son todos verificables (en consecuencia efectivamente verdaderos), si el dominio es el de los números naturales y las constantes no lógicas 0, ′, $f_1, ..., f_k$, = se interpretan del modo propuesto (que es efectivo), i. e., por 0, ′, $\varphi_1, ..., \varphi_k$, =, respectivamente. Entonces se aplica (b). Haciendo uso de él con $A(\boldsymbol{x})$, es decir, $\exists y f_k(\boldsymbol{x}, y) = 0$, como E: Si $\vdash A(\boldsymbol{x})$ en $S$, entonces $A(\boldsymbol{x})$ es efectivamente verdadera bajo esta interpretación, i. e., existe un $y$ para el que $f_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ es t (i. e., para el que $\varphi_k(x, y) = 0$), es decir, $(Ey)\,R(x, y)$.

TEOREMA 53. (a) *El sistema de Robinson (Lema* 18b § 49), *llamémosle $S$, es simplemente consistente (y toda fórmula prenexa $\forall\exists$ demostrable en $S$ es efectivamente verdadera)*. (b) *En $S$, para un predicado recursivo primitivo $R(x, y)$ dado, y una fórmula* $R(x, y)$ *que lo expresa numeralmente, obtenida según el método de demostración del Corolario del Teorema* 27 § 49: $\vdash \exists y R(\boldsymbol{x}, y)$ *sólo si $(Ey)\,R(x, y)$*. (c) *En $S$, si las fórmulas* $A(a, b)$ *y* $B(a, c)$ *del Ejemplo* 1 § 61 *se obtienen según el método de demostración del Corolario del Teorema* 27, *entonces (inversamente a* (52)): $\{\vdash B(\boldsymbol{x})\} \rightarrow (Ey)\,W_0(x, y)$.

DEMOSTRACION. Será suficiente demostrar el teorema para los sistemas clásicos, ya que $1 = 0$ ó $\exists y R(\boldsymbol{x}, y)$ o $B(\boldsymbol{x})$ es demostrable en el sistema intuicionista sólo si es demostrable en el clásico.

(a) Cada uno de los trece axiomas, a excepción de *137 (ó *136), es verificable bajo la interpretación usual (efectiva). Si empleamos *90 § 35, obtenemos $\exists b\,(a = 0 \vee a = b')$ como fórmula prenexa $\forall\exists$ equivalente a *137. Esta es efectivamente verdadera, siendo $b(a) = a \dot{-} 1$, ya que entonces, para cada número natural $a$, $\boldsymbol{a} = 0 \vee \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}(a))'$ es t.

(b) El teorema de consistencia no tiene aplicación inmediata, ya que $\exists y R(\mathbf{x}, y)$ no es una fórmula prenexa $\forall\exists$. Sin embargo demostraremos (a continuación del lema) que podemos añadir nuevos axiomas a $S$ que contengan nuevos símbolos de predicados, y extender la interpretación efectivamente al último, de modo tal que cada uno de los nuevos axiomas es equivalente en el cálculo de predicados a una fórmula prenexa efectivamente verdadera, y que $\vdash S(x, y) \sim R(x, y)$ en el sistema $S'$ resultante donde S (x, y) no contiene cuantificador alguno y expresa en la interpretación $R(x, y)$. Entonces (b) se sigue así:

$$\{\vdash \exists y R(\mathbf{x}, y) \text{ en } S\} \rightarrow \{\vdash \exists y R(\mathbf{x}, y) \text{ en } S'\} \rightarrow \{\vdash \exists y S(\mathbf{x}, y) \text{ en } S'\}$$
$$\rightarrow (Ey)\, R(x, y).$$

LEMA 41°. *Sea* A (x, y) *una fórmula que no contiene ningún cuantificador y tan sólo las distintas variables presentadas, supóngase dada una interpretación efectiva de sus constantes no lógicas, y sea* $A(x, y)$ *el predicado que aquélla expresa bajo dicha interpretación. Sea* Ȧ (x) *una nueva letra de predicados.* (a) *supóngase que*

$$(1) \qquad (Ey)\, A(x, y) \rightarrow (Ey)_{y \leq \upsilon(x)} A(x, y)$$

*donde* $\upsilon(x)$ *es una función efectivamente calculable. Sea*

$$(2) \qquad \dot{A}(x) \equiv (Ey)\, A(x, y).$$

*Interprétese* Ȧ(x) *por* $\dot{A}(x)$ *(la cual por* (1) *y* (2) *es efectiva). Entonces la fórmula*

$$(i) \qquad \dot{A}(x) \sim \exists y A(x, y)$$

*es equivalente en el cálculo de predicados a una fórmula prenexa efectivamente verdadera. Similarmente con* "$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$" *en el lugar de* "x, y". (b) *Similarmente con cuantificador universal en el lugar del existencial (y* "$\leftarrow$" *en el lugar de* "$\rightarrow$" *en* (1)).

DEMOSTRACION DEL LEMA 41. (a) Suprimiendo la abreviatura en $\sim$ en (i), y haciendo uso de *96, *89, *97 y *91, obtenemos como fórmula prenexa $\forall\exists$ equivalente

$$(ii) \qquad \forall y \exists z\, [\{\dot{A}(x) \supset A(x, z)\} \,\&\, \{A(x, y) \supset \dot{A}(x)\}].$$

Esta fórmula es efectivamente verdadera con $z(x, y) = \mu z_{z \leq \upsilon(x)} A(x, z)$.

(b) Del mismo modo, haciendo uso de *95, *89, *98 y *91, obtenemos

$$\forall y \exists z\, [\{\dot{A}(x) \supset A(x, y)\} \,\&\, \{A(x, y) \supset \dot{A}(x)\}],$$

que es efectivamente verdadera con $z(x, y) = \mu z_{z \leq \upsilon(x)} \bar{A}(x, z)$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 53 (b) (conclusión). En virtud de la demostración del Corolario del Teorema 27 § 49 a partir del Teorema 27, será suficiente demostrar, para la demostración del Teorema 27, que $S$ puede ser ampliado de de modo tal que $\vdash \dot{P}(x_1, \ldots, x_n, w) \sim P(x_1, \ldots, x_n, w)$ con $\dot{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$ interpretado como $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$.

CASO (Vb). Por la hipótesis de inducción, $S$ ha sido ya ampliado con la inclusión de un símbolo de predicados $\dot{Q}(x_2, \ldots, x_n, w)$ interpretado como $\psi(x_2, \ldots, x_n = w$

tal que $\vdash \dot{Q}(x_2, ..., x_n, w) \sim Q(x_2, ..., x_n, w)$, y $\dot{R}(y, z, x_2, ..., x_n, w)$ interpretado como $\chi(y, z, x_2, ..., x_n) = w$ tal que $\vdash \dot{R}(y, z, x_2, ..., x_n, w) \sim R(y, z, x_2, ..., x_n, w)$. Introducimos (si no lo hemos hecho ya) $a \dot{<} b$, a interpretar como $a < b$, con el axioma $a < b \sim a < b$, es decir, $a < b \sim \exists c\,(c' + a = b)$, haciendo uso de $c \leq b$ como límite $y \leq v(x_1, x_2)$ del Lema 41. Además extendemos $S$ (si no lo hemos hecho todavía) hasta incluir un símbolo de predicados $\dot{B}(c, d, i, w)$, a interpretar como $\beta(c, d, i) = w$, tal que $\vdash \dot{B}(c, d, i, w) \sim B(c, d, i, w)$: respecto de la definición de B(c, d, i, w) que acompaña a *180 § 41, puede ésta realizar en varios pasos (que se dejan al lector) semejantes a los que vamos a realizar próximamente. Introducimos ahora $D(c, d, i, x_2, ..., x_n)$, interpretado como $(Eu)\,(Ev)\,[\beta(c, d, i') = u \,\&\, \beta(c, d, i) = v \,\&\, \chi(i, v, x_2, ..., x_n) = u]$, con el axioma $\dot{D}(c, d, i, x_2, ..., x_n) \sim \exists u \exists v\,[\dot{B}(c, d, i', u) \,\&\, \dot{B}(c, d, i, v) \,\&\, \dot{R}(i, v, x_2, ..., x_n, u)$, haciendo uso de los límites $u \leq \beta(c, d, i')$, $v \leq \beta(c, d, i)$. A continuación introducimos $\dot{E}(c, d, y, x_2, ..., x_n)$, interpretada como $(i)\,[i < y \rightarrow (Eu)\,(Ev)\,[\beta(c, d, i') = u \,\&\, \beta(c, d, i) = v \,\&\, \chi(i, v, x_2, ..., x_n) = u]]$, con el axioma $\dot{E}(c, d, y, x_2, ..., x_n) \sim \forall i\,[i \dot{<} y \supset \dot{D}(c, d, i, x_2, ..., x_n)]$, haciendo uso del límite $i \leq y$. Introducimos entonces $\dot{F}$ para eliminar el primer $\exists u$ de $P(y, x_2, ..., x_n, w)$, haciendo uso de $u \leq \beta(c, d, 0)$; y finalmente $\dot{P}$ para eliminar el $\exists c \exists d$, usando como límites $c \leq C$ y $d \leq D$ con C y D tal como se han descrito en el Ejemplo 1 (A) § 57 cuando $\eta(y, x_2, ..., x_n) = \varphi(y, x_2, ..., x_n)$. En virtud del Caso (Vb) (C) del Teorema 1 § 49, el predicado $\dot{P}(y, x_2, ..., x_n, w)$ asignado como interpretación a $\dot{P}(y, x_2, ..., x_n, w)$ es realmente $\varphi(y, x_2, ..., x_n) = w$; y por las equivalencias introducidas como axiomas o ya establecidas,

$$\vdash \dot{P}(y, x_2, ..., x_n, w) \sim P(y, x_2, ..., x_n, w).$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 53 (c). De modo similar, con una eliminación de cuantificador de $\forall c$ a continuación de las del Teorema 27.

El Teorema 53 (a) garantiza la propiedad de consistencia requerida en la primera demostración del Teorema 54 en § 76 (y los Teoremas 53 (b) y 52 para las demostraciones en la Observación 2 § 76).

TEOREMA 55. *El sistema formal de teoría de números del capítulo* IV, *bajo la restricción de que en el esquema de inducción la* x *no ocurra libre en* A (x) *dentro del alcance de un cuantificador, es simplemente consistente.* (Ackermann 1924-5, von Neumann 1927, cfr. Hilbert y Bernays 1939 págs. 121, 122 y 127).

Además: *Toda fórmula prenexa* $\forall \exists$ *demostrable en él* es *efectivamente verdadera, y esto sigue siendo válido en el caso en que se le sobreañadan los axiomas de Robinson* (*Lema* 18b) *y los axiomas de que se ha hecho uso en la demostración de las Partes* (b) *y* (c) *del Teorema* 53, *partes que también se aplican a este sistema.*

DEMOSTRACION, por reducción del teorema a un lema. Es suficiente demostrar el teorema para el sistema clásico. Trataremos primero el caso en que A (x) se restringe a no contener cuantificador alguno en absoluto. Entonces el Lema 42 completará la demostración.

Consideremos un axioma conforme al Postulado 13 de dicho sistema y digamos que su A (x) es $A(x, x_1, ..., x_n)$ con exactamente las distintas variables presentadas y ningún cuantificador. Sea $A(x, x_1, ..., x_n)$ el predicado (recursivo primitivo) ex-

presado por A $(x, x_1, ..., x_n)$ bajo la interpretación usual. Teniendo en cuenta *89 y *98, el axioma es equivalente a

$$\exists y\,[A(0, x_1, ..., x_n) \,\&\, (A(y, x_1, ..., x_n) \supset A(y', x_1, ..., x_n)) \supset A(x, x_1, ..., x_n)].$$

Esta fórmula es efectivamente verdadera, con

$$y(x, x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } A(x, x_1, ..., x_n) \vee \bar{A}(0, x_1, ..., x_n), \\ \mu y_{y \leq x}\, A(y, x_1, ..., x_n) \,\&\, \bar{A}(y', x_1, ..., x_n) \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

LEMA 42°. *La clase de las fórmulas demostrables (o de las deducibles a partir de fórmulas supuestas dadas) en el sistema del Teorema 55 no disminuye si además se restringe la* A (x) *del esquema de inducción a no contener cuantificador alguno en absoluto.*

DEMOSTRACION. Toda fórmula A (x) que no contenga la x libre dentro del alcance de un cuantificador debe ser compuesta a base de operaciones del cálculo proposicional a partir de fórmulas $A_1, ..., A_{m_1}$, cada una de las cuales no contiene cuantificador alguno, pero sí puede contener a x, y de fórmulas $A_{m_1}+1, ..., A_{m_1+m_2}$, cada una de las cuales contiene cuantificadores, pero no contiene a x libre ($m_1, m_2 \geq 0$; $m = m_1 + m_2 \geq 1$). En virtud del Teorema 11 § 29 sobre la forma normal disyuntiva principal (con el Teorema 3 § 25), A (x) es equivalente a una disyunción de fórmulas $A_{i1}$ & ... & $A_{im}$ ($i = 1, ..., n$) donde cada $A_{ij}$ es, dependiendo de $i$, o $A_j$ o $\neg A_j$, si se aplica el primer caso de la forma normal. Por el momento supóngase que $m_1, m_2 \geq 1$. Escríbase "$B_i(x)$" por $A_{i1}$ & ... & $A_{im_1}$, "$C_i$" por $A_{i,m_1+1}$ & ... $A_{im}$, y "B (x)" por alguna fórmula refutable sin cuantificadores. Entonces, haciendo uso de *48 y *34 § 27, A (x) es equivalente a

$$\text{(a)} \qquad B(x) \vee (B_1(x) \,\&\, C_1) \vee ... \vee (B_n(x) \,\&\, C_n).$$

Consideremos ahora una fórmula de la forma (a) con $n \geq 0$ en la que (como anteriormente) las B no contienen cuantificador alguno y las C contienen cuantificadores pero ninguna x libre; sea $n$ su *grado*. Demostramos por inducción sobre el grado que todo axioma conforme al Postulado 13 con A (x) de dicha forma es demostrable haciendo uso del Postulado 13 sólo con las A (x) sin contener cuantificador alguno.

PASO DE INDUCCION: $n > 0$. Escribimos (a) como

$$\text{(b)} \qquad D(x) \vee (B_n(x) \,\&\, C_n).$$

El axioma bajo consideración es, pues,

$$[D(0) \vee (B_n(0) \,\&\, C_n)] \,\&\, \forall x\,[D(x) \vee (B_n(x) \,\&\, C_n) \supset D(x') \vee (B_n(x') \,\&\, C_n)] \supset D(x) \vee (B_n(x) \,\&\, C_n). \qquad \text{(c)}$$

Demostraremos que (c) es deducible en el cálculo de predicados a partir de los dos siguientes axiomas.

(d) $[B_n(0) \vee D(0)] \& \forall x [B_n(x) \vee D(x) \supset B_n(x') \vee D(x')] \supset B_n(x) \vee D(x)$,

(e) $D(0) \& \forall x [D(x) \supset D(x')] \supset D(x)$;

es decir, hemos de demostrar: (d), (e) $\vdash$ (c). Por el Teorema 14 § 33 junto con *45 y *34 § 27: $C_n \vdash$ (c) $\sim$ (d); y junto con *47 y *48: $\neg C_n \vdash$ (c) $\sim$ (e). Ninguna variable ha sido modificada, ya que $C_n$ no contiene libre la variable x del cuantificador $\forall x$ dentro del cual se realizan los reemplazos. Así, haciendo uso de $\vee$-elim.: (d), (e), $C_n \vee \neg C_n \vdash$ (c); y, en consecuencia, haciendo uso de *51: (d), (e) $\vdash$ (c).

Pero en (e), A(x) tiene la forma (a) con grado $n - 1$, y asimismo en (d), cuando se toma $B_n(x) \vee B(x)$ como nueva B(x).

Si $m_1 = 0$, el método se aplica construyendo "$B_i(x)$" y "$B_i(x)$ &" como expresiones vacías, con las siguientes diferencias. Consideremos

(f) $$C_n \& \forall x [C_n \supset C_n] \supset C_n.$$

Haciendo uso de *46: $C_n \vdash$ (c) $\sim$ (f); y haciendo uso de *48: $\neg C_n \vdash$ (c) $\sim$ (e). Pero haciendo uso de *1 § 26, *75 § 35, *45, y *1 de nuevo: $\vdash$ (f).

Si $m_2 = 0$, A(x) carece ya de cuantificadores.

Si se aplica el segundo caso de la forma normal, entonces, haciendo uso de *53, *34 y *53, A(x) es equivalente a B(x) & $\neg$ B(x).

OBSERVACION 2. En los sistemas de los Teoremas 52, 53 y 55, toda fórmula prenexa $\forall\exists$ demostrable es primitivo-*recursivamente verdadera.* Para $R(x, y)$ y R(x, y) como en el Teorema 53 (b), {$\vdash \exists y R(x, y)$} $\rightarrow$ {existe una función $\varphi$ recursiva primitiva tal que $(x) R(x, \varphi(x))$}. DEMOSTRACIONES. Por la Observación 1 y nuestras construcciones de las funciones y los predicados para la interpretación efectiva y la verdad efectiva en los Teoremas 52, 53 y 55.

EJEMPLO 2. Sea $S$ el sistema formal de teoría de números en el que $\cdot$ se ha omitido. Lo que la adaptación de Presburger 1930, citada al principio de § 42, da directamente es una correlación efectiva, con cada fórmula cerrada A de $S$, de otra B, con las propiedades (1)–(4) que siguen. (Por considerar una fórmula abierta, sea A su clausura). (1) $\vdash$ A $\sim$ B en $S$. (2) B es o verdadera o falsa, bajo una obvia extensión del método de evaluación (que antecede al Teorema 51). Digamos ahora que A es *verdadera* (*falsa*), si B lo es. (Esta especial definición de verdad para las fórmulas cerradas de $S$ es equivalente a la requerida bajo la definición general de verdad que se establecerá al final de § 81, por (3)). (3) Verdad y falsedad en este sentido se ajustan a las tablas de verdad de dos valores; {$\exists x A(x)$ es verdadera} $\equiv$ $(Ex)$ {A($\mathfrak{x}$) es verdadera}; y {$\forall x A(x)$ es verdadera} $\equiv (x)$ {A($\mathfrak{x}$) es verdadera}. (4) Según que B sea verdadera o falsa, B es demostrable o refutable en $S$. Entonces: (5) $S$ es simplemente completo, y completo con respecto a la interpretación (§§41, 29). (6) Existe un método de decisión para el problema de si A es verdadera. (7) Si $S$ es simplemente consistente, existe un método de decisión respecto de $S$, i. e., para el problema de si $\vdash$ A en $S$. Ahora demostramos: (8) Si $\vdash$ A en $S$, entonces A es verdadera; en consecuencia $S$ es simplemente consistente. Supongamos que $\vdash$ A en $S$. Entonces para algún conjunto finito $\Gamma$ de axiomas de $S$ no lógicos, $\Gamma \vdash$ A en $H$. Podemos hacer uso del Lema 41 para eliminar los cuantificadores

de A y de la fórmula de inducción A(x) de cada axioma de inducción perteneciente a $\Gamma$, tomando p. ej. respecto de una parte $\exists y A(x, y)$.

$$v(x) = \mu y\ [(\{\exists y A(x, y) \text{ es falsa}\} \,\&\, y = 0) \vee A(x, y)].$$

Obtenemos así $\Gamma'$, $\Theta \vdash A'$, donde $\Theta$ son las fórmulas (i) del Lema 41 con $\exists$ o $\forall$ para los símbolos de predicados introducidos en la eliminación. Entonces A' (y, en consecuencia, A) es verdadera, en virtud del Teorema 55 (o de la primera parte de su demostración) para el sistema al que se le han añadido $\Theta$ como axiomas.

DISCUSION. En estas aplicaciones del teorema de consistencia, el dominio *D* es el de los números naturales, los numerales son ya una parte del simbolismo y la interpretación efectiva es la pretendida. Hilbert y Bernays 1939 en las págs. 38-48 ofrece dos aplicaciones de su teorema de consistencia a sistemas de axiomas geométricos. En ella se utilizan, como dominio *D*, determinados sistemas enumerables de números complejos.

Estas demostraciones de consistencia se basan todas en tener un modelo de los axiomas, como sucedía con las presentadas antes de la aparición de la teoría de la demostración de Hilbert (cfr. § 14). Pero el presentar un modelo de los axiomas en términos aritméticos intuitivos no establece fuera de toda duda el que no pueda surgir contradicción alguna en la teoría deducida de los axiomas, a menos que pueda también demostrarse que los razonamientos dentro de la teoría pueden ser traducidos a razonamientos aritméticos intuitivos en términos de los objetos de que se hace uso en el modelo. Esta demostración es lo que el presente teorema de consistencia (Teorema 51) añade al tratamiento primero (Cfr. Bernays 1936 págs. 115-116 y Hilbert-Bernays 1939 pág. 48).

Dedicamos nuestra atención a la deducción de la teoría a partir de sus axiomas al discutir la consistencia en la primera parte de § 75, pero allí hacíamos uso de métodos no finitistas de teoría de conjuntos.

El teorema de consistencia se basa, vía el Hauptsatz extendido (Teorema 50), en el Hauptsatz (Teorema 48) y en la reducción de *H* a *G*1 (Teorema 46). En virtud de éstos, dada una demostración de un teorema formal en un sistema basado en el cálculo de predicados con axiomas matemáticos, es posible transformar el sistema y la demostración hasta conseguir una demostración que no contenga fórmula alguna más complicada que los axiomas y el teorema mismos, es decir, que contenga sólo subfórmulas de ellos. En esta situación no existe ninguna excursión a través de enunciados "ideales" en la demostración de un teorema "real" a partir de axiomas "reales" (§ 14).

Por supuesto, nuestro resultado metamatemático de consistencia del Teorema 55 para una parte de la teoría de números sigue siendo válido después de extender el sistema mediante otros axiomas prenexos efectivamente verdaderos, p. ej. se podrían añadir símbolos para otras funciones recursivas primitivas con sus ecuaciones de recursión. Estas eran eliminables en el sistema total (Ejemplo 9 § 74), pero es de presumir que en general no lo sean en el sistema que incluye el esquema de inducción restringida.

Se pueden considerar también algunos nuevos postulados de inducción, que valdrían como reglas derivadas en el sistema total, si bien es de suponer que no sea así cuando el Postulado 13 se restrinja de modo similar a como se hizo para el Teorema 55, y que son susceptibles de un tratamiento adecuado bajo las correspondientes restricciones. Hilbert y Bernays 1934, págs. 343-346 ofrecen ejemplos

de ellos, los cuales, sin embargo, según Skolem 1939 y Péter 1940 es patente que son derivables si se incorporan funciones recursivas primitivas adecuadas y sus ecuaciones de recursión.

Todos estos resultados de consistencia alcanzados por métodos estrictamente elementales deben interrumpirse antes de alcanzar la consistencia del formalismo de teoría de números con el esquema no restringido de inducción, tal como sabemos por el famoso teorema segundo de Gödel de 1931 (Teorema 30 § 42), según el cual la consistencia de dicho sistema no puede establecerse mediante métodos formalizables en el sistema mismo.

DEMOSTRACION DE CONSISTENCIA DE GENTZEN PARA LA TEORIA DE NUMEROS. Presentaremos ahora un breve acercamiento heurístico del método empleado por Gentzen (1936, 1938a) en una demostración de la consistencia de la teoría pura clásica de números con el postulado de inducción no restringido.

En la demostración del Hauptsatz de 1934-5 de Gentzen (Teorema 48 § 78), hacíamos uso de una triple inducción, consistente en una inducción sobre el número de fusiones, dentro de cuyo paso de inducción (al establecer el lema principal) realizábamos una inducción sobre el grado, dentro de cuya base y cuyo paso de inducción hacíamos uso de una inducción sobre el rango. Esta triple inducción puede ser considerada como una única "inducción transfinita" si nuestro sistema de números ordinales, que hasta el momento consta simplemente de números naturales, se extiende suficientemente a los transfinitos.

Se introduce después de los números naturales u "ordinales finitos" un siguiente número o "primer ordinal transfinito" denominado $\omega$. Se obtienen a continuación, mediante la aplicación de la operación sucesor, nuevos números $\omega + 1, \omega + 2, \ldots$, a cuyo infinito sucederá otro número denominado $2\,\omega$. Repitiendo este proceso, a todas estas infinitas secuencias de números, isomórfica cada una a la secuencia de números naturales, y a cuyo inicio se encuentran $0, \omega, 2\,\omega, \ldots$, respectivamente, sucederá aún otro número denominado $\omega^2$; y así sucesivamente, del modo siguiente.

$0, 1, 2, \ldots; \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots; 2\,\omega, 2\,\omega+1, 2\,\omega+2, \ldots; \ldots; ;$

$\omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2, \ldots; \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \omega^2+\omega+2, \ldots;$

$\omega^2+2, \omega^2+2\,\omega+1, \omega^2+2\,\omega+2, \ldots; \ldots; ;$

$2\,\omega^2, 2\,\omega^2+1, 2\,\omega^2+2, \ldots; 2\,\omega^2+\omega, 2\,\omega^2+\omega+1, 2\,\omega^2+\omega+2, \ldots;$

$2\,\omega^2+2\,\omega, 2\,\omega^2+2\,\omega+1, 2\,\omega^2+2\,\omega+2, \ldots; \ldots; ; \ldots; ; ; \omega^3, \ldots$

Con esta figura se pretende tan sólo sugerir, hasta cierto punto, el proceso de generación y las notaciones. La teoría general de los ordinales transfinitos constituye una parte de la teoría abstracta de conjuntos de Cantor (cfr. 1897). A un conjunto ordenado linealmente (§ 8) de modo tal que cada subconjunto no vacío posee un primer elemento se le califica de *bien ordenado*. Dos conjuntos ordenados $M$ y $N$ son *semejantes* ($M \simeq N$), si, preservando su orden, pueden ser puestos en una correspondencia 1–1. Los números ordinales de Cantor se obtienen de conjuntos bien ordenados por abstracción respecto a la semejanza, del mismo modo que sus cardinales se obtienen de los conjuntos por abstracción respecto de la equivalencia (§ 3). Sin embargo, mientras el sistema total de los ordinales transfinitos de Cantor requiere un acercamiento por teoría de conjuntos, la teoría de

los segmentos iniciales (al menos cuando no son excesivamente grandes) puede ser abordada con métodos finitistas.

Por ejemplo, el sistema de los ordinales $< \omega^3$ se puede representar como los triplos de números naturales, bajo una determinada ordenación. Sea $\alpha=(a, b, c) = a\omega^2 + b\omega + c$ uno de tales triplos; la última notación es la usual en la teoría de los números ordinales $< \omega^3$. La relación de orden entre dos de tales triplos (como ordinales $<\omega^3$) se define así:

$$\alpha_1 <\alpha_2 \equiv (a_1 <a_2) \ \mathbf{V} \ (a_1 =a_2 \ \& \ b_1 <b_2) \ \mathbf{V} \ (a_1 =a_2 \ \& \ b_1 =b_2 \ \& \ c_1 <c_2).$$

En otras palabras, la ordenación de los triplos $(a, b, c)$ es alfabética, con un alfabeto infinito que consta de los números naturales.

La triple inducción ordinaria sobre el número de fusiones $a$, el grado $b$ y el rango $c$ puede ahora, por tanto, ser considerada como una única inducción transfinita con $(a, b, c)$ como número de inducción. En una inducción transfinita hasta $\omega^3$, para demostrar que todos los ordinales $<\omega^3$ poseen una propiedad, se demuestra que, para todo ordinal $\alpha <\omega^3$, si todos los ordinales $\beta <\alpha$ poseen la propiedad, entonces $\alpha$ posee también dicha propiedad. Estamos haciendo uso del enunciado más compacto, en el que se combinan base y paso de inducción (cfr. *162b § 40 para esta forma del enunciado de la inducción ordinaria). El caso $\alpha=0$, para el que el conjunto de los $\beta$ es vacío, puede, si se desea, ser tratado por separado como base. La inducción es del tipo de curso-de-valores, donde ahora, para cualquier $\alpha \geq \omega$, existe una infinidad de $\beta$ precedentes. Respecto del Hauptsatz de Gentzen, el razonamiento es el de que, si el teorema es verdadero para todas las demostraciones con número de inducción $(a, b, c) = \beta <\alpha (<\omega^3)$, es verdadero para una demostración con $(a, b, c) = \alpha$. El número de inducción $\alpha = (a, b, c)$ bien-ordena ahora los casos del teorema dentro de un orden en el que están siendo demostrados tal como sucede con el número natural empleado como número de inducción en una inducción ordinaria.

Inversamente, haciendo uso de la definición de los ordinales $<\omega^3$ como triplos $(a, b, c)$, toda inducción transfinita hasta $\omega^3$ puede ser realizada mediante inducciones ordinarias.

Se puede definir de un modo finitista además los ordinales superiores. Es claro que podemos llegar hasta $\omega^n$ para todo $n$ finito. Como posterior a todos estos ordinales tomamos $\omega^\omega$; en un momento dado, $\omega^{\omega^\omega}$; y así sucesivamente.

El descubrimiento de Gentzen es que el impedimento de Gödel a la demostración de la consistencia de la teoría de números puede ser superado mediante el uso de una inducción transfinita hasta un ordinal suficientemente alto. Su inducción transfinita llega hasta el ordinal denominado $\varepsilon_0$ por Cantor, el cual es el primer ordinal mayor que todos los ordinales de la secuencia infinita $\omega$, $\omega^\omega$, $\omega^{\omega^\omega}$, ... Figura en la teoría de Cantor como la menor de las soluciones (denominadas números $\varepsilon$) del $\xi$ de la ecuación $\omega^\xi = \xi$.

Gentzen trabaja con sistemas de tipo $G$ con secuentes, pero éstos tienen equivalentes de tipo Hilbert. En la versión de 1938a de su demostración de consistencia, la consistencia simple del sistema se identifica con la indemostrabilidad del secuente $\rightarrow$. Porque a partir de $\rightarrow$ se puede deducir mediante atenuaciones cualquier secuente, a la par que inversamente a partir de $\rightarrow A \ \& \ \neg A$ y del secuente demostrable $A \ \& \ \neg A \rightarrow$ se puede inferir $\rightarrow$ mediante un corte. Comienza por poner en correlación cada demostración en su sistema con un número ordinal $<\varepsilon_0$. Tomando la inducción bajo la forma de un decrecer infinito (cfr. *163 § 40), demuestra que,

dada una demostración del secuente $\rightarrow$, se puede encontrar otra demostración de $\rightarrow$ con un ordinal menor. En consecuencia su sistema (y, por lo tanto, los nuestros) es simplemente consistente.

En la versión de 1936*, cada uno de sus secuentes tiene justamente una fórmula de consiguiente. Demuestra, mediante una inducción transfinita sobre el ordinal ($< \varepsilon_0$) de una demostración, que puede llevarse a cabo cierto tipo de reducción sobre cualquier secuente demostrable. Es absurdo que este tipo de reducción fuese realizable sobre $\rightarrow 1 = 0$. La realizabilidad de dicha reducción se presenta como significado finitista que puede atribuirse a los enunciados ideales de la teoría clásica de números (§ 14).

Ackermann 1940 hace uso de la inducción transfinita $\varepsilon_0$ para desarrollar una demostración de la consistencia de la teoría elemental de números por otros derroteros, haciendo uso del símbolo $\varepsilon$ de Hilbert (originalmente propuesto por Hilbert, y desarrollado por Ackermann en 1924-5 lo suficiente como para demostrar la consistencia con el esquema de inducción restringido).

Así como la inducción transfinita hasta $\omega^3$ puede ser reducida a la inducción ordinaria, la inducción $\varepsilon_0$ también lo puede ser, tal como se hace formalmente por Hilbert y Bernays 1939, págs. 360 ss. Pero existe la diferencia de que en la reducción de la última se hace uso de un predicado como predicado de inducción (el $A(x)$ de (I) § 75, o el $P(n)$, de § 7) del que forma parte explícitamente un predicado $Q$ definido mediante una inducción semejante en naturaleza a la que define $M$ en el Teorema VIII § 57, y en consecuencia posiblemente no aritmético o, lo que es lo mismo, no "elemental" (Teorema VII § 57). Puede de hecho anticiparse, sobre la base del segundo teorema de Gödel (Teorema 30), que la inducción transfinita hasta $\varepsilon_0$ no puede ser reducida a la inducción ordinaria dentro del sistema, ya que los razonamientos de que se hace uso en la demostración de consistencia de Gentzen, distinta a esta inducción transfinita, son de naturaleza tal que resultan formalizables en el sistema (por lo que en particular ninguna fórmula del sistema puede satisfacer las equivalencias que definen $Q$). En su último artículo 1943, Gentzen demuestra directamente la no reductibilidad de la inducción hasta $\varepsilon_0$, en lugar de hacerlo indirectamente a partir del teorema de Gödel y su demostración de consistencia.

Los propósitos iniciales de los formalistas de avalar la matemática clásica mediante una demostración de consistencia (§§ 14, 15) no preveían que habrían de hacer uso de un método tal como el de la inducción transfinita hasta $\varepsilon_0$. Hasta qué punto pueda aceptarse la demostración de Gentzen como aval de la teoría clásica de números en el sentido de esta formulación del problema es, en la situación presente, una cuestión a decidir individualmente, que depende de lo dispuesto que se esté a aceptar la inducción hasta $\varepsilon_0$ como método finitista. (Cfr. final de § 81).

En 1938 Gentzen considera que el uso de la inducción transfinita hasta un ordinal mayor que $\varepsilon_0$ puede hacer posible la demostración de la consistencia del análisis. En virtud de un resultado de Schütte 1951, se pueden obtener en tal sentido formas de inducción más fuertes; de hecho, para todo ordinal $\alpha$, la inducción hasta el menor número $\varepsilon$ de Cantor mayor que $\alpha$ no puede ser reducida a una inducción hasta $\alpha$ (pero la inducción hasta cualquier ordinal intermedio sí puede serlo).

§ 80. **Procedimiento de decisión, indemostrabilidad intuicionista.** Dada la conclusión B de una inferencia presidida por la regla del modus ponens (Regla 2) del sistema formal *H*, no podemos determinar las premisas A y A ⊃ B, pues la premisa A será desconocida. De modo semejante, dada la conclusión $\Delta, \Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta$ de un corte en *G*1, y el análisis de la conclusión que especifica el modo en que su antecedente se desmembra en $\Delta$ y $\Gamma$ y su consiguiente en $\Lambda$ y $\Theta$, no podemos determinar las premisas $\Delta \rightarrow \Lambda, C$ y $C, \Gamma \rightarrow \Theta$, ya que C será desconocida.

Sin embargo, para cada una de las reglas del cálculo proposicional *G*1, exceptuada la de corte (o de *G*2, exceptuada la de fusión), dada la conclusión de una inferencia presidida por la regla en cuestion y dado el analisis de la conclusión, la(s) premisa(s) de la inferencia son cognoscibles. Haciendo uso de este hecho y del teorema de la forma normal de Gentzen (Teorema 48), obtendremos un procedimiento de decisión para el cálculo proposicional, el cual, a diferencia del procedimiento de las tablas de verdad (§§ 28–30, Teorema 12), sirve tanto para el sistema intuicionista como para el clásico.

Los pasos del procedimiento consistirán en confeccionar el listado de las opciones de premisa(s) que puede(n) intervenir en la inferencia de una conclusión dada. Al hacer esto, resulta tedioso el tener que diferenciar todos los modos de aplicación de las reglas estructurales *ACI*. Por lo tanto, como utensilio de nuestra versión del método de decisión de Gentzen, introduciremos un nuevo sistema *G*3 de tipo Gentzen, en el que las transformaciones estructurales *ACI* no se considerarán inferencias diferentes. Definimos *G*3 también para el cálculo de predicados, si bien es tan sólo para el cálculo proposicional para el que dispondremos de un procedimiento de decisión.

Con el fin de hacer innecesarias en *G*3 las reglas *ACI*, debemos construir los postulados de *G*3 de modo tal que su aplicación sea independiente del orden y número de repeticiones de fórmulas en los antecedentes, y, desde el punto de vista clásico, en los consiguientes. En otras palabras, en *G*3, toda aplicación de postulado seguirá siendo una aplicación del mismo postulado si se reemplaza un secuente por un secuente 'cognado' suyo en el sentido que sigue: dos secuentes $\Gamma \rightarrow \Theta$ y $\Gamma' \rightarrow \Theta'$ son *cognados* si ocurren justamente las mismas fórmulas en $\Gamma$ (o en $\Theta$) que en $\Gamma'$ (en $\Theta'$), con la condición de que, desde el punto de vista intuicionista, $\Theta$ y $\Theta'$ no consten de más de una fórmula y sean, en consecuencia, idénticas.

EJEMPLO 1. Los secuentes $C, \mathcal{A}, \mathcal{B} \,\&\, \mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{A}, \mathcal{A}, C \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B}$ son, clásicamente, cognados, pero del último secuente no se hace uso intuicionistamente.

En el sistema clásico *G*3, la lista de postulados difiere en lo siguiente de la lista dada en *G*2. El esquema axiomático es reemplazado por

$$C, \Gamma \rightarrow \Theta, C.$$

No existe regla estructural alguna de inferencia; y cada regla lógica de inferencia se modifica mediante la retención de la fórmula principal en la(s) premisa(s). Por ejemplo, $\rightarrow\neg$, $\supset\rightarrow$, $\rightarrow \vee$ y $\neg \rightarrow$ se transforman en

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, \neg A}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A.} \qquad \frac{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta, A \text{ y } B, A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, A \text{ o } \Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B.} \qquad \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

(Para $\supset\rightarrow$, se ha de hacer uso de ambas premisas; para $\rightarrow\vee$, escrita ahora combinando las dos reglas en un solo enunciado, se hace uso de una o de otra).

Para el sistema intuicionista $G3$ la lista de postulados es como sigue.

POSTULADOS PARA EL SISTEMA FORMAL INTUICIONISTA $G3$

Esquema Axiomático.

$$C, \Gamma \rightarrow C.$$

Reglas de inferencia para el cálculo proposicional.

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B.} \qquad \frac{A \supset B, \Gamma \rightarrow A \text{ y } B, A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \text{ y } \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \,\&\, B.} \qquad \frac{A, A \,\&\, B, \Gamma \rightarrow \Theta \text{ o } B, A \,\&\, B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \text{ o } \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B.} \qquad \frac{A, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta \text{ y } B, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A.} \qquad \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta,}$$

donde $\Theta$ es vacía o consta de una fórmula.

Reglas de inferencia adicionales para el cálculo de predicados.

$$\frac{\Gamma \rightarrow A(b)}{\Gamma \rightarrow \forall x A(x),} \qquad \frac{A(t), \forall x A(x), \Gamma \rightarrow \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

sujeta a la restricción sobre variables.

$$\frac{\Gamma \rightarrow A(t)}{\Gamma \rightarrow \exists x A(x).} \qquad \frac{A(b), \exists x A(x), \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \rightarrow \Theta,}$$

sujeta a la restricción sobre variables.

Definimos también los sistemas clásico e intuicionista $G3a$. Difieren de los sistemas $G3$ en que en ellos permitimos omisiones arbitrarias de fórmulas en el antecedente y en el consiguiente de la(s) premisa(s) de una inferencia presidida por cualquiera de las reglas.

El sistema $G3$ tiene como objetivo reducir al mínimo el número de opciones de premisa(s), cuando intentamos agotar las posibilidades de demostrar un secuente final dado, especialmente en la demostración de que el secuente final es indemostrable. Si el secuente final es demostrable, el empleo de $G3a$ permite usualmente reducir los secuentes de que se hace uso en la demostración.

Una demostración en $G3$ es *no redundante* si no contiene par alguno de secuentes cognados tales que uno de ellos ocurra por encima del otro en la misma rama.

TEOREMA 56. (a) *Si* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en G*3a (*a fortiori si* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en G*3), *entonces* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en G*2 (o *G*1), *haciendo uso justamente de las reglas lógicas de denominación idéntica a las de la demostración dada en G*3a *y no haciendo uso de fusión* (*o corte*) *alguna*.

(b) *Inversamente, si* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en G*2 (*o G*1), *y si ninguna variable ocurre unas veces ligadas y otras, libre en* $\Gamma \to \Theta$, *entonces* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *en G*3 (*a fortiori en G*3a), *haciendo uso tan sólo de las reglas de denominación idéntica a la de las reglas lógicas de que se ha hecho uso en la demostración dada en G*2 (*o G*1). *Los Lemas* 32a–33b (*establecidos más arriba para G*1 *y el corte, y para G*2 *y la fusión*) *son también válidos para G*3 (*y G*3a).

(c) *Una fórmula* E *que no contenga variable alguna unas veces libre y otras, ligada es demostrable en H si, y sólo si, existe en G*3 *una demostración no redundante del secuente* $\to$E.

(d) *El método de intentar construir una demostración no redundante de* $\to$E *en G*3 *brinda un procedimiento de decisión* (*o algoritmo*) *para determinar si una fórmula* E *de letras proposicionales es o no demostrable en el cálculo proposicional* H. *Según que se encuentre o que se determine que no existe una demostración tal*, E *es demostrable en H o no demostrable en H.*

DEMOSTRACIONES. (a) Un axioma de *G*3a es demostrable a partir de un axioma de *G*2 mediante pasos *ACI*. Dada una inferencia en *G*3a, podemos conducir sus premisas mediante pasos *ACI*, a la forma standard presentada en la lista de postulados de *G*3. Entonces se aplica la regla correspondiente de *G*2, con la conclusión dada o con una conclusión que conduce a ella mediante pasos *ACI*.

EJEMPLO 2. La inferencia en el *G*3a intuicionista presentada a la izquierda se lleva a cabo también en *G*2 como se demuestra a la derecha

$$\frac{\mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{A}}{\mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \to C.}\ \neg\to_{3a} \qquad \frac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{A}}{\neg\mathcal{A}, \mathcal{B} \to \mathcal{A}}}{\neg\mathcal{A}, \neg\mathcal{A}, \mathcal{B} \to}}{\mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \to C.}\ \neg\to_{2}$$

(b) Por el teorema 48 (y el Lema 34), podemos hacer que la demostración dada sea una demostración en *G*2 sin fusión. Un axioma de *G*2 es un axioma de *G*3; y fácilmente verificamos que toda inferencia en *G*2 sin fusión puede ser llevada a cabo (mediante uno o más pasos) en el sistema obtenido a partir de *G*3 por adición de las seis reglas *ACI*. Por lo tanto será suficiente demostrar que dichas adiciones a *G*3 no incrementan su clase de secuentes demostrables. A este fin, demostramos primero por inducción que, si $\vdash \Gamma \to \Theta$ en *G*3, entonces $\vdash \Gamma \to \Theta, C$, en *G*3, previo que, intuicionistamente, $\Theta$ sea vacía, es decir, establecemos que $\to A$ es válida como regla derivada para *G*3. En dicha inducción se satisface la restricción sobre las variables para $\to \forall$ o $\exists \to$ si previamente se hace uso del Lema 35 (que es válido tanto para *G*3 como para *G*1 y *G*2) para transformar la b en sus ocurrencias libres en la demostración dada en una nueva variable que no ocurra libre en C. Con la regla $A \to$ se opera de modo similar; y con $\to C$, $C \to$, $\to I$, $I \to$ se opera de modo inmediato en virtud de la convención bajo la que se hace uso de las reglas de *G*3.

(c) En virtud de (a), (b) y los teoremas 46 y 47, E es demostrable en $H$, si y sólo si existe en $G3$ una demostración de $\rightarrow$E. Pero dada en $G3$ una demostración de $\rightarrow$E, podemos encontrar una no redundante, tal como demostramos por inducción sobre el número de pares de secuentes cognados existentes uno por encima de otro en la misma rama. Dado un par tal, se pueden suprimir el secuente inferior del par y los secuentes intermedios, junto con todas las ramas que conduzcan a ellos.

La demostración de (d) se pospone al siguiente ejemplo que ilustra el procedimiento de decisión.

EJEMPLO 3. (a) ¿Es $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ demostrable en el cálculo proposicional intuicionista $H$? En virtud de (c), lo es si y sólo si existe en $G3$ intuicionista una demostración no redundante de $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$. Intentamos, pues, encontrar una demostración tal. El secuente $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$, tal como vemos por simple inspección, no es un axioma de $G3$. La única regla de inferencia de $G3$ aplicable que tenga como conclusión $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ es $\rightarrow \vee$. Desde el punto de vista intuicionista, la inferencia de $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ mediante esta regla puede tener como premisa tan sólo $\rightarrow \mathcal{A}$ o $\rightarrow \neg \mathcal{A}$. A no ser que sea un axioma, la primera $\rightarrow \mathcal{A}$ no puede ser en $G3$ la conclusión de inferencia alguna, mientras que la $\rightarrow \neg \mathcal{A}$ puede tan sólo resultar mediante $\rightarrow \neg$ de la premisa $\mathcal{A} \rightarrow$ o de una premisa del tipo $\mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrow$ cognada de $\mathcal{A} \rightarrow$. Sin embargo, dado que para las demostraciones en $G3$ dos secuentes cognados son intercambiables, es suficientes considerar $\mathcal{A} \rightarrow$. Este secuente no es un axioma, y no es posible ninguna inferencia de $G3$ que lo tenga como conclusión. La construcción total se presenta en la figura de abajo, en tres líneas o niveles numerados de abajo arriba a partir del secuente final dado $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$. En pocas palabras, aplicamos las reglas de $G3$ en sentido ascendente de conclusión a premisas, y de todos los modos posibles, no haciendo distinción entre secuentes cognados.

$$
\begin{array}{ll}
3. & \mathcal{A} \rightarrow \\
2. & \rightarrow \mathcal{A} \text{ o } \rightarrow \neg \mathcal{A} \\
1. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}.
\end{array}
$$

En esta construcción hemos agotado todas las posibilidades de encontrar una demostración de $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ en $G3$ intuicionista, sin encontrar alguna. Por lo tanto $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ no es demostrable en el sistema intuicionista $H$.

(b) Ya sabemos que $\mathcal{A} \vee \neg A$ es demostrable en el cálculo proposicional clásico $H$ (*51 § 27). Sin embargo es interesante ver cómo el método de decisión nos conduce a una demostración de $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ en el sistema clásico $G3$, de ahí que si aplicáramos las demostraciones del Teorema 56 (a), del Teorema 47 y de los resultados del capítulo V en los que el último se basa, seríamos conducidos a una demostración de $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ en el $H$ clásico. En la línea 2 se retiene ahora en el consiguiente la fórmula $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ (en conformidad con la diferencia entre la regla $\rightarrow \vee$ de $G3$ clásica y la intuicionista). Esto nos ofrece más posibilidades en la línea 3. El "2" aquí escrito significa que el secuente presentado por debajo de ella en la línea 2 es una de las posibles premisas enumeradas en la línea 3 (por $\rightarrow \vee$). Ya que estamos buscando una demostración no redundante necesitamos seguir considerando tan sólo la nueva premisa $\rightarrow A \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}$ o $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}$. A continuación se presenta la construcción hasta la línea 4.

$$\begin{array}{lc}
4. & 3 \text{ ó } \mathcal{A} \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \quad 3 \text{ ó } \mathcal{A} \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \quad 3 \text{ ó } \mathcal{A} \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \\
3. & \dfrac{2 \text{ ó } \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \quad 2 \text{ ó } \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \text{ ó } \mathcal{A} \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}}{} \\
2. & \dfrac{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} \quad \text{ó} \quad \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}}{} \\
1. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}.}
\end{array}$$

En la línea 4, tres de nuestras opciones han culminado en un axioma; es decir, hemos descubierto en *G*3 demostraciones de $\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$. Si hacemos uso de la opción de la izquierda en la línea 2 (y de las nuevas opciones que hay por encima de ésta), tenemos en particular la siguiente demostración en *G*3 (a la izquierda). Sus secuentes se pueden simplificar en *G*3a (a la derecha).

$$\begin{array}{lc}
4. & \mathcal{A} \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \\
3. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}} \to \neg \\
2. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}} \to \vee \\
1. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}.} \to \vee
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lc}
4. & \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\
3. & \dfrac{}{\to \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}} \to \neg \\
2. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}} \to \vee \\
1. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}.} \to \vee
\end{array}$$

En términos de *G*2 (o *G*3) esta última se convierte en:

$$\begin{array}{lc}
 & \text{etc.} \\
3. & \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} \\
2. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}} \to \vee \\
1. & \dfrac{}{\to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}.} \to C
\end{array}$$

(c) Ya sabemos que $\neg \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A})$ es demostrable en *H* desde el punto de vista intuicionista (*51a). Sigue una demostración en *G*3a de $\to \neg \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A})$ que es descubierta mediante el uso del método de decisión. En términos de *G*2, la contracción que no podíamos llevar a cabo en (a), debido a la restricción intuicionista a no más de una fórmula en el consiguiente, es ahora posible en tanto que es llevada a cabo en el antecedente.

$$\begin{array}{lc}
7. & \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\
6. & \dfrac{}{\mathcal{A} \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}} \to \vee \\
5. & \dfrac{}{\mathcal{A}, \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \to} \neg \to \\
4. & \dfrac{}{\neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \to \neg \mathcal{A}} \to \neg \\
3. & \dfrac{}{\neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \to \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}} \to \vee \\
2. & \dfrac{}{\neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \to} \neg \to \\
1. & \dfrac{}{\to \neg \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}).} \to \neg
\end{array}$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 56 (d). Es evidente que el procedimiento, tal como se ilustra en el Ejemplo 3, puede ser aplicado hasta el nivel que se desee, teniéndose presente el siguiente hecho. Dado un secuente $\Gamma \to \Theta$ constituido por fórmulas de letras proposicionales, para cada opción a partir de $\Gamma$ o de $\Theta$ de una fórmula que contenga un símbolo lógico para que haga las veces de fórmula principal,

existen exactamente una o dos opciones no cognadas de premisa(s) para la inferencia en $G3$ de $\Gamma \rightarrow \Theta$.

Resta demostrar que el procedimiento total debe terminar. En virtud de la propiedad de subfórmula de $G3$, todo secuente que intervenga en una demostración de $\rightarrow$E en $G3$ debe estar compuesto de subfórmulas de E. Pero una fórmula E de letras proposicionales tiene solamente una clase finita de subfórmulas. Y a partir de éstas existe sólo un número finito $k$ de modos de elegir fórmulas que puedan ocurrir en el antecedente y que puedan ocurrir en el consiguiente, es decir se puede escribir a lo sumo $k$ secuentes no cognados constituidos por subfórmulas de E. En consecuencia, no puede existir una demostración no redundante de $\rightarrow$E que contenga más de $k$ niveles; por lo tanto, podemos agotar las posibilidades de encontrar tal demostración aplicando el método hasta (a lo sumo) el nivel $k$-ésimo.

EJEMPLO 4. ¿Es demostrable $\neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg\neg\mathcal{A}_1 \vee \neg\neg\mathcal{A}_2$ en el cálculo proposicional intuicionista? Procedemos como sigue.

$$\begin{array}{ll} 3. & \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \rightarrow \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \text{ ó } \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}_1 \text{ ó } \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}_2 \\ \hline 2. & \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}_1 \vee \neg\neg\mathcal{A}_2 \\ 1. & \rightarrow \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg\neg\mathcal{A}_1 \vee \neg\neg\mathcal{A}_2. \end{array}$$

Sin tener que proseguir con el método, podemos contestar ahora negativamente a la pregunta. Porque inmediatamente podemos verificar, mediante métodos de tablas de verdad de dos valores, que ninguno de los secuentes de la línea 3 es demostrable. Así, el primero de ellos $\neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \rightarrow \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$ es demostrable en $G3$ y, por tanto (Teorema 56 (a)), en $G1$ solamente si $\neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$ es demostrable en $H$ (Corolario del Teorema 47). Pero $\neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$ no es demostrable en $H$, ya que asume el valor f cuando $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ toman los valores t, t (Teorema 9 § 28).

TEOREMA 57. (a) *En el cálculo proposicional intuicionista H, para toda fórmula* A *y* B: $\vdash$ A $\vee$ B, *solamente si* $\vdash$ A *o* $\vdash$ B. (Gödel 1932).

(b) *Cada uno de los resultados a los que se les asignó los números* *14, *15, *49, *51, *52, *55–*62, *que fueron establecidos en el Capítulo* VI *sólo para el cálculo proposicional clásico, resulta no ser válido realmente para el cálculo proposicional intuicionista* (*y asimismo la conversa de cada una de las implicaciones existentes en* *49a–*62a).

DEMOSTRACIONES. La parte (a) se sigue de modo inmediato de la forma de $\rightarrow\vee$ en $G3$. Referente a (b) podemos demostrar mediante el método de decisión que cada fórmula en cuestión es indemostrable si A y B son letras proposicionales simples $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, tal como ya hicimos en el caso de *51 en el Ejemplo 3 (a). (Respecto de *51, la indemostrabilidad se sigue también de la Parte (a) y el Teorema 9.) Sin embargo, para los restantes es más expeditivo recurrir a deducciones dentro del cálculo proposicional intuicionista. Por ejemplo, si *48 fuese válido, entonces, en virtud de la Observación 1 § 27, también lo sería *51, con lo que entraríamos en contradicción con nuestro resultado para *51. Consideramos los restantes en su orden numérico.

*14. Supongamos que $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$ fuese válido en el cálculo proposicional intuicionista para toda fórmula A y B. Tendríamos entonces en particular que $\neg \mathcal{A} \supset \neg \mathcal{A} \vdash \neg \neg \mathcal{A} \supset \mathcal{A}$, por lo que haciendo uso de *1 obtendríamos $\vdash \neg \neg \mathcal{A} \supset \mathcal{A}$, en contradicción con nuestro resultado para *49.

*56. (Cfr. *56a). Si $\vdash \neg (\neg A \,\&\, \neg B) \supset A \vee B$ intuicionistamente para todo A y B, entonces en particular $\vdash \neg (\neg \mathcal{A} \,\&\, \neg \mathcal{A}) \supset \mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, por lo que en virtud de *37 y *38 de nuevo $\vdash \neg \neg \mathcal{A} \supset \mathcal{A}$. A fortiori por &-elim., no $\vdash A \vee B \supset \neg (\neg A \,\&\, \neg B)$ intuicionistamente para todo A y B.

*62. (Cfr. *62a). Si $\vdash \neg (A \,\&\, B) \supset \neg A \vee \neg B$ desde el punto de vista intuicionista para todo A y B, entonces en particular $\vdash \neg (\mathcal{A} \,\&\, \neg \mathcal{A}) \supset \neg A \vee \neg \neg \mathcal{A}$, por lo que en virtud de *50, $\vdash \neg \mathcal{A} \vee \neg \neg \mathcal{A}$. En virtud del (a) del Teorema, entonces $\vdash \neg \mathcal{A}$ o $\vdash \neg \neg \mathcal{A}$, en contradicción con el Teorema 9.

OBSERVACION 1. Asimismo, puede inferirse (con una excepción) mediante los métodos presentes que los teoremas y corolarios del Capítulo VI caracterizados con ° como establecidos sólo clásicamente no son válidos intuicionistamente. Así el Teorema 8 daría *49; su corolario daría *55 a partir de *54; el Teorema 11 daría la equivalencia de $\neg \neg \mathcal{A}$ con una de las fórmulas $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \,\&\, \neg \mathcal{A}$; etc. EXCEPCION: el Teorema 12 es obviamente falso para el cálculo proposicional intuicionista, dado que el método indicado no puede aplicarse. Que no puede aplicarse ningún otro método de tablas de verdad con un número finito de valores fue demostrado por Gödel 1932. Pero existe un procedimiento de decisión de otra índole (Teorema 56 (d)).

CALCULO DE PREDICADOS. Por el Teorema 54 § 76, no existe procedimiento de decisión alguno para el cálculo de predicados. (¿En qué punto resulta fallida la demostración del Teorema 56 (d) cuando intentamos aplicarlo al cálculo de predicados? Comparemos los Ejemplos 2 y 3 (a) § 78). En este sentido, aunque el Teorema 56(c) no proporciona un procedimiento de decisión en el caso del cálculo de predicados, resulta provechoso, sin embargo, en la investigación de la demostrabilidad en el cálculo de predicados. Dada una fórmula E de letras predicativas, si intentamos hallar una demostración no redundante de $\rightarrow$ E en *G*3, podemos encontrar realmente una, o descubrir alguna característica de la situación que demuestre que no puede existir ninguna.

TEOREMA 58. *En el cálculo de predicados intuicionista H*:

(a) $\neg \neg \forall x (\mathcal{A}(x) \vee \neg A(x))$ *es indemostrable.* (Heyting 1930a; Kleene 1945 junto con Nelson 1947).

(b) (i) $\forall x (\mathcal{A} \vee B(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x B(x)$ *es indemostrable.*

(ii) $\neg \neg \{\forall x (\mathcal{A} \vee B(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x B(x)\}$ *es demostrable, pero*

(iii) $\neg \neg \forall y \{\forall x (\mathcal{A}(y) \vee B(x)) \supset \mathcal{A}(y) \vee \forall x B(x)\}$ *es indemostrable.*

(c) *En cada tabla del Corolario del Teorema* 17 § 35, *si* A (x) *es la letra predicativa simple* $\mathcal{A}(x)$, *la implicación* (*y, por tanto, la equivalencia*) *de una fórmula que se encuentre por encima de una línea por* (*con*) *una que se encuentre por debajo de la línea es indemostrable, y asimismo la doble negación de dicha implicación* (*y en*

*consecuencia*, en virtud de *25, *de dicha equivalencia*) *cuando una doble línea separa las fórmulas.* (Heyting 1946).

(d) *Cada uno de los resultados a los que se les asignó los números* *83–*85, *92, *97–*99 (*Teorema* 17), *que en el Capítulo* VII *se establecieron tan sólo para el cálculo de predicados clásico, resulta no ser válido. De ellos,* *83, *92 *y* *97 *son válidos, si se aplica una doble negación a la fórmula, pero* *84, *85, *98 *y* *99, *no.*

DEMOSTRACIONES. (a) Intentamos construir una demostración no redundante de $\rightarrow \neg \neg \forall x(\mathcal{A}(x) \vee \neg \mathcal{A}(x))$ en el sistema intuicionista $G3$ como sigue. Para abreviar, sustituimos en determinados lugares $\forall x(\mathcal{A}(x) \vee \neg \mathcal{A}(x))$ por "B". De la línea 3 a la 4, la fórmula principal de la inferencia puede ser o $\neg$ B o B. Si $\neg$ B (mediante uso de $\neg \rightarrow$), la premisa es la que ya se ha obtenido en 3 (al tiempo que desaparece la B original como $\Theta$ y aparece una nueva ocurrencia de la misma como fórmula lateral). Por la definición de aquello que constituye una demostración en $G3$ de un secuente dado, todas las variables que no ocurren en el secuente son iguales; por lo tanto, en la línea 4 es suficiente escribir la premisa para la $\rightarrow \forall$ con la variable particular $b_1$. Posteriormente de modo similar en la línea 8 elegimos otra variable particular $b_2$, que debe ser distinta de $b_1$ para satisfacer la restricción sobre variables de la $\rightarrow \forall$; etc.

$$
\begin{array}{ll}
*11. & \dfrac{\neg \mathrm{B}, \mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2) \rightarrow \mathrm{B}}{\vdots} \\
10. & \dfrac{7 \qquad\qquad 7 \text{ ó } \neg \mathrm{B}, \mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2) \rightarrow}{\vdots} \\
9. & \dfrac{7 \text{ ó } \neg \mathrm{B}, \mathcal{A}(b_1) \rightarrow \mathcal{A}(b_2) \quad \text{ó} \quad \neg \mathrm{B}, \mathcal{A}(b_1) \rightarrow \neg \mathcal{A}(b_2)}{\vdots} \\
8. & \dfrac{7 \text{ ó } \neg \mathrm{B}, \mathcal{A}(b_1) \rightarrow \mathcal{A}(b_2) \vee \neg \mathcal{A}(b_2)}{\vdots} \\
*7. & \dfrac{\neg \mathrm{B}, \mathcal{A}(b_1) \rightarrow \mathrm{B}}{\vdots} \\
6. & \dfrac{3 \qquad\qquad 3 \text{ ó } \neg \mathrm{B}, \mathcal{A}(b_1) \rightarrow}{\vdots} \\
5. & \dfrac{3 \text{ ó } \neg \mathrm{B} \rightarrow \mathcal{A}(b_1) \text{ o } \neg \mathrm{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}(b_1)}{\vdots} \\
4. & \dfrac{3 \text{ ó } \neg \mathrm{B} \rightarrow \mathcal{A}(b_1) \vee \neg \mathcal{A}(b_1)}{\vdots} \\
*3. & \dfrac{\neg \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B}}{\vdots} \\
2. & \dfrac{\neg \mathrm{B} \rightarrow}{\vdots} \\
1. & \rightarrow \neg \neg \mathrm{B}.
\end{array}
$$

A partir del fragmento de la estructura presentada, es claro el patrón general. No podemos tener un axioma en el primer nuevo secuente $\neg$ B, $\mathcal{A}(b_1) \rightarrow \mathcal{A}(b_2)$ de la Línea 9, ya que $b_1$ y $b_2$ son variables distintas; similarmente en el primer nuevo secuente de la Línea 13 $\neg$ B, $\mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2) \rightarrow \mathcal{A}(b_3)$; y así sucesivamente. Todos los demás secuentes que ocurren, y ello es incluso más obvio, no son axiomas. Préstese atención a la forma de las Líneas 3, 7, 11, ...; en la Línea $3 + 4n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ hemos excluido todas las posibilidades de encontrar una demostración no redundante de $\rightarrow \neg \neg$ B que no sea la de encontrar una de $\neg$ B, $\mathcal{A}(b_1), \ldots, \mathcal{A}(b_n) \rightarrow$ B con distintas variables $b_1, \ldots, b_n$. Por lo tanto, la búsqueda de una demostración no redundante de $\rightarrow \neg \neg$ B en $G3$ nunca terminará felizmente, sino que sólo nos irá elevando por una regresión infinita de secuentes progresivamente complicados. En otras palabras, establecemos que existe en $G3$ una demostración

no redundante de $\rightarrow \neg \neg$ B, solamente si existe una más corta de $\neg$ B $\rightarrow$ B, una aún más corta de $\neg$ B, $\mathcal{A}(b_1) \rightarrow$ B, de nuevo una más corta todavía de $\neg$ B, $\mathcal{A}(b_2) \rightarrow$ B, ad infinitum. Puesto que es absurdo que exista una sucesión infinita de demostraciones sucesivamente más cortas que comience por una primera demostración, concluimos que no existe demostración alguna de $\rightarrow \neg \neg$ B en el sistema intuicionista *G*3; y por lo tanto, en virtud del Teorema 56 (c), ninguna de $\neg \neg$ B en el cálculo de predicados intuicionista *H*.

(b) (i) Intentemos construir una demostración en *G*3, cuyo primer paso esté unívocamente determinado así:

$$\frac{\forall x\,(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \rightarrow \mathcal{A} \vee \forall x\,\mathcal{B}(x)}{\rightarrow \forall x\,(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x\,\mathcal{B}(x)}$$

2.

1.

De la forma del secuente que figura en la Línea 2, y de la de las reglas de *G*3, inferimos que en todo secuente que se encuentre por encima de la base uno en el antecedente pueden ocurrir sólo fórmulas de las cuatro formas $\forall x\,(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x))$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$(t) (t es un término, esto es, para el cálculo de predicados puros, una variable), $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$(t), y en el consiguiente sólo una fórmula de una de las cuatro formas $\mathcal{A} \vee \forall x\,\mathcal{B}(x)$, $\mathcal{A}$, $\forall x\,\mathcal{B}(x)$ y $\mathcal{B}$(b) (b es una variable). Las únicas posibilidades de que tal secuente sea un axioma son las de que tenga la forma $\mathcal{A}, \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ o la forma $\mathcal{B}$(t), $\Gamma \rightarrow \mathcal{B}$(b), donde t es b. Siempre que se aplique la regla de dos premisas $\vee \rightarrow$, el árbol que estamos construyendo se ramificará. Las restantes reglas para las que existe una posibilidad de aplicación después del primer paso son las reglas de una premisa $\forall \rightarrow$, $\rightarrow \vee$ y $\rightarrow \forall$. En una sucesión de opciones, para que se haya establecido una demostración es preciso que cada una de las ramas se halle coronada por un axioma. Demostraremos ahora que, independientemente de cuál sea la sucesión de pasos que se haya llevado a cabo, no se puede alcanzar axioma alguno en una de las ramas. A este fin, definimos la *rama designada* (en la que vamos a demostrar que no se puede alcanzar axioma alguno) especificando qué premisas le corresponden en cada una de las $\vee \rightarrow$, así. Sea $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$(t) la fórmula principal de la $\vee \rightarrow$. Si la fórmula del consiguiente contiene a $\mathcal{A}$ como componente parcial o total, la premisa de la rama designada (o *premisa designada*) será la que tiene a $\mathcal{B}$(t) por fórmula lateral; en otro caso, la que tiene a $\mathcal{A}$ por fórmula lateral. Consideremos ahora la siguiente *propiedad P* de un secuente, a saber la de que (1) $\mathcal{A}$ no ocurre como una de las fórmulas del antecedente, si la fórmula del consiguiente contiene a $\mathcal{A}$ como componente total o parcial, y (2) para toda variable b, $\mathcal{B}$(b) no ocurre como una de las fórmulas del antecedente, si $\mathcal{B}$(b) (para la misma b) es la fórmula del consiguiente. Ninguno de los tipos de axiomas descritos anteriormente goza de la propiedad *P*. Por lo tanto, para demostrar que en la rama designada no se puede alcanzar un axioma es suficiente demostrar que todo secuente existente en la rama designada satisface la propiedad *P*. Hacemos esto por inducción. Porque, en primer lugar, los secuentes existentes en las Líneas (1) y (2) satisfacen la propiedad *P*. Además, tal como verificaremos inmediatamente, cada inferencia transmitirá la propiedad *P* a lo largo de la rama designada, es decir, si la conclusión de la inferencia satisface la propiedad *P*, entonces también la satisface la premisa, o, en el caso de una $\vee \rightarrow$, la premisa designada. Para demostrarlo, debemos examinar cuatro casos, según la forma de la fórmula principal de la inferencia. CASO 1: $\forall x\,(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x))$ en el antecedente. Es obvio que se transmite la propiedad *P*, ya que la fórmula introducida en el antecedente por

la $\forall \rightarrow$ tiene la forma $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(t)$ y no se modifica el consiguiente. CASO 2: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(t)$ en el antecedente. Si el consiguiente contiene a $\mathcal{A}$ como componente total o parcial, la introduccion de $\mathcal{B}(t)$ como fórmula lateral de la premisa designada de la $\vee \rightarrow$ transmite la propiedad $P$. Si el consiguiente no contiene a $\mathcal{A}$ como componente total o parcial, la introducción de $\mathcal{A}$ como fórmula lateral de la premisa designada transmite la propiedad $P$. CASO 3: $\mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)$ como consiguiente. Puesto que la conclusión satisface la propiedad $P$, la fórmula $\mathcal{A}$ no ocurre entre las fórmulas del antecedente, en virtud de (1). Entonces la introducción ya de $\mathcal{A}$ ya de $\forall x \mathcal{B}(x)$ en el consiguiente como fórmula lateral de la $\rightarrow \vee$ transmite la propiedad $P$. CASO 4: $\forall x \mathcal{B}(x)$ como consiguiente. Por la restricción sobre variables en la $\rightarrow \forall$, la variable b de la fórmula lateral $\mathcal{B}(b)$ debe ser una variable que no ocurra en el antecedente, lo cual nos garantiza que se sigue satisfaciendo (2) para la propiedad $P$.

(ii) Consideremos ahora en su lugar $\neg \neg \{\forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)\}$; denominémosla "$\neg \neg$ C". Podemos tener ahora en el antecedente de secuentes que se encuentren por encima de la línea de origen también la fórmula $\neg$C, y como consiguiente también C. La inducción de la propiedad $P$ falla en el caso de que $\neg$C figure en el antecedente, ya que la $\neg \rightarrow$ puede introducir C como consiguiente si previamente se ha introducido $\mathcal{A}$ en el antecedente, dando lugar a una violación de (1). Practicada esta brecha en la demostración previa de indemostrabilidad, nos vemos conducidos a la siguiente demostración de $\rightarrow \neg \neg \{\forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)\}$, que establecemos en $G3a$. La rama designada, que en caso de no utilizar $\neg$ C como fórmula principal de una $\neg \rightarrow$ seríamos incapaces de coronar con un axioma, es la de la izquierda.

$$
\begin{array}{ll}
11. & \dfrac{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}}{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)} \rightarrow \vee \\
10. & \\
9. & \dfrac{\mathcal{A} \rightarrow \forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)}{} \rightarrow \supset \\
8. & \dfrac{\neg \mathrm{C}, \mathcal{A} \rightarrow \qquad \mathcal{B}(b) \rightarrow \mathcal{B}(b)}{} \vee \rightarrow \\
7. & \dfrac{\neg \mathrm{C}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}(b) \rightarrow \mathcal{B}(b)}{} \forall \rightarrow \\
6. & \dfrac{\neg \mathrm{C}, \forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \rightarrow \mathcal{B}(b)}{} \rightarrow \forall \\
5. & \dfrac{\neg \mathrm{C}, \forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \rightarrow \forall x \mathcal{B}(x)}{} \rightarrow \vee \\
4. & \dfrac{\neg \mathrm{C}, \forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \rightarrow \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)}{} \rightarrow \supset \\
3. & \dfrac{\neg \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}}{} \neg \rightarrow \\
2. & \dfrac{\neg \mathrm{C} \rightarrow}{} \rightarrow \neg \\
1. & \rightarrow \neg \neg \mathrm{C}.
\end{array}
$$

(iii) Si transformamos ahora la fórmula en
$\neg \neg \forall y \{\forall x (\mathcal{A}(y) \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A}(y) \vee \forall x \mathcal{B}x(x)\}$, la brecha queda cerrada. Porque la $\mathcal{A}$ obtenida en el antecedente con anterioridad a la $\neg \rightarrow$ se convierte en $\mathcal{A}(c)$ para alguna variable c. Entonces la $\mathcal{A}$ obtenida en el consiguiente después de la $\neg \rightarrow$, seguida ahora por una $\rightarrow \forall$ respecto de $y$ se convertirá en $\mathcal{A}(d)$, donde d es una variable distinta de c en razón de la restricción sobre variables de la $\rightarrow \forall$. El lector puede realizar las modificaciones de la demostración dada en (i) para establecer de un modo riguroso la indemostrabilidad.

(c) Consideremos, para una tabla dada, las fórmulas A, B, C, D, tales que B es A o se encuentra por debajo de A, C se encuentra inmediatamente debajo de B y separada de ella por una línea, y D es C o se encuentra por debajo de ella. Haciendo uso de *2, si $\vdash A \supset B$ y $\vdash C \supset D$, pero no $\vdash C \supset D$, entonces no $\vdash D \supset A$. Similarmente, haciendo uso de *24 y *49a, si $\vdash A \supset B$ y $\vdash C \supset D$, pero no $\vdash \neg\neg(C \supset B)$, entonces no $\vdash \neg\neg(D \supset A)$ y no $\vdash D \supset A$. Por lo tanto es suficiente tratar las implicaciones ascendentes entre los seis pares de fórmulas inmediatamente separadas por una línea, bajo doble negación si la línea es doble.

Ib $\supset$ Ia, IIb $\supset$ IIa. Si ambas fuesen demostrables, sustituyendo $\mathcal{A}(x)$ por $\mathcal{A}$ (Teorema 15 § 34) y haciendo uso de *75 ó *76, o haciendo uso del Teorema 22 § 37 para $k = 1$, $\neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$ sería demostrable. Por lo tanto no $\vdash$ Ib $\supset$ Ia y no $\vdash$ IIb $\supset$ IIa.

$\neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$. "B($x$)" represente $\mathcal{A}(x) \vee \neg A(x)$. Por *51a y $\forall$-introd. $\vdash \forall x \neg\neg \mathrm{B}(x)$. En consecuencia $\forall x \neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathrm{B}(x) \vdash \neg\neg \forall x \mathrm{B}(x)$. De ahí que por $\supset$-introd. y por contraposición dos veces (*13, *12), $\vdash \neg\neg\{\forall x \neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathrm{B}(x)\} \supset \neg\neg \forall x \mathrm{B}(x)$. Por lo tanto, si $\neg\neg\{\forall x \neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathrm{B}(x)\}$ fuese demostrable, lo sería $\neg\neg \forall x \mathrm{B}(x)$. Pero por (a), no $\vdash \neg\neg \forall x \mathrm{B}(x)$; por lo tanto no $\vdash \neg\neg\{\forall x \neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathrm{B}(x)\}$; y en consecuencia por la regla de sustitución (Teorema 15) no $\vdash \neg\neg\{\forall x \neg\neg \mathcal{A}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathcal{A}(x)\}$, es decir, no $\vdash \neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$.

$\neg\neg(\mathrm{IIIc} \supset \mathrm{IIIb}_2)$. Se reduce fácilmente a $\neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$.

$\mathrm{IIc}_1 \supset$ IIb. Por el Ejemplo 3 § 37 y el Ejemplo 4 de esta sección.

$\mathrm{IIIb}_1 \supset$ IIIa. Se reduce fácilmente a $\mathrm{IIc}_1 \supset$ IIb.

(d) *83–*85, *92. Incluidas en (b) y (c) (con *25, *92a).

*97. Demostramos que $(\mathcal{A} \supset \exists x \mathcal{B}(x)) \supset \exists x(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(x))$ es indemostrable, de modo similar a $\mathrm{IIc}_1 \supset$ IIb. (Tras la aplicación del Teorema 22 con $k = 2$, obtenemos en la Línea 3: $\{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2, \mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \rightarrow (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1) \vee (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_2)\}$ o $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1$ o $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{A} \supset \mathcal{B}_2$. En el tratamiento de la primera alternativa, es suficiente, por supuesto, demostrar que la primera de las dos premisas $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{A}$ es indemostrable). Demostramos $\neg\neg\{(\mathcal{A} \supset \exists x \mathcal{B}(x)) \supset \exists x(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(x))\}$, de modo similar a (b) (ii). (En las Líneas 4–9, hágase sucesivamente uso de $\rightarrow \exists, \rightarrow \supset, \supset \rightarrow, \neg \rightarrow, \exists \rightarrow$). Cfr. *97a.

*98. Sustituyendo $\mathcal{A}$ & $\neg\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ en $\neg\neg\{(\forall x \mathcal{A}(x) \supset \mathcal{B}) \supset \exists x(\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{B})\}$ y haciendo uso de *50 y *44, obtenemos $\neg\neg$(IIIc $\supset$ IIIa).

*99. Se reduce a *98 (cfr. el primer método para Ib $\supset$ Ia).

Heyting (1930a pág. 65) infiere la indemostrabilidad de la fórmula del Teorema 58 (a) y de $\mathrm{Ic}_1 \supset$ Ib a partir de la interpretación del cálculo de predicados intuicionista en términos de la teoría de conjuntos de Brouwer (final de § 13).

La demostración del Teorema 58 (a) por Kleene 1945 y Nelson 1947 deriva de resultados que se establecerán en § 82.

El actual modo de tratar (a) y (b) fue presentado por Kleene 1948; y algunas aplicaciones similares del teorema de Gentzen se encuentran en Curry 1950 (ya en prensa en 1948). de Iongh 1948 hace uso del método para establecer una clasificación intuicionista de aquellas fórmulas construidas a partir de $\mathcal{A}(x, y, z)$ mediante cuantificación de $x$, $y$ y $z$ y mediante posibles aplicaciones de la negación que son equivalentes clásicamente a $\forall x \exists y \forall z\, \mathcal{A}(x, y, z)$, análoga a cada una de las cuatro tablas de Heyting 1946 para un cuantificador (Corolario del Teorema 17 § 35 y Teorema 58 (c)).

Toma como ejemplo esta secuencia de cuantificadores por el papel que desempeña en la formulación de la noción de convergencia de una secuencia hacia un límite (cfr. § 35 (i) o (ii), con omisión de las $x$).

Mostowski 1948 demuestra la indemostrabilidad de $\neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$, y de (b) (i), mediante una interpretación del cálculo de predicados intuicionista en términos de retículos "Brouwerianos completos". Henkin 1950a extiende los resultados de Mostowski hasta obtener una caracterización algebraica de los cuantificadores, válida tanto para la lógica intuicionista como para la clásica.

§ 81. **Reducciones de los sistemas clásicos a intuicionistas.** En lo que resta de capítulo haremos uso de los sistemas de tipo Hilbert *H*. Cuando $\Gamma$ es una secuencia de cero o más fórmulas, $\neg\Gamma$, $\neg\neg\Gamma$, $\Gamma^\circ$, etc. serán el resultado de aplicar a cada una de las fórmulas de $\Gamma$, respectivamente, $\neg$, $\neg\neg$, $^\circ$ (tal como se define más adelante), etc.

El resultado principal de la primera parte de esta sección es presentado en varias versiones, si bien su relevancia puede considerarse a partir de una sola. El lector que prefiera un método simplificado puede, en tal sentido, elegir: El Teorema 59 y las Demostraciones, la Definición y la Discusión de $^\circ$, el Teorema 60 (a) para sólo $^\circ$ y (c), el Lema 43a y la Demostración, la Demostración del Teorema 60 (c), el Corolario 2 (con omisión del material restante presentado hasta este punto).

TEOREMA 59. (a1) *Si* $\Gamma \vdash \mathrm{E}$ *en el cálculo proposicional clásico, entonces* $\neg\neg\Gamma \vdash \neg\neg\mathrm{E}$ *en el cálculo proposicional intuicionista.* (a2) *Si* $\neg\Gamma, \Delta \vdash \neg\mathrm{E}$ *en el cálculo proposicional clásico, entonces* $\neg\Gamma, \neg\neg\Delta \vdash \neg\mathrm{E}$ *en el cálculo proposicional intuicionista.* (Glivenko, 1929).

(b) *Similarmente para el cálculo de predicados sin la Regla* 9, *y para el sistema de la teoría formal de números sin la Regla* 9.

DEMOSTRACIONES. (a1) Por inducción sobre la longitud de la deducción clásica dada $\Gamma \vdash \mathrm{E}$ (es decir, de la deducción de E a partir de $\Gamma$, cuya existencia afirma "$\Gamma \vdash \mathrm{E}$", cfr. § 22), haciéndose uso de las siguientes observaciones. Si E es un axioma del cálculo proposicional clásico conforme a algún esquema axiomático que no sea el 8, entonces E es también un axioma desde el punto de vista intuicionista, y, en virtud de *49a § 27, $\vdash \neg\neg\mathrm{E}$ en el sistema intuicionista. Si E es un axioma según el Esquema Axiomático 8, entonces, en virtud de *51b, de nuevo $\vdash \neg\neg\mathrm{E}$ intuicionistamente. Además, en correspondencia con la Regla 2, $\neg\neg\mathrm{A}, \neg\neg(\mathrm{A}\supset\mathrm{B}) \vdash \neg\neg\mathrm{B}$ intuicionistamente, haciendo uso de *23 § 26. (a2) A partir de (a1) y haciendo uso de *49b.

(b) Dado que los esquemas axiomáticos adicionales y los axiomas particulares corresponden tanto al sistema intuicionista como al clásico, precisamos tan sólo añadir un tratamiento de la regla adicional de inferencia 12. Si se hace uso de *23, de la Regla 12 y de *49a: (i) $\neg\neg(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{C}) \vdash \neg\neg\mathrm{A}(x)\supset\neg\neg\mathrm{C} \vdash^x \exists x\,\neg\neg\mathrm{A}(x) \supset \neg\neg\mathrm{C} \vdash \neg\neg(\exists x\,\neg\neg\mathrm{A}(x)\supset\neg\neg\mathrm{C})$. Haciendo uso de *49a, *70 § 32 y *49a: (ii) $\vdash \neg\neg(\exists x\mathrm{A}(x)\supset\exists x\,\neg\neg\mathrm{A}(x))$. En virtud de *51b:
(iii) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\mathrm{C}\supset\mathrm{C})$. Si combinamos (ii), (i) y (iii) en virtud de *24, $\neg\neg(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{C}) \vdash^x \neg\neg(\exists x\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{C})$.

EJEMPLO 1. Por (a1), cada uno de los resultados numerados que se establecieron en el Capítulo VI sólo para el cálculo proposicional clásico (véase el Teorema 57(b))

valen, bajo doble negación (aplicada en el caso de *14 y *15 a ambas fórmulas), intuicionistamente.

EJEMPLO 2. Que *97 es válido bajo doble negación desde el punto de vista intuicionista (lo cual demostramos ya por otro método en el Teorema 58(d)) se sigue ahora de (b) y el Teorema 49 § 78.

COROLARIO (a(a2)). *Si* E *es una fórmula de letras proposicionales que no contiene más símbolos lógicos que* & *y* $\neg$, *y* $\vdash$ E *en el cálculo proposicional clásico, entonces* $\vdash$ E *en el cálculo proposicional intuicionista.* (Gödel, 1932-3).

DEMOSTRACION. Consideremos que E es una conjunción de $n$ fórmulas ($n \geq 1$) cada una de las cuales no es una conjunción, y, por tanto, o es una letra proposicional o comienza por el símbolo $\neg$. &-elim., cada uno de estos $n$ componentes es demostrable clásicamente. Pero ninguna letra proposicional es demostrable (en virtud del Teorema 9 § 28). En consecuencia cada componente es una negación y, por el teorema de Glivenko ((a2)), es también demostrable desde el punto de vista intuicionista. Por lo tanto, en virtud de &-introd., también lo es E.

DEFINICION DE $^\circ$. En lo que resta de esta sección, las fórmulas $\Gamma$, la fórmula E, etc., serán fórmulas de letras proposicionales, fórmulas de letras predicativas, o fórmulas de teoría de números, según que estemos considerando el cálculo proposicional, el cálculo de predicados, o la teoría formal de números. Por *parte prima* de una fórmula entendemos una parte (consecutiva) que es una fórmula prima, es decir, que no contiene símbolo lógico alguno.

Para cualquier fórmula E, definimos $E^\circ$ mediante la siguiente recursión. 1. Si P es una fórmula prima, $P^\circ$ es P. 2–5. Si A y B son fórmulas, $(A \supset B)^\circ$ es $A^\circ \supset B^\circ$, $(A \,\&\, B)^\circ$ es $A^\circ \,\&\, B^\circ$, $(A \vee B)^\circ$ es $\neg(\neg A^\circ \,\&\, \neg B^\circ)$, y $(\neg A)^\circ$ es $\neg A^\circ$. 6–7. Si x es una variable y A(x) es una fórmula, $(\forall x A(x))^\circ$ es $\forall x A^\circ(x)$ (donde $A^\circ(x)$ es $(A(x))^\circ$), y $(\exists x A(x))^\circ$ es $\neg \forall x \neg A^\circ(x)$.

En resumen, $E^\circ$ resulta de E mediante reemplazo (o "traducción") de cada una de las partes de E que tiene la forma abajo presentada en la primera línea por la expresión correspondiente presentada en la segunda.

| $A \supset B$ | $A \,\&\, B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $\forall x A(x)$ | $\exists x A(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| " | " | $\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ | " | " | $\neg \forall x \neg A(x)$ |

EJEMPLO 3. Sean A(x) y B primas (y B no contenga a x libre).
Si E es $[\forall x A(x) \supset B] \supset \exists x [A(x) \supset B]$ (cfr. *98), entonces
$E^\circ$ es $[\forall x A(x) \supset B] \supset \neg \forall x \neg [A(x) \supset B]$.

DISCUSION DE $^\circ$. En el próximo teorema se demuestra que los sistemas clásicos se pueden definir dentro de los intuicionistas. En particular, para el sistema de teoría de números, si $\vdash$ E desde el punto de vista clásico, entonces $\vdash E^\circ$ desde el punto de vista intuicionista. La conversa es obviamente válida (ya que $\vdash E \sim E^\circ$ desde el punto de vista clásico), así como lo son las conversas del Teorema 59 y las restantes partes del Teorema 60. Así pues, una fórmula E es demostrable en el sistema clásico si, y sólo si, la fórmula $E^\circ$ a ella correlativa es demostrable en el sistema intuicionista. Podemos considerar a $E^\circ$ como resultado

obtenido a partir de E mediante transformación de los símbolos lógicos $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, en $\supset^{\circ}$, $\&^{\circ}$, $\vee^{\circ}$, $\neg^{\circ}$, $\forall^{\circ}$, $\exists^{\circ}$, respectivamente, donde "A $\supset^{\circ}$ B" es una abreviatura de A $\supset$ B, "A $\vee^{\circ}$ B" de $\neg$ ($\neg$ A & $\neg$ B), etc. Se puede subrayar el sentido en el que las fórmulas clásicas son de este modo "traducidas" a intuicionistas mediante utilización de símbolos lógicos diferentes (digamos $\supset^{C}$, $\&^{C}$, $\vee^{C}$, $\neg^{C}$, $\forall^{C}$, $\exists^{C}$) para el sistema clásico (línea superior en la anterior tabla de traducción).

DEFINICION DE $'$, ETC. Para los cálculos proposicional y de predicados hacemos uso de otras correlaciones. Obténgase E$'$ a partir de E del mismo modo que se obtenía E$^{\circ}$ con la salvedad de que A $\supset$ B se traduce por $\neg$ (A & $\neg$ B). Obténgase E$^{\dagger}$ a partir de E mediante reemplazo de cada parte prima P por $\neg\neg$P; y E$^{\ddagger}$ del mismo modo, con la salvedad de que P es reemplazada por $\neg\neg$P sólo donde aquélla se encuentre sola (es decir, cuando E misma es P), o inmediatamente dentro del alcance de un & o de un $\forall$, o es la segunda parte del alcance de un $\supset$; y obténgase E* como E$^{\ddagger}$, con la salvedad de que no se realizan los reemplazos en la segunda parte del alcance de $\supset$.

EJEMPLO 3 (conclusión).

E$'$ es $\neg\{\neg[\forall x A(x) \& \neg B] \& \neg\neg\forall x \neg\neg[A(x) \& \neg B]\}$,

E$^{\circ\dagger}$ es $[\forall x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg B] \supset \neg\forall x \neg[\neg\neg A(x) \supset \neg\neg B]$,

E$^{\circ\ddagger}$ es $[\forall x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg B] \supset \neg\forall x \neg[A(x) \supset \neg\neg B]$, y

E*$'$ es $\neg\{\neg[\forall x \neg\neg A(x) \& \neg B] \& \neg\neg\forall x \neg\neg[A(x) \& \neg B]\}$.

Para el cálculo proposicional, no puede existir teorema inverso alguno que proporcione una reducción similar del sistema intuicionista al clásico en la que las conectivas proposicionales intuicionistas se definan explícitamente a partir de las clásicas. Porque esto proporcionaría un método de decisión por tablas de verdad para el cálculo proposicional intuicionista, en contradicción con Gödel 1932.

TEOREMA 60. (a) *Para cualquier fórmula* E, *en el cálculo proposicional, en el cálculo de predicados, o en el sistema formal de teoría de números,* $\vdash$ E $\sim$ E$^{\circ}$ $\sim$ E$'$ $\sim$ E$^{\circ\dagger}$ $\sim$ E$^{\circ\ddagger}$ $\sim$ E*$'$ *clásicamente* (por *56, *83, *58, *49).

(b1) *Para el cálculo proposicional, si* $\vdash$ E *desde el punto de vista clásico, entonces* $\vdash$ E$'$, *desde el punto de vista intuicionista.* (b2) *Para el sistema formal de teoría de números, si* $\Gamma \vdash$ E *clásicamente, entonces* $\Gamma' \vdash$ E$'$ *intuicionistamente. (Gödel,* 1932-3).

(c) *Para el sistema formal de teoría de números, si* $\Gamma \vdash$ E *desde el punto de vista clásico, entonces* $\Gamma^{\circ} \vdash$ E$^{\circ}$ *desde el punto de vista intuicionista.* (Gentzen, 1936 pág. 532 y Bernays).

(d) *Para el cálculo proposicional, el cálculo de predicados, o el sistema formal de teoría de números, si* $\Gamma \vdash$ E *desde el punto de vista clásico, entonces* $\Gamma^{\circ\dagger} \vdash$ E$^{\circ\dagger}$ (*también* $\Gamma^{\circ\ddagger} \vdash$ E$^{\circ\ddagger}$ y $\Gamma^{*\prime} \vdash$ E*$'$) *desde el punto de vista intuicionista.*

DEMOSTRACIONES. (b1) Si se hace uso de (a), si $\vdash$ E desde el punto de vista clásico, entonces $\vdash$ E$'$ desde el punto de vista clásico. Pero E$'$ contiene como opera-

dores tan sólo & y $\neg$. Por lo tanto (b1) se sigue del Corolario del Teorema 59. (Recíprocamente, el Corolario del Teorema 59 es implicado por (b1)).

Demostraremos (c) después del primer lema, y entonces inferiremos (b2).

LEMA 43a. *Para el sistema formal de teoría de números, si* F *no contiene símbolo lógico alguno que no sea* $\supset$, &, $\neg$, $\forall$ *(en particular, si* F *es* $E^\circ$ *para alguna fórmula* E), *entonces* $\vdash \neg\neg F \supset F$ *(y por lo tanto* $\vdash \neg\neg F \sim F$) *intuicionistamente.* (Como consecuencia de Gödel 1932-3).

DEMOSTRACION DEL LEMA 43a, por inducción sobre el número de (ocurrencias de) símbolos lógicos en F.

BASE: F presenta la forma s = t, donde s y t son términos. En virtud de *158 § 40, $\vdash s=t \vee \neg s=t$, por lo que, en virtud de *49c, $\vdash \neg\neg s=t \supset s=t$.

PASO INDUCTIVO. CASO 1: F es $A \supset B$. Por la hipótesis de inducción: (i) $\neg\neg B \supset B$. En virtud de *60g, h: (ii) $\neg\neg(A \supset B) \vdash A \supset \neg\neg B$. De (ii) y (i) y en virtud de inferencia de cadena (*2), $\neg\neg(A \supset B) \vdash A \supset B$, y por $\supset$-introd., $\vdash \neg\neg(A \supset B) \supset (A \supset B)$. CASO 2: F es A & B. Por la hipótesis de inducción, $\vdash \neg\neg A \supset A$ y $\vdash \neg\neg B \supset B$. Hágase uso de *25. CASO 3: F es $\neg$ A. En virtud de *49b. CASO 4: F es $\forall x A(x)$. Hágase uso de la hipótesis de inducción, de *69 y de $\vdash Ib \supset Ic_1$ del Corolario del Teorema 17.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 60 (c). Por inducción sobre la longitud de la deducción clásica dada $\Gamma \vdash E$, con los casos que siguen.

CASO 1: E es uno de los axiomas particulares 14–21, o un axioma conforme a alguno de los esquemas que no sea el 11. Entonces $E^\circ$ es E, o es un axioma conforme al mismo esquema, o es deducible en el cálculo proposicional clásico (mediante uso de *56 y el Teorema 6 § 26) a partir de algún axioma conforme al mismo esquema; por lo tanto $E^\circ$ es demostrable en el sistema del cálculo proposicional clásico al que se han añadido los demás axiomas y esquemas axiomáticos. (Por ejemplo, si E es un axioma $A \supset (B \supset A)$ conforme al Esquema 1a, entonces $E^\circ$ es $A^\circ \supset (B^\circ \supset A^\circ)$, que es un axioma conforme al mismo esquema. Si E es un axioma $A \supset A \vee B$ conforme al Esquema 5a, entonces $E^\circ$ es $A^\circ \supset \neg(\neg A^\circ \,\&\, \neg B^\circ)$, que es deducible de $A^\circ \supset A^\circ \vee B^\circ$ por *56 y el Teorema 6, ya que la parte a reemplazar no se encuentra dentro del alcance de un cuantificador). Por lo tanto, en virtud del Teorema 59 (b), $\vdash \neg\neg E^\circ$ en el sistema intuicionista de teoría de números; y en consecuencia, por el Lema 43a, $\vdash E^\circ$ en el mismo. CASO 2: el Esquema axiomático 11. Entonces E es $A(t) \supset \exists x A(x)$, y $E^\circ$ es $A^\circ(t) \supset \neg\forall x \neg A^\circ(x)$, que es demostrable intuicionistamente por contraposición (*13) a partir de axioma $\forall x \neg A^\circ(x) \supset \neg A^\circ(t)$.

CASO 3: La Regla 2. Debemos demostrar que $A^\circ$, $(A \supset B)^\circ \vdash B^\circ$ desde el punto de vista intuicionista. Pero $(A \supset B)^\circ$ es $A^\circ \supset B^\circ$. CASO 4: La Regla 9. De modo similar. CASO 5: La Regla 12. Con el auxilio de *12 y el Lema 43a.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 60 (b2). En virtud del Lema 43a y *58f § 27, toda parte de $\Gamma^\circ$, $E^\circ$ que presente la forma $A \supset B$ es equivalente a $\neg(A \,\&\, \neg B)$.

LEMA 43b. *Para el cálculo proposicional o de predicados, si* F *no contiene símbolo lógico alguno que no sea* $\supset$, &, $\neg$, $\forall$ *(en particular, si* F *es* $\mathrm{E}^{\circ}$ *para alguna fórmula* E), *entonces* $\vdash \neg\neg \mathrm{F}^{\dagger} \supset \mathrm{F}^{\dagger}$ *(y por tanto* $\vdash \neg\neg \mathrm{F}^{\dagger} \sim \mathrm{F}^{\dagger}$) *desde el punto de vista intuicionista.*

DEMOSTRACION DEL LEMA 43b. De modo similar a la del Lema 43a, mediante uso de *49b en la base en lugar de *158 y *49c.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 60 (d). Para el sistema de teoría de números y $^{\circ\dagger}$, a partir de (c) en virtud del Lema 43a. Para el cálculo proposicional o de predicados y $^{\circ\dagger}$, a partir del Lema 43b del mismo modo que (c) a partir del Lema 43a. (Mediante uso del Lema 43a ó 43b, *58e y *49b, se puede transformar el resultado en $\Gamma^{\circ\ddagger} \vdash \mathrm{E}^{\circ\ddagger}$; si se hace uso, además, de *58f, se puede transformar en $\Gamma^{*\prime} \vdash \mathrm{E}^{*\prime}$).

OBSERVACION 1. Para demostrar que el Teorema 59 no es válido para el cálculo de predicados sin la exclusión de la Regla 9, y que el Teorema 60 (b) no es válido para el cálculo de predicados, consideremos como ejemplo $\forall x \neg \neg \mathscr{A}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathscr{A}(x)$. Denominemos "E" a esta fórmula. Entonces $\vdash$ E desde el punto de vista clásico, pero desde el punto de vista intuicionista ni $\vdash$ E ni $\vdash \neg\neg$ E (Corolario del Teorema 17 § 35 y Teorema 58 (c)), y además, no $\vdash \mathrm{E}'$, ya que a partir de $\mathrm{E}'$ podemos deducir E intuicionistamente en virtud de *49b y *58b. El ejemplo $\neg\neg \mathscr{A} \supset \mathscr{A}$ demuestra que el Teorema 60 (c) no es válido para el cálculo proposicional o de predicados; y el ejemplo $\neg\neg\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$, que el Corolario del Teorema 59 y el Teorema 60 (b1) no son válidos con fórmulas supuestas $\Gamma$. Un ejemplo que demuestre que el Teorema 59 no es válido para el sistema de teoría de números sin la exclusión de la Regla 9 habrá de esperar a la próxima sección (Teorema 63 (iii)), puesto que no poseemos de momento método alguno que demuestre un ejemplo de una fórmula de teoría de números demostrable clásicamente pero no demostrable intuicionistamente.

COROLARIO 1 (a (c)). *Para el sistema formal de teoría de números, si* $\Gamma$, E *no contienen símbolo lógico alguno que no sea* $\supset$, &, $\neg$, $\forall$, *y* $\Gamma \vdash$ E *desde el punto de vista clásico, entonces* $\Gamma \vdash$ E *desde el punto de vista intuicionista.* (a (d) para $^{\circ\ddagger}$). *Análogamente para el cálculo proposicional o de predicados, siempre que además* $\Gamma$, E *no contengan letra alguna no precedida de negación más que como antecedente de una implicación.*

COROLARIO 2 (a (b2), (c) o (d)). *El sistema formal clásico de teoría de números es simplemente consistente si lo es el intuicionista.*

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2. Si $1 = 0$ fuese demostrable en el sistema clásico, también lo sería en el intuicionista.

DISCUSION. Gödel insiste: "El teorema [60 (b2), o ahora (c)] ... demuestra que la aritmética y la teoría de números intuicionistas son sólo en apariencia más restringidas que las clásicas; de hecho [aquélla] incluye toda la [teoría de números] clásica, simplemente con una interpretación que difiere en cierto sentido".

Heyting añade: "Sin embargo para los intuicionistas esta interpretación es lo esencial". (1934 * pág. 18).

de Iongh dice: "En nuestra opinión de significistas la utilidad más importante de las matemáticas intuicionistas es la de que distingue en todo momento entre proposiciones demostradas directa e indirectamente y analiza los conceptos matemáticos en secuencias de conceptos con diferente grado del modo indirecto". (1948, pág. 746).

van Dantzig 1947 se propone investigar hasta qué punto pueden los desarrollos de las matemáticas clásicas ser incluidos dentro de las intuicionistas, como acabamos de demostrar que es posible para la totalidad de la teoría elemental de números usual. A este fin, las fórmulas clásicas E se traducen a fórmulas clásicas F equivalentes que son estables desde el punto de vista intuicionista, es decir tales que $\vdash \neg\neg F \sim F$ (cfr. Lema 43a). van Dantzig apunta que tal vez se podría interpretar prácticamente la totalidad de las matemáticas clásicas dentro de esta sección estable del sistema intuicionista.

Respecto al problema de la consistencia, los presentes resultados pueden ser considerados como índice de que la teoría de números intuicionista se halla necesitada, al igual que la clásica, de una demostración metamatemática de consistencia, o, si se acepta la consistencia del sistema intuicionista sobre la base de su interpretación, como garantía de la consistencia del sistema clásico.

Algunos formalistas hacen ver que los métodos de la teoría elemental de números intuicionista va más allá de lo que ellos consideran finitista (cfr. Hilbert-Bernays 1934, pág. 43 y Bernays 1935). Se dice que el uso intuicionista de las negaciones de fórmulas complicadas, y de implicaciones que contienen en el antecedente una fórmula complicada (por ejemplo, una fórmula de generalidad, u otra implicación) contraviene la noción lógica general de qué sea una demostración intuicionista. Es por tal uso de la negación y la implicación por lo que Brouwer y sus seguidores son capaces de ir en el desarrollo de una matemática constructivista más allá que el precursor de Brouwer, Kronecker.

Los intuicionistas no intentan dar una descripción exacta de su noción de demostración en general, y dicen que en principio no es posible descripción tal alguna.

El uso que el intuicionista hace de la negación y la implicación debe ser entonces entendido sólo en el sentido de que nos exige reconocer, por ejemplo, que una demostración particular dada es aceptable intuicionistamente, o (en el caso de que aquél demuestre un enunciado de la forma $(A \to B) \to C$) que si se lleva a cabo una deducción aceptable intuicionistamente de un enunciado $B$ a partir de otro $A$, entonces, sobre la base de tal deducción, se podría, mediante un método dado, construir de modo seguro una demostración aceptable intuicionistamente de un tercer enunciado $C$.

Bernays 1938 intenta defender la inducción transfinita hasta $\varepsilon_0$ de Gentzen (final de § 79), en el sentido de que dicha inducción constituye una extensión del más restringido punto de vista finitista, pero lo es en menor grado que el cuerpo total de los métodos intuicionistas en la teoría de números.

de Iongh 1948 trata de un modo muy breve las discusiones actuales en torno al intuicionismo y tendencias afines (especialmente *significs*, representada por Mannoury 1909, 1925, 1934).

Examinemos ahora el modo en que el Corolario 2 del Teorema 60 proporciona una demostración de consistencia para la teoría elemental de números clásica a partir del punto de vista intuicionista. La parte segunda de esta demostración es

una verificación tácita o explícita de que el sistema formal intuicionista para la teoría de números es intuicionistamente correcto.

Puesto que la demostración del Corolario 2 del Teorema 60 es totalmente elemental, en virtud del teorema de Gödel sobre demostraciones de consistencia (Teorema 30 § 42) la parte segunda no puede serlo.

Es interesante hacer notar que, así como en el caso de la demostración de consistencia de Gentzen mediante uso de la inducción transfinita hasta $\varepsilon_0$, la presente demostración de consistencia se puede analizar como dependiente, en su único paso no elemental, del uso de un predicado definido mediante una inducción en cuyo paso de inducción intervienen cuantificadores de ambos tipos, a saber (aquí) el predicado de verdad para fórmulas de teoría de números. Definiremos este predicado próximamente.

Bajo la usual interpretación de los símbolos 0, ′, +, ·, de las variables como variables de números naturales, y de las operaciones de formación de términos a partir de ellos en correspondencia con operaciones informales de definición explícita, todo término $t(x_1, ..., x_n)$ que contenga sólo las distintas variables $x_1, ..., x_n$ expresa una función recursiva primitiva $t(x_1, ..., x_n)$, o, para $n = 0$, un número $t$. Bajo la interpretación usual de $=$, entonces toda fórmula prima $P(x_1, ..., x_n)$ que contenga solamente $x_1, ..., x_n$ expresa un predicado recursivo primitivo $P(x_1, ..., x_n)$, o, para $n = 0$, una proposición $P$. Para toda fórmula prima cerrada P, la verdad o falsedad de $P$ es determinada (y efectivamente decidible) en nuestra teoría de funciones recursivas primitivas, por lo tanto no construiremos esta parte de la definición de verdad. (Ciertamente esta teoría nos llevaría algo lejos; cfr. el Ejemplo 4 que sigue).

(A) Tomando esto como base, definimos 'verdadero' aplicado a una fórmula cualquiera clausurada E de la teoría de números, por inducción sobre el número de (ocurrencias de) símbolos lógicos en E. Por supuesto, en esta definición "si" significa "si y sólo si", tal como es común en definiciones.

1. Una fórmula prima clausurada P es *verdadera*, si $P$, es decir, si $P$ es una proposición verdadera en la teoría de funciones recursivas.

Para las Cláusulas 2–5, A y B son fórmulas clausuradas cualesquiera.

2. A & B es *verdadera*, si A es *verdadera* y B es *verdadera*.

3. A ∨ B es *verdadera*, si A es *verdadera* o B es *verdadera*.

4. A ⊃ B es *verdadera*, si A es *verdadera* implica que B es *verdadera* (es decir, si A es *verdadera* sólo si B es *verdadera*).

5. ¬ A es *verdadera*, si A no es *verdadera*.

Para las cláusulas 6 y 7, x es una variable, y A(x) es una fórmula que contiene sólo a x libre. (Entonces si $x$ es un número natural, $\mathfrak{x}$ es el correspondiente numeral, § 41).

6. ∃ xA(x) es *verdadera*, si, para algún número natural $x$, A($\mathfrak{x}$) es *verdadera*.

7. ∀xA(x) es *verdadera*, si, para todo número natural $x$, A($\mathfrak{x}$) es *verdadera*.

(B) Una fórmula de teoría de números $A(y_1, ..., y_m)$ que contenga libres sólo las distintas variables $y_1, ..., y_m$ es *verdadera*, si, para cada $m$-tuplo $y_1, ..., y_m$ de números naturales, $A(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$ es *verdadera.* (No precisamos estipular aquí que $y_1, ..., y_m$ ocurren todas libres en $A(y_1, ..., y_m)$ ni el orden de ocurrencia, ya que si una fórmula es verdadera para una elección cualquiera de la lista $y_1, ..., y_m$, es verdadera para cualquier otra).

EJEMPLO 4. El si una fórmula E sin variables es verdadera o falsa (es decir, no verdadera) se puede decidir mediante uso de las tablas de verdad de dos valores; y toda fórmula $A(x_1, ..., x_n)$ sin cuantificadores y exactamente con $x_1, ..., x_n$ como variables, expresa un predicado recursivo primitivo $A(x_1, ..., x_n)$ tal que $A(x_1, ..., x_n) \equiv \{A(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n)$ es verdadera$\}$. (Cfr. anteriormente el Teorema 51 § 79). Por (A), (C) y (D) § 41: *En el sistema formal de teoría de números toda fórmula verdadera sin variables es demostrable, y toda fórmula* $A(x_1, ..., x_n)$ *sin cuantificadores expresa numeralmente el predicado* $A(x_1, ..., x_n)$ *que expresa bajo la interpretación.*

Haciendo uso de esta definición, podemos establecer el teorema siguiente, que presenta en gran parte la misma estructura que el Teorema 21 § 37, que le corresponde en el cálculo de predicados.

TEOREMA 61. (a)$^{N}$ *Si* $\Gamma \vdash E$ *en el sistema formal intuicionista de teoría de números, y las fórmulas* $\Gamma$ *son verdaderas, entonces* E *es verdadera.* (b)$^{C}$ *Similarmente en el sistema formal clásico de teoría de números.*

La única diferencia entre las demostraciones de las Partes (a) y (b) es la de que para (b) necesitamos hacer uso de métodos clásicos a la hora de tratar un axioma según el Esquema axiomático 8 clásico. Marcamos la Parte (a) con "N" para indicar que, aunque el razonamiento sea intuicionista, se hace uso de métodos no elementales, y la Parte (b) con "C" para indicar que se emplean métodos clásicos no intuicionistas (cfr. § 37).

Ya que A y $\neg$ A no pueden ser ambas verdaderas, el Teorema 61 (a) (para $\Gamma$ vacía) implica la consistencia simple de la teoría de números intuicionista, y por lo tanto, en virtud del Corolario 2 del Teorema 60, la de la teoría de números clásica, como resultado "N". Lo que se gana con el Teorema 60 es el que no hayamos de denominar al último un resultado "C", cosa que deberíamos hacer en el caso de inferirlo directamente del Teorema 61 (b).

EJEMPLO 5. (a) *Una fórmula prenexa* $\forall\exists$, *si es verdadera, es verdadera de modo general recursivo* (§ 79). Por ejemplo, si $\forall v \exists w_0 \exists w_1 C(v, w_0, w_1)$, donde $C(v, w_0, w_1)$ no contiene cuantificador alguno y sólo las distintas variables expresadas, es verdadera entonces $(v)\{C(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_0(v), \boldsymbol{w}_1(v)$ es $t\}$ cuando $w_i(v) = (\mu w C(v, (w)_0, (w)_1))_i$, que es general recursiva si se hace uso de # 19 § 45 y el Teorema III § 57. (b)$^{N \text{ o } C}$ En consecuencia, en virtud del Teorema 61 (a) o (b): *En el sistema formal de teoría de números, toda fórmula prenexa* $\forall\exists$ *demostrable es verdadera de modo general recursivo.* (Cfr. Consideración 2 § 79).

Bajo nuestra numeración gödeliana de las fórmulas, el predicado 'A es verdadera' se convierte en un predicado $T(a)$ de teoría de números, cuyos valores pueden darse a

modo de proposiciones construidas a partir de predicados recursivos primitivos mediante las operaciones del cálculo proposicional y de los cuantificadores, siendo ilimitado el número que se utilice de estos últimos. Por el Teorema 30 vemos que no puede ser expresado dicho predicado $T(a)$, ni sus propiedades esenciales ser demostradas, dentro del sistema, ya que en tal caso formalizaríamos la anterior demostración de consistencia dentro del sistema. (Cfr. Hilbert-Bernays 1939 págs. 329-340).

De hecho, cada uno de los predicados $(Ex)\ T_1\ (a, a, x)$, $(x)\ (Ey)\ T_2\ (a, a, x, y)$, $(Ey)\ (y)\ (Ez)\ T_3\ (a, a, x, y, z)$, ... (cfr. la Parte II (b) del Teorema V § 57) se puede expresar bajo la forma $T(\psi(a))$ con una $\psi$ recursiva primitiva, como puede verse por el Corolario del Teorema I § 49 (en virtud del cual las fórmulas proporcionadas por el Corolario del Teorema 27 para expresar numeralmente los predicados $T_1, T_2, T_3$, ... los expresan también bajo la interpretación) y por el Ejemplo 2 § 52. Por lo tanto, en virtud de los Teoremas VII (d) y V, $T(a)$ no es aritmético.

Las definiciones de verdad para sistemas formales fueron originalmente estudiadas por Tarski (1932, 1933). Estableció que, si un sistema formal (efectivo) que incluya la teoría usual de números es consistente, debe ser imposible expresar el predicado $T(a)$ para el sistema mediante una fórmula T (a) tal que $T(\mathbf{a}) \sim \mathrm{A}_a$ sea demostrable en el sistema siempre que $a$ sea el número de Gödel de una fórmula cerrada $\mathrm{A}_a$. Ya que en tal caso podría efectuarse en el sistema la argumentación de la paradoja de Epiménides (§ 11). (Para más detalles, véase Hilbert y Bernays 1939, págs. 254-269).

Las nociones de verdad para fórmulas deberían diferir desde el punto de vista intuicionista y desde el clásico. La anterior definición de verdad, sin embargo, se halla expresada de un modo común para los dos, y toda diferencia en las nociones ha de realizarse en nuestra lectura de los términos barajados en la definición. En § 82 presentaremos otra definición de verdad, junto con un teorema relativo a la misma y que se corresponde con el Teorema 61, cuya aplicación reservaremos para el sistema intuicionista. Los primeros resultados, así como el Teorema 61 (a), serán intuicionistas si bien no elementales ("N"), pero conducen a resultados que son metamatemáticos en el sentido más estricto.

§ 82. **Realizabilidad recursiva.** Nuestro problema es el de expresar la interpretación de la teoría intuicionista de números de un modo tal que haga explícito algún aspecto en el que difiera de la clásica.

El significado de un enunciado existencial "$(Ex)\,A\,(x)$" para los intuicionistas se ha explicado diciendo que constituye una comunicación incompleta de un enunciado que presenta un $x$ tal que $A\,(x)$ (Hilbert y Bernays 1934 pág. 32). Pero el propio "$A\,(x)$" puede a su vez ser una comunicación incompleta. Por esta razón digamos que "$(Ex)\,A\,(x)$" es una comunicación incompleta, que se completa presentando un $x$ tal que $A\,(x)$ junto con la información adicional requerida para completar la comunicación "$A\,(x)$" para tal $x$.

La idea puede extenderse a las restantes operaciones lógicas. Por ejemplo, podemos considerar intuicionistamente un enunciado de generalidad "$(x)\,A\,(x)$" como una comunicación incompleta, que se completa presentando un método general efectivo para encontrar, respecto de cualquier $x$, la información que completa la comunicación "$A\,(x)$" para tal $x$.

De modo similar, se puede considerar una implicación "$A \rightarrow B$" como una

comunicación incompleta, que se completa presentando un método general efectivo para obtener la información que completa "*B*", siempre que sea dada la que completa "*A*".

La negación se puede reducir a la implicación (cfr. Ejemplo 3 § 74).

Ahora bien, los métodos generales efectivos son los recursivos siempre que sea un número natural lo que se haya de presentar. Además, con el recurso a la numeración de Gödel, se puede presentar información mediante un número.

Combinando estas ideas, definiremos una propiedad de fórmulas de teoría de números que equivaldrá al hecho de que dichas fórmulas sean verdaderas bajo la interpretación propuesta. Sin embargo, en lugar de decir 'verdadera', diremos 'realizable (recursivamente)', con el fin de distinguir la propiedad definida más adelante de la 'verdad' tal como ha sido definida mediante el uso de traducciones directas de los símbolos lógicos formales por términos informales correspondientes (final de § 81).

La interpretación de un término $t(x_1, ..., x_n)$ que contenga libres tan sólo a $x_1, ..., x_n$ mediante una función recursiva primitiva $t(x_1, ..., x_n)$, o cuando $n = 0$ mediante un número $t$, y la interpretación de una fórmula prima $P(x_1, ..., x_n)$ mediante un predicado recursivo primitivo $P(x_1, ..., x_n)$, o cuando $n = 0$, mediante una proposición $P$ (final de § 81), no difieren intuicionista y clásicamente. Nos basaremos en esto al establecer la definición de 'realizabilidad' que interpreta los operadores lógicos desde el punto de vista intuicionista como aplicados a fórmulas de teoría de números.

En primer lugar definimos las circunstancias bajo las que un número natural $e$ 'realiza (recursivamente)' (o es un 'número de realización' de) una fórmula clausurada E de teoría de números, por inducción sobre el número de (ocurrencias de) símbolos lógicos en E.

(A) 1. *e realiza* una fórmula prima clausurada P, si $e = 0$ y P es verdadera (en otras palabras, si $e = 0$ y $P$).

Para las Cláusulas 2–5, A y B son fórmulas clausuradas cualesquiera.

2. *e realiza* A & B, si $e = 2^a \cdot 3^b$ donde *a realiza* A y *b realiza* B.

3. *e realiza* A ∨ B, si $e = 2^0 \cdot 3^a$ donde *a realiza* A, o $e = 2^1 \cdot 3^b$ donde *b realiza* B.

4. *e realiza* A ⊃ B, si *e* es el número de Gödel de una función recursiva parcial $\varphi$ de una variable tal que, siempre que *a realiza* A, $\varphi(a)$ *realiza* B.

5. *e realiza* ¬ A, si *e realiza* A ⊃ 1 = 0.

Para las cláusulas 6 y 7, $x$ es una variable, y A (x) una fórmula que contiene libre sólo a x.

6. *e realiza* ∃xA(x), si $e = 2^x \cdot 3^a$ donde *a realiza* A(**x**).

7. *e realiza* ∀xA(x), si *e* es el número de Gödel de una función recursiva general $\varphi$ de una variable tal que, para cualquier $x$, $\varphi(x)$ *realiza* A(**x**).

Definimos ahora 'realizabilidad (recursiva)' para toda fórmula de teoría de números, así:

(B) Una fórmula A que no contenga variable alguna libre es *realizable*, si existe un número $p$ que realiza A. Una fórmula $A(y_1, ..., y_m)$ que contenga libres tan sólo las distintas variables $y_1, ..., y_m$ $(m \geq 0)$ es *realizable*, si existe una función recursiva general $\varphi$ de $m$ variables (denominada *función de realización* para $A(y_1, ..., y_m)$) tal que, para cada $y_1, ..., y_m$, $\varphi(y_1, ..., y_m)$ realiza $A(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$. (Haciendo uso de § 44, si una fórmula dada es realizable para una elección de las $y_1, ..., y_m$, lo es para cualquier otra).

El manejo que de las variables libres se hace en la presente definición de realizabilidad difiere del que se hace en Kleene 1945. Simplifica la demostración del primer teorema (Teorema 62), del que se seguirá la equivalencia de las dos definiciones (por el Corolario 1).

La definición de realizabilidad que precede hace referencia tan sólo a nuestra noción de fórmula de teoría de números, es decir, a las reglas de formación de nuestro sistema formal.

Mediante la siguiente alteración de tres cláusulas, se obtiene una noción modificada de realizabilidad, que hace referencia a la lista de postulados del sistema y, si se desea, a las fórmulas supuestas $\Gamma$. Cláusula 3: reemplácese "*a realiza* A" por "*a realiza* A y $\Gamma \vdash$ A", y "*b realiza* B" por "*b realiza* B y $\Gamma \vdash$ B". Cláusula 4: reemplácese "*a realiza* A" por "*a realiza* A y $\Gamma \vdash$ A". Cláusula 6: reemplácese "*a realiza* $A(\boldsymbol{x})$" por "*a realiza* $A(\boldsymbol{x})$ y $\Gamma \vdash A(\boldsymbol{x})$". Por 'realiza' ['realizable'] en este sentido modificado decimos $(\Gamma \vdash)$-*realiza* [$(\Gamma \vdash)$-*realizable*].

TEOREMA $62^N$. (a) *Si* $\Gamma \vdash$ E *en el sistema formal de teoría de números intuicionista, y las fórmulas* $\Gamma$ *son realizables, entonces* E *es realizable.* (David Nelson 1947 Parte I).

(b) *Similarmente si se lee* "$(\Gamma \vdash)$-*realizable*)" *en lugar de* "*realizable*".

LEMA $44^N$. *Si* x *es una variable,* A (x) *es una fórmula que no contiene variable libre alguna distinta a* x, *y* t *es un término sin variables que, en consecuencia expresa un número* t, *entonces e realiza* A (t) *si, y sólo si, e realiza* $A(\boldsymbol{t})$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 44. Si A (x) es prima, entonces el que A (t) sea verdadera es equivalente a que $A(\boldsymbol{t})$ sea verdadera. Por lo tanto, en virtud de la Cláusula 1, el lema es válido para una fórmula prima A (x). El lema para cualquier otra A (x) se sigue de esta base por inducción sobre el número de símbolos lógicos ocurrentes en A (x), subdividiéndose en casos en correspondencia con las restantes cláusulas de la definición de 'realiza'.

LEMA $45^N$. *Si* E *es una fórmula clausurada, entonces e realiza* E *si, y sólo si, e realiza el resultado de reemplazar cada parte de* E *que tenga la forma* $\neg$ A *en la que* A *es una fórmula por* $A \supset 1 = 0$.

Los Lemas 44 y 45 siguen siendo válidos si se lee "$\Gamma \vdash$" o "*e* $(\Gamma \vdash)$-*realiza*" en lugar de "*e realiza*", cuando $\vdash$ hace referencia al sistema intuicionista de teoría de números, y $\Gamma$ son fórmulas cualesquiera. (Para el Lema 44 usamos, pues, A § 41 junto con el Teorema 24 (b) § 38).

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 62. Establecemos la demostración para (a), y (opcionalmente) el lector, si dedica un poco de atención extra, puede verificar

que se cumplen las restantes condiciones para (b). La demostración procede por inducción sobre la longitud de la deducción $\Gamma \vdash E$ dada, subdividiéndose en casos de acuerdo con los postulados de nuestro sistema formal.

Consideremos en primer lugar los AXIOMAS. Si $A(y_1, ..., y_m)$ es un axioma que contiene como únicas variables libres $y_1, ..., y_m$, entonces en virtud de (B) para establecer su realizabilidad hemos de presentar una función recursiva general $\varphi(y_1, ..., y_m)$ tal que, para cada $m$-tuplo de números naturales $y_1, ..., y_m$, el número $\varphi(y_1, ..., y_m)$ realiza $A(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$. Ahora bien, para cada uno de los esquemas axiomáticos del cálculo proposicional podremos encontrar un número que realiza $A(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$ para todos los axiomas $A(y_1, ..., y_m)$ conformes al esquema. Será suficiente presentar este número (que realiza los axiomas clausurados conformes con el esquema), ya que si se hallan presentes variables libres $y_1, ..., y_m$, podemos tomar como $(y_1, ..., y_m)$ la función constante de $m$ variables que tiene como valor dicho número (§ 44). Similarmente para los axiomas particulares de teoría de números, simplemente presentaremos un número que realiza el resultado de toda sustitución de las variables libres del axioma por numerales. Similarmente para el Esquema axiomático 13, podemos presentar un número de realización, como función recursiva general de $x$, que depende sólo del numeral $\boldsymbol{x}$ introducido en sustitución de x; y para cada uno de los Esquemas axiomáticos 10 y 11 se puede presentar otro, como función recursiva general de $x_1, ..., x_n$, que depende sólo del t y de los numerales $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$ introducidos en sustitución de sus variables $x_1, ..., x_n$. Entonces si las $y_1, ..., y_m$ incluyen otras variables, la $\varphi(y_1, ..., y_m)$ puede obtenerse mediante extensión de esta función a una función de las variables adicionales requeridas haciendo uso de las funciones de identidad (§ 44).

Para cada uno de los Esquemas axiomáticos y axiomas particulares (§§ 19, 23) expresaremos nuestro número o función de realización haciendo uso de las notaciones de §65. La demostración de que es un número o función de realización y las necesarias verificaciones de recursividad, se dejan al lector en los casos que no se discuten en detalle.

1a. De acuerdo con las observaciones preliminares, consideremos un axioma $A \supset (B \supset A)$ por no contener este esquema variable libre alguna. Mostramos que $\Lambda a \Lambda b\, a$, es decir, $\Lambda a \Lambda b\, U_1^2(a, b)$ (§ 44), realiza $A \supset (B \supset A)$. Porque supongamos que $a$ realiza A; en virtud de la Cláusula 4, debemos mostrar que $\{\Lambda a \Lambda b\, a\}(a)$, es decir, $\Lambda b\, a$ (por (71) § 65), realiza $B \supset A$. Para mostrar esto, supongamos que $b$ realiza B; debemos mostrar que $\{\Lambda b\, a\}(b)$, esto es, $a$, realiza A. Ahora bien $a$ realiza A, por hipótesis.

1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$ es realizado por $\Lambda p \Lambda q \Lambda a \{q(a)\}(p(a))$. Porque supongamos que $p$ realiza $A \supset B$; debemos mostrar que $\{\Lambda p \Lambda q \Lambda a \{q(a)\}(p(a))\}(p)$, es decir, $\Lambda q \Lambda a \{q(a)\}(p(a))$, realiza $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)$. Para mostrar esto supongamos que $q$ realiza $A \supset (B \supset C)$; debemos mostrar que $\Lambda a \{q(a)\}(p(a))$ realiza $A \supset C$. Para mostrarlo supongamos que $a$ realiza A; debemos mostrar que $\{q(a)\}(p(a))$ realiza C. Ahora bien, por hipótesis $p$ realiza $A \supset B$ y $a$ realiza A; por lo tanto $p(a)$ realiza B. Además $q$ realiza $A \supset (B \supset C)$, y $a$ realiza A; en consecuencia $q(a)$ realiza $B \supset C$. Y ahora $q(a)$ realiza $B \supset C$, y $p(a)$ realiza B; en consecuencia $\{q(a)\}(p(a))$ realiza C, que es lo que se debía mostrar.

3. $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$. $\quad \Lambda a \Lambda b\, 2^a \cdot 2^b$.

4a. $A \& B \supset A$. $\Lambda c\,(c)_0$ (cfr. # 19 § 45). 4b. $A \& B \supset B$. $\Lambda c\,(c)_1$.

5a. $A \supset A \vee B$. $\Lambda a\, 2^0 \cdot 3^a$. 5b. $B \supset A \vee B$. $\Lambda b\, 2^1 \cdot 3^b$.

6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

$\Lambda p\, \Lambda q\, \Lambda r\, \overline{sg}((r)_0) \cdot p\,((r)_1) + (r)_0 \cdot q\,((r)_1)$ (cfr. # 9 § 44). En pocas palabras, debemos mostrar que si $p$ realiza $A \supset C$, y $q$ realiza $B \supset C$, y $r$ realiza $A \vee B$, entonces $\overline{sg}\,((r)_0) \cdot p\,((r)_1) + (r)_0 \cdot q\,((r_1)$ realiza C. CASO 1: $r = 2^0 \cdot 3^a$ y $a$ realiza A. Entonces $(r)_0 = 0$ y $(r)_1 = a$. Puesto que $p$ realiza $A \supset C$ y $(r)_1$ realiza A, $p\,((r)_1)$ realiza C. Pero $(r)_0 = 0$; por lo tanto $\overline{sg}\,((r)_0) = 1$. Así $\overline{sg}\,((r)_0) \cdot p\,((r)_1 + (r)_0 \cdot q((r)_1) = p\,((r)_1)$, y en consecuencia realiza C, que es lo que se debía mostrar. CASO 2: $r = 2^1 \cdot 3^b$ y $b$ realiza B. De modo similar.

7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$. Haciendo uso del Lema 45, el número que realiza los axiomas cerrados conformes al Esquema axiomático 1b (en particular aquéllos en que C es $1 = 0$) realiza los conformes a este esquema.

$8^I$. $\neg A \supset (A \supset B)$. 0. Porque si $p$ realiza $\neg A$, entonces, en virtud de la Cláusula 5, $p$ realiza $A \supset 1 = 0$. Pero entonces ningún número $a$ podría realizar A, ya que $p\,(a)$ realizaría la fórmula prima cerrada $1 = 0$ que es falsa, en contradicción con la Cláusula 1. Así de modo vacuo, si $p$ realiza $\neg A$ y $a$ realiza A, entonces $\{0\,(p)\}\,(a)$ realiza B.

(Puede el lector encontrar instructivo verificar que no existe modo aparente alguno de tratar el Esquema axiomático 8 clásico).

10. Contenga el t del axioma exactamente las distintas variables $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geq 0$); denotémoslo por "$t\,(x_1, \ldots, x_n)$", y sea $t\,(x_1, \ldots, x_n)$ la función recursiva primitiva (o, para $n = 0$, el número) que expresa. Teniendo en cuenta las observaciones preliminares, suponemos ahora que el axioma contiene libres sólo a $x_1, \ldots, x_n$; escribámoslo así: $\forall x A\,(x, x_1, \ldots, x_n) \supset A\,(t\,(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$. Puesto que $t\,(x_1, \ldots, x_n)$ es libre respecto de x en $A\,(x, x_1, \ldots, x_n)$, el resultado de la sustitución por numerales $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ de (las ocurrencias libres de) $x_1, \ldots, x_n$ en el axioma es $\forall x A\,(x, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \supset A\,(t\,(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n), \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$. Mostraremos que el número $\Lambda p\, p\,(t\,(x_1, \ldots, x_n)$, el cual, puesto que $x_1, \ldots, x_n$ varía, es una función recursiva general (de hecho, primitiva) de $x_1, \ldots, x_n$, realiza dicha fórmula. En virtud de la Cláusula 4, a este fin hemos de mostrar que, si $p$ realiza $\forall x A(x, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$, entonces $p\,(t\,(x_1, \ldots, x_n))$ realiza $A\,(t\,(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n), \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$. Pero, si $p$ realiza $\forall x A\,(x, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$, entonces, en virtud de la Cláusula 7, $p\,(t\,(x_1, \ldots, x_n))$ realiza $A\,(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ donde $t = t\,(x_1, \ldots, x_n)$; y en consecuencia, en virtud del Lema 44, $p\,(t\,(x_1, \ldots, x_n))$ realiza también $A\,(t\,(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n), \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$, que es lo que se debía mostrar.

11. $A\,(t\,(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) \supset \exists x A\,(x, x_1, \ldots, x_n)$.
$\Lambda a\, 2^{t(x_1, \ldots, x_n)} \cdot 3^a$.

13. $A\,(0) \;\&\; \forall x\,(A\,(x) \supset A\,(x')) \supset A\,(x)$. Trataremos el caso en que A(x) contiene libre sólo a x, ya que las observaciones preliminares se ocuparán del caso general. Defínase una función recursiva parcial $\rho\,(x, a)$ mediante una recursión primitiva del siguiente modo:

$$\begin{cases} \rho(0,a) = (a)_0, \\ \rho(x',a) = \{\{(a)_1\}(x)\}(\rho(x,a)). \end{cases}$$

Mostramos ahora que para todo $x$ el número $\Lambda a\,\rho(x, a)$, que es una función recursiva primitiva de $x$, realiza $A(0)\ \&\ \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset A(\boldsymbol{x})$. Para ello (Cláusula 4), demostramos por inducción sobre $x$ que, si $a$ realiza $A(0)\ \&\ \forall x(A(x) \supset A(x'))$, entonces $\rho(x, a)$ realiza $A(\boldsymbol{x})$. BASE. Si $a$ realiza $A(0)\ \&\ \forall x(A(x) \supset A(x'))$, entonces, en virtud de la Cláusula 2, $\rho(0, a)$ $[= (a)_0]$ realiza $A(0)$. PASO DE INDUCCION. Similarmente $(a)_1$ realiza $\forall x(A(x) \supset A(x'))$, y en consecuencia (Cláusula 7) $\{(a)_1\}(x)$ realiza $A(\boldsymbol{x}) \supset A(\boldsymbol{x}')$. Pero por la hipótesis de inducción, $\rho(x, a)$ realiza $A(\boldsymbol{x})$. En consecuencia (Cláusula 4), $\rho(x', a)$ $[=\{\{(a)_1\}(x)\}(\rho(x, a))]$ realiza $A(\boldsymbol{x}')$.

14. Tras sustitución por numerales, obtenemos a partir de este axioma $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}' \supset \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Fórmula que es realizada por $\Lambda p\,0$. Porque supongamos que $p$ realiza $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'$. Debemos mostrar que entonces 0 realiza $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Puesto que $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'$ es prima, es realizable sólo si es verdadera, es decir, si $a' = b'$. Por lo tanto $a = b$, en consecuencia, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ es también verdadera y 0 la realiza.

De modo similar tenemos, para los restantes axiomas particulares y tras la sustitución por numerales, los números de realización que siguen.

15, 18–21: 0. 16: $\Lambda p\,\Lambda q\,0$. 17: $\Lambda p\,0$.

REGLAS DE INFERENCIA. 2. Aprovechamos las observaciones que acompañan a la definición de realizabilidad para considerar las fórmulas como dependientes cada una de todas las variables que ocurren libres en cualquiera de ellas. En este sentido escribimos la regla

$$\frac{A(y_1, \ldots, y_m) \qquad A(y_1, \ldots, y_m) \supset B(y_1, \ldots, y_m)}{B(y_1, \ldots, y_m).}$$

Por la hipótesis de inducción, las premisas $A(y_1, \ldots, y_m)$ y $A(y_1, \ldots, y_m) \supset B(y_1, \ldots, y_m)$ son realizables, es decir, existen funciones recursivas generales $\alpha$ y $\psi$ tales que, para cada $m$-tuplo de números naturales $y_1, \ldots, y_m$, $A(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ es realizada por el número $\alpha(y_1, \ldots, y_m)$ y $A(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) \supset B(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ por el número $\psi(y_1, \ldots, y_m)$. Por lo tanto el número $\{\psi(y_1, \ldots, y_m)\}(\alpha(y_1, \ldots, y_m))$ realiza $B(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Además, $\{\psi(y_1, \ldots, y_m)\}(\alpha(y_1, \ldots, y_m))$ es obviamente una función recursiva parcial de $y_1, \ldots, y_m$. Pero su valor es un número de realización de todo $y_1, \ldots, y_m$, y por lo tanto debe ser definida para todo $y_1, \ldots, y_m$; por ello es recursiva general. En consecuencia la conclusión $B(y_1, \ldots, y_m)$ es realizable.

9. $$\frac{C(y_1, \ldots, y_m) \supset A(x, y_1, \ldots, y_m)}{C(y_1, \ldots, y_m) \supset \forall x A(x, y_1, \ldots, y_m).}$$

Por la hipótesis de inducción y por la definición de realizabilidad, existe una función recursiva general $\psi$ tal que, para cada $x, y_1, \ldots, y_m$, $\psi(x, y_1, \ldots, y_m)$ realiza $C(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) \supset A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Demostraremos que, para cada $y_1, \ldots, y_m$, $\Lambda c\,\Lambda x\{\psi(x, y_1, \ldots, y_m)\}(c)$ realiza $C(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) \supset \forall x A(x, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Ello

dará la realizabilidad de la conclusión, ya que $\Lambda c \Lambda x \{\psi(x, y_1, ..., y_m)\}(c)$ es una función primitiva general, a fortiori recursiva general, de $y_1, ..., y_m$. Consecuentemente, supongamos que $c$ realiza $C(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$; debemos mostrar que $\Lambda x \{\psi(x, y_1, ..., y_m)\}(c)$ realiza $\forall x A(x, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$. Para ello debemos mostrar que, para todo $x$, $\{\psi(x, y_1, ..., y_m)\}(c)$ realiza $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$. Pero, puesto que $c$ realiza $C(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$, y, por hipótesis de inducción, $\psi(x, y_1, ..., y_m)$ realiza $C(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m) \supset A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$, $\{\psi(x, y_1, ..., y_m)\}(c)$ ha de realizar $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$. (Nótese cómo este procedimiento fracasaría si C contuviese a x libre; llamémosle "$C(x, y_1, ..., y_m)$". Deberíamos entonces suponer que $c$ realiza $C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$ para algún $x$, y podríamos concluir solamente que $\{\psi(x, y_1, ..., y_m)\}(c)$ realiza $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_m)$ para dicho $x$, mientras que necesitaríamos concluirlo para todo $x$).

12. $$\frac{A(x, y_1, ..., y_m) \supset C(y_1, ..., y_m)}{\exists x A(x, y_1, ..., y_m) \supset C(y_1, ..., y_m).}$$

De modo similar, haciendo uso de $\Lambda p \{\psi((p)_0, y_1, ..., y_m)\}((p)_1)$ como función de realización de la conclusión, dado que $\psi$ lo es de la premisa.

El teorema incluye la consistencia simple del sistema formal intuicionista de teoría de números (mediante uso de (a) con $\Gamma$ vacío y $1 = 0$ como E), como lo hace el Teorema 61 (a). El interés adicional del Teorema 62 a este respecto deriva de la diferente condición impuesta a nuevos axiomas $\Gamma$ bajo los que se muestra que se transmite la consistencia simple (tal como discutiremos más adelante, a continuación del Teorema 63).

COROLARIO $1^N$. *Si* $y_1, ..., y_m$ *son variables distintas, y si* $A(y_1, ..., y_m)$ *es una fórmula, entonces* $A(y_1, ..., y_m)$ *es realizable si, y sólo si,* $\forall y_1 ... \forall y_m A(y_1 ... y_m)$ *es realizable.*

Porque $A(y_1, ..., y_m)$ y $\forall y_1 ... \forall y_m A(y_1, ..., y_m)$ son interdeducibles en el sistema formal intuicionista.

Este corolario (aplicado al caso en que $y_1, ..., y_m$ son las variables libres de la fórmula dada en el orden de la primera ocurrencia libre) proporciona la equivalencia de la presente versión de la definición de realizabilidad (Kleene 1948) y la de Kleene 1945.

COROLARIO $2^N$. (a) *Si* $\Gamma$ *son fórmulas realizables,* $A(x_1, ..., x_n, y)$ *es una fórmula que contiene libres solamente las distintas variables* $x_1, ..., x_n, y$, *y* $\Gamma \vdash \exists y A(x_1, ..., x_n, y)$ *en el sistema formal intuicionista de teoría de números, entonces existe una función recursiva general* $y = \varphi(x_1, ..., x_n)$ *tal que, para cada* $x_1, ..., x_n$, $A(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ *(donde* $y = \varphi(x_1, ..., x_n)$*) es realizable.*

(b) *Similarmente si se lee, en lugar de "realizable", cualquiera de las siguientes combinaciones de propiedades*: (i) "$(\Gamma \vdash)$*-realizable y deducible a partir de* $\Gamma$", (ii) "$(\Gamma \vdash)$*-realizable, deducible a partir de* $\Gamma$*, y verdadera*", (iii) "$(\Gamma \vdash)$*-realizable, deducible a partir de* $\Gamma$*, y realizable*", (iv) "$(\Gamma \vdash)$*-realizable, deducible a partir de* $\Gamma$*, verdadera y realizable*".

DEMOSTRACIONES. (a) En virtud de (a) del teorema junto con (B) y (A) 6 de las definiciones. (b) (i) Haciendo uso en su lugar de (b) del teorema. (ii) Haciendo uso, además, del Teorema 61 (a) para inferir que $A(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$

es verdadera. (iii) Haciendo uso, además de (a) del teorema para inferir que $A(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ es realizable.

Con la realizabilidad se intenta una interpretación intuicionista de las fórmulas; y decir al modo intuicionista que $A(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ es realizable debería implicar el que fuese verdadera intuicionistamente, esto es, que la proposición $A(x_1, ..., x_n, y)$ que constituye su significado intuicionista es válida. La fórmula $\exists y A(x_1, ..., x_n, y)$ afirma la existencia, para cada $x_1, ..., x_n$, de un $y$ dependiente de $x_1, ..., x_n$, tal que $A(x_1, ..., x_n, y)$; o, en otras palabras, la existencia de una función $y = \varphi(x_1, ..., x_n)$ tal que, para cada $x_1, ..., x_n$, $A(x_1, ..., x_n, \varphi(x_1, ..., x_n))$. En virtud de (a) del corolario para $\Gamma$ vacío, esta fórmula puede ser demostrada en el sistema formal intuicionista sólo si existe una $\varphi$ tal que sea recursiva general. En pocas palabras, desde el punto de vista intuicionista, sólo se puede demostrar que existen funciones de teoría de números que sean recursivas generales. (Estamos considerando aquí la aserción de la existencia de un valor de función $\varphi(x_1, ..., x_n)$ para todos los $n$-tuplos $x_1, ..., x_n$ de argumentos, de modo que esto no está en conflicto con nuestro uso intuicionista de funciones recursivas parciales).

Este resultado, por ser inferido de (a), depende de la aceptación de la tesis de que la realizabilidad de $A(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ implica su verdad. Sin embargo, si se hace uso de (b) para $\Gamma$ vacío (en cuyo caso, puesto que no tenemos hipótesis alguna que satisfacer sobre $\Gamma$, podemos tomar en la conclusión la forma más fuerte (iv), es decir que $A(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ es $(\Gamma \vdash)$-realizable, demostrable, verdadera y realizable), obtenemos el mismo resultado independientemente de dicha tesis.

La presencia de $\Gamma$ en el corolario muestra que el resultado seguirá siendo válido después de incrementar el sistema formal mediante axiomas adecuados $\Gamma$. Si se acepta la tesis de que, intuicionistamente, realizabilidad implica verdad, estos axiomas sólo necesitan ser realizables. En otro caso deberían ser $(\Gamma \vdash)$-realizables y verdaderos (la deducibilidad a partir de $\Gamma$ vale automáticamente en el caso de la hipótesis sobre $\Gamma$).

Este resultado proporciona una conexión entre la lógica de Brouwer tal como ha sido formalizada por Heyting y la tesis de Church (§ 62) de que sólo las funciones recursivas generales son efectivamente calculables. Ambos desarrollos nacieron de un punto de partida constructivista, pero previamente no se habían puesto en relación sus detalles.

La fórmula $\exists y A(x_1, ..., x_n, y)$ no afirma la unicidad de la función $y = \varphi(x_1, ..., x_n)$ tal que $A(x_1, ..., x_n, \varphi(x_1, ..., x_n))$; para ello necesitamos $\exists! y A(x_1, ..., x_n, y)$ (§ 41).

Clásicamente, dada la existencia de alguna función $\varphi$ tal que, para todo $x_1, ..., x_n$, $A(x_1, ..., x_n, \varphi(x_1, ..., x_n))$, el principio de mínimo número proporciona formalmente un método de describir una particular (*149 §40, *174b § 41). Pese a que, desde el punto de vista intuicionista, no contamos con el principio de mínimo número, sabemos por el Corolario 2 que, siempre que se dé una demostración intuicionista concreta de una fórmula de la forma $\exists y A(x_1, ..., x_n, y)$, podemos, sobre la base de dicha demostración, describir de modo informal una función recursiva general concreta $\varphi(x_1, ..., x_n)$ tal que, para todo $x_1, ..., x_n$, $A(x_1, ..., x_n, \varphi(x_1, ..., x_n))$.

EJEMPLO 1. (Cfr. Ejemplo 8 (c) § 74). Sea $S_1$ el sistema intuicionista de teoría de números. Sea $A(x, y)$ una fórmula que contenga libres sólo a x e y.

Supongamos que, para cada $x$, la fórmula $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es verdadera para exactamente un $y$. Entonces cuando (para obtener $S_2$) introducimos f mediante el axioma A(x, f(x)), el axioma caracteriza a f como expresión de una determinada función $\varphi$ bajo la interpretación. A partir del nuevo axioma y mediante introducción de $\exists$, $\vdash_2 \exists y A(x, y)$. Supongamos ahora que la f introducida mediante el axioma A(x, f(x)) es eliminable. Entonces $\vdash_1 \exists y A(x, y)$. En consecuencia, por el Teorema 62 Corolario 2 (b) (ii) con $\Gamma$ vacía, existe una función recursiva general $y = \varphi_1(x)$ tal que, para cada $x$, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es verdadera. Pero entonces $\varphi_1 = \varphi$. En consecuencia *en el sistema intuicionista de teoría de números, un nuevo símbolo* f *de función (que representa una función* $\varphi$*) introducido mediante un axioma de la forma* A(x, f(x)), *donde* A(x, y) *contiene libres sólo a* x *e* y, *y* $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *es verdadera justamente cuando* $y = y = \varphi(x)$, *es eliminable sólo si* $\varphi$ *es recursiva general.*

EJEMPLO 2. Sea A(x, y) una fórmula cualquiera que contenga libres sólo a x e y, tal que $\vdash_1 \exists y A(x, y)$. Entonces, como en el Ejemplo 1, existe una función recursiva general $y = \varphi_1(x)$ tal que, para todo $x$, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es verdadera. Su demostración (que consiste principalmente en la demostración del Teorema 62 (b)) es constructiva; dada una demostración de $\exists y A(x, y)$ (o el número de Gödel de dicha demostración), podemos hallar un sistema E de ecuaciones que defina recursivamente un $\varphi_1$ (o un número de Gödel de $\varphi_1$). También es efectivamente decidible el si un número $a$ es el número de Gödel de una demostración de una fórmula que tenga la forma $\exists y A(x, y)$ donde A contiene libres sólo a x e y (Caso 1), o no (Caso 2). Sea

$$\theta(a) = \begin{cases} \text{un número de Gödel de } \varphi_1, \text{ en el Caso 1,} \\ \Lambda x\, x \text{ (es decir, un número de Gödel de } U_1^1\text{), en el Caso 2,} \end{cases}$$

donde se elimina, mediante convenciones adecuadas, la ambigüedad respecto de cuál sea el número de Gödel y de qué $\varphi_1$ (o cuál sea el número de Gödel de $U_1^1$) elegido. Entonces $\theta(a)$ es efectivamente calculable. En consecuencia, por la tesis de Church podemos esperar que $\theta(a)$ sea recursiva general. (De hecho, es fácil demostrar que $\theta(a)$ es recursiva primitiva después de haber establecido: (1) *Existe una función recursiva primitiva* $\xi(a)$ *tal que, si* $a$ *es el número de Gödel de una demostración en el sistema intuicionista de teoría de números, entonces* $\xi(a)$ *es un número de Gödel de una función de* $(\vdash)$*-realización* $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ *para la fórmula final* $A(y_1, \ldots, y_m)$, *donde* $y_1, \ldots, y_m$ *son las variables libres de la fórmula final en el orden de ocurrencia en nuestra lista de variables*). Sea $\varphi(x) = \{\theta(x)\}(x) + 1$. Entonces $\varphi(x)$ es recursiva general. Sea ahora A(x, y) una fórmula tal que $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es verdadera justamente cuando $y = \varphi(x)$ (e. g., una que represente numeralmente a $\varphi$, cfr. Teorema 32 (a) § 59). Si ahora tomamos esta fórmula como la A(x, y) del Ejemplo 1, caemos en una contradicción al suponer que la f con el Axioma A(x, f(x)) es eliminable. En consecuencia: (2) *Existe una función recursiva general* $\varphi$ *tal que, en el sistema intuicionista de teoría de números, un nuevo símbolo de función* f *que expresa* $\varphi$ *mediante un axioma de la forma* A(x, f(x)), *donde* A(x, y) *contiene libres sólo a* x *e* y, *y* $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *es verdadera justamente cuando* $y = \varphi(x)$, *no es eliminable* (*y* $\exists y A(x, y)$ *no es demostrable para ninguna de tales* A(x, y)).

TEOREMA $63^N$. *Para fórmulas* A (x), B (x) *y* C (x, y) *adecuadamente elegidas, las siguientes fórmulas, demostrables desde el punto de vista clásico, son irrealizables y, en consecuencia* (en virtud del Teorema 62 (a)), *indemostrables en el sistema intuicionista de teoría de números. (Concretamente, sea que* A (x, z) *exprese numeralmente el predicado* $T_1(x, x, z)$ de § 57, haciendo uso del Corolario del Teorema 27 § 49. A (x) *sea* $\exists z A(x, z)$; B (x) *sea* $A(x) \vee \neg A(x)$; *y* C (x, y) *sea* $y=1 \vee (A(x) \& y=0)$).

(i) $\quad A(x) \vee \neg A(x).$

(ii) $\quad \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ (la clausura de (i)).

(iii) $\quad \neg\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ (la doble negación de (ii)).

(iv) $\quad \forall x \neg\neg B(x) \supset \neg\neg \forall x B(x).$

(v) $\quad \neg\neg \{\forall x \neg\neg B(x) \supset \neg\neg \forall x B(x)\}$ (la doble negación de (iv)).

(vi) $\quad \exists y C(x, y) \supset \exists y [C(x, y) \& \forall z (z < y \supset \neg C(x, z))]$ (cfr. *149 § 40).

(vii) $\quad \exists y [y < w \& C(x, y) \& \forall z (z < y \supset \neg C(x, y))] \vee \forall y [y < w \supset \neg C(x, y)]$ (cfr. *148).

*También la clausura, y la doble negación de la clausura, de* (vi) *y de* (vii). ((i)–(v): Kleene 1945 y Nelson 1947).

LEMA $46^N$. (a) *Si* A *es realizable, y* B *es irrealizable, entonces* $A \supset B$ *es irrealizable.* Por tanto: *Si* A *es realizable, entonces* $\neg A$ *es irrealizable.* (b) *Si* A *es clausurada e irrealizable, entonces* $A \supset B$ *y* (en consecuencia) $\neg A$ *son irrealizables, y* (en virtud de (a)) $\neg\neg A$ *es irrealizable.*

DEMOSTRACION DEL LEMA 46. (a) En virtud del Teorema 62 (a) o del caso de su demostración relativo a la Regla 2, si A y $A \supset B$ son realizables, también lo es B. (b) Para una B clausurada, cualquier número, por ejemplo 0, realiza $A \supset B$, puesto que de modo vacuo, siempre que *a* realiza A (es decir, nunca), 0 (*a*) realiza B.

LEMA $47^N$. *Si* $P(x_1, ..., x_n)$ *expresa numeralmente un predicado recursivo general* $P(x_1, ..., x_n)$ *en el sistema formal intuicionista de teoría de números, entonces, para todo* $x_1, ..., x_n$, $P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ *es realizable si, y sólo si,* $P(x_1, ..., x_n)$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 47. Si $P(x_1, ..., x_n)$, entonces, en virtud de § 41(i), $\vdash P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$, y, en consecuencia, en virtud del Teorema 62 (a), $P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ es realizable. Inversamente, supongamos que $P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ es realizable. Puesto que $P(x_1, ..., x_n)$ es un predicado recursivo general, tenemos (de modo constructivo) que, para los $x_1, ..., x_n$ dados, o $P(x_1, ..., x_n)$ o $\bar{P}(x_1, ..., x_n)$. En el último caso, sin embargo, por § 41 (ii), $\vdash \neg P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$, y, en consecuencia, en virtud del Teorema 62 (a), $\neg P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ es realizable, lo cual, por el Lema 46 (a), contradice nuestro supuesto de que $P(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ es realizable.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 63. (i) Supongamos que (i), es decir, $\exists z A(x, z) \vee \neg \exists z A(x, z)$ fuese realizable. Sea $\varphi(x)$ una de sus funciones de realización; y hágase $\rho(x) = (\varphi(x))_0$. En tal caso $\rho(x)$ es recursiva general, y toma sólo los valores 0 y 1 )en virtud de (B) y de (A) 3 de las definiciones. Consideremos toda $x$ fija. CASO 1: $\rho(x) = 0$. Entonces $(\varphi(x))_1$ realiza $\exists z A(\mathbf{x}, z)$; y, en conse-

cuencia, $(\varphi(x))_{1,1}$ realiza $A(\mathbf{x}, z)$ donde $z = (\varphi(x))_{1,0}$, en cuyo caso, en virtud del Lema 47, $T_1(x, x, z)$. Por lo tanto $(Ez)\,T_1(x, x, z)$. CASO 2: $\rho(x) = 1$. Entonces $(\varphi(x))_1$ realiza $\neg \exists z A(\mathbf{x}, z)$, es decir, $(\varphi(x))_1$ realiza $\exists z A(\mathbf{x}, z) \supset 1 = 0$. Mostraremos que entonces $(\overline{Ez})\,T_1(x, x, z)$. Pues si existiera un $z$ tal que $T_1(x, x, z)$, en virtud del Lema 47 $A(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ sería realizable; digamos que $k$ la realiza. Entonces $2^z \cdot 3^k$ realizaría $\exists z A(\mathbf{x}, z)$; y $\{(\varphi(x))_1\}(2^z \cdot 3^k)$ realizaría $1 = 0$, lo cual es imposible. Ambos casos muestran que la función recursiva general $\rho(x)$ es la función que representa a $(Ez)\,T_1(x, x, z)$. Pero $(Ez)\,T_1(x, x, z)$ no es recursiva ((15) Teorema V § 57); en consecuencia, no puede existir ninguna $\rho(x)$ recursiva general tal. Por reductio ad absurdum, (i) es por lo tanto irrealizable.

(ii), (iii). Por $\forall$-elim., (i) es deducible desde el punto de vista intuicionista a partir de (ii), por lo que, en virtud del Teorema 62 (a) también (ii) es irrealizable; y, en virtud del Lema 46 (b), también lo es (iii), ya que (ii) es clausurada.

(iv). Porque (iii) puede deducirse de (iv), haciendo uso de *51a § 27 y $\forall$-introd.

(vi). Mostramos como sigue que (i) es deducible a partir de (vi). De $1 = 1$ (lo cual es demostrable) $\exists y C(x, y)$, por $\vee$- y $\exists$-introd. Teniendo esto en cuenta, de (vi) y mediante $\supset$-elim., $\exists y [C(x, y) \,\&\, \forall z (z < y \supset \neg C(x, z))]$. Con vistas a &- y $\exists$-elim., supóngase $C(x, y)$, esto es,

(1) $$y = 1 \vee (A(x) \,\&\, y = 0)$$

y $$\forall z (z < y \supset \neg C(x, z)), \text{ i., e.,}$$

(2) $$\forall z (z < y \supset \neg \{z = 1 \vee (A(x) \,\&\, z = 0)\}).$$

Nos valemos de una demostración por casos a partir de (1) para deducir (i) con la ayuda de (2). CASO 1: supongamos que $y = 1$. Supongamos además, para una reductio ad absurdum, $A(x)$. De esto y de $0 = 0$, &- y $\vee$-introd., $0 = 1 \vee (A(x) \,\&\, 0 = 0)$. Pero también de $y = 1$, en virtud de *135b, se sigue que $0 < y$; por ello a partir de (2), $\forall$-elim. (con 0 como t) y por $\supset$-elim. se sigue que $\neg \{0 = 1 \vee (A(x) \,\&\, 0 = 0)\}$. En consecuencia por reductio ad absurdum, $\neg A(x)$. Por $\vee$-introd., $A(x) \vee \neg A(x)$, que es (i) y que no contiene libre la variable $y$ de la $\exists$-elim. que propusimos. CASO 2: supongamos $A(x) \,\&\, y = 0$. Por &-elim. y $\vee$-introd., $A(x) \vee \neg A(x)$. Esta deducción está emparentada con el razonamiento intuitivo del Ejemplo 6 § 64).

(vii). De (vii) podemos deducir (vi) como en la demostración de *149 a partir de *148.

El Teorema 63 (i)–(v) implica que $\mathscr{A} \vee \neg \mathscr{A}$ es indemostrable en el cálculo proposicional intuicionista, y $\forall x (\mathscr{A}(x) \vee \neg \mathscr{A}(x))$, $\neg\neg \forall x (\mathscr{A}(x) \vee \neg \mathscr{A}(x))$, $\forall x \neg\neg \mathscr{A}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathscr{A}(x)$ y $\neg\neg \{\forall x \neg\neg \mathscr{A}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathscr{A}(x)\}$ en el cálculo intuicionista de predicados, como ya sabíamos por el Teorema 57 (b) y por el Teorema 58 (a) y (c). Las demostraciones presentes son menos elementales que las basadas en el teorema de la forma normal de Gentzen, pero aclaran el modo de trabajar de la lógica intuicionista como instrumento del razonamiento característico de la teoría de números. Pudimos mostrar que $A \vee \neg A$ es indemostrable en la teoría intuicionista de números sólo contando con la presencia de una variable libre x.

COROLARIO $(a(ii))^N$. *La fórmula* $\neg \forall x (A(x) \vee \neg A(x))$ *(pese a ser la negación de una fórmula demostrable clásicamente) es realizable.*

En virtud de (ii) y del Lema 46 (b).

La fórmula $\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$ es demostrable desde el punto de vista clásico, y por ende verdadera bajo interpretaciones clásicas. Pero es irrealizable. Por ello si se acepta la realizabilidad como condición necesaria de la verdad intuicionista, es falsa desde el punto de vista intuicionista, y por ello indemostrable no sólo en el presente sistema formal intuicionista, sino también bajo cualesquiera otros métodos intuicionistas.

Esto implica incidentalmente que nuestro sistema formal clásico reforzado por una demostración intuicionista de consistencia simple no puede valer como instrumento de demostración intuicionista, como se apuntó en § 14, más que para fórmulas que pertenecen a una clase muy limitada [que incluye las que tienen las formas $B(\boldsymbol{x})$ y $\forall x B(x)$, final de § 42, pero no la presente fórmula $\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$].

La negación $\neg \forall x (A(x) \vee \neg A(x))$ de dicha fórmula es falsa clásicamente, pero (según el corolario) realizable, y, en consecuencia, verdadera intuicionistamente, si aceptamos la realizabilidad (establecida de modo intuicionista) como suficiente para la verdad intuicionista.

Por ello surge la posibilidad de afirmar la fórmula $\neg \forall x (A(x) \vee \neg A(x))$ desde el punto de vista intuicionista. De este modo obtendríamos una extensión de la teoría intuicionista de números, que ha sido previamente tratada como subsistema de la clásica, tal que la teoría de números intuicionista y la clásica divergen siendo válida en la intuicionista $\neg \forall x (A(x) \vee \neg A(x))$ y en la clásica $\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$.

Tales divergencias son familiares a los matemáticos con el ejemplo de las geometrías euclidianas y no-euclidianas, y con otros ejemplos, pero constituyen un fenómeno nuevo en aritmética. El primer ejemplo resulta de la adición de $A_p(\boldsymbol{p})$ o de $\neg A_p(\boldsymbol{p})$ al formalismo de la teoría de números, cfr. final de § § 42 y 75.

No sólo la fórmula $\neg \forall x (A(x) \vee \neg A(x))$ misma es realizable, sino que, en virtud del Teorema 62 (a) (tomándola como $\Gamma$) si la añadimos al sistema formal intuicionista presente, en el sistema resultante de la extensión son demostrables sólo fórmulas que sean realizables. Así, pues, toda fórmula demostrable será verdadera bajo la interpretación de realizabilidad. En particular, se muestra por interpretación que el sistema intuicionista reforzado es, en consecuencia, simplemente consistente.

Una discusión más completa se presenta en Kleene 1945, donde las adiciones propuestas al sistema formal intuicionista no reforzado de teoría de números $S$, destinadas a la obtención de un sistema intuicionista reforzado $S'$ que difiera del clásico $S_c$, se hacen identificando verdad y realizabilidad.

Nelson 1947, Partes II–IV (así como Kleene 1945) consigue un refinamiento de los resultados que aquí basamos en la interpretación. Puesto que todos ellos comportan la consistencia del formalismo de teoría de números, no se puede esperar un tratamiento completamente elemental. Pero la no-elementalidad queda minimizada en los resultados basados en este último trabajo de Nelson hasta el punto de que los resultados se demuestran en metamatemática elemental bajo la hipótesis de la consistencia simple de $S$. En particular, en virtud de estos resultados, junto con los de Gödel 1932-3 (cfr. Corolario 2 Teorema 60), se demuestra metamatemáticamente que tanto $S'$ como $S_c$ son simplemente consistentes si $S$ lo es. (El $S$ que Nelson toma no es nuestro sistema formal intuicionista, sino uno obtenido, salvo una diferencia trivial en los postulados de igualdad, al añadir a nuestros símbolos de funciones algunos adicionales junto con sus ecuaciones de definición. Estas ecuaciones se ajustan a nuestros esquemas (I)–(IV) § 43 o a esquemas muy

similares, excepto en que también se admite un determinado esquema de recursión de curso-de-valores. Haciendo uso de (i)–(iv) de Nelson pág. 332, para cada aplicación de dicho esquema se puede demostrar sin la aplicación un par de ecuaciones que tienen la misma forma pero con f, g, h, $t_i$ reemplazados por f′, g′, h′, $t'_i$; en consecuencia el esquema de recursión de curso–de–valores es eliminable. Por lo tanto, por el Ejemplo 9 § 74 y las observaciones que le preceden, los símbolos adicionales de funciones son eliminables).

Nelson 1949 introduce una noción de 'P-realizabilidad' con cuyo uso se puede construir un sistema de teoría de números que diverge tanto del intuicionista reforzado como del clásico.

Gene Rose 1952 investiga la realizabilidad en relación con el cálculo proposicional intuicionista.

Kleene 1950a proyecta el uso de funciones recursivas con vistas a la interpretación de la teoría intuicionista de conjuntos.

EJEMPLO 3. (a) *Los operadores* $\supset$, $\neg$, &, $\vee$ *aplicados a fórmulas cerradas* A *y* B *se someten a las tablas fuertes de verdad de tres valores* (§ 64, reconstruidas con los símbolos presentes), *si* t, f, u *se leen como 'realizable', 'irrealizable', 'desconocido (o valor inmaterial)', respectivamente*; es decir, las tablas proporcionan información correcta sobre la realizabilidad o irrealizabilidad de A $\supset$ B, $\neg$ A, A & B, A $\vee$ B, sólo si parte de tal información respecto de A y B. DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\supset$. Si B es realizable, entonces, en virtud de *11 § 26 y el Teorema 62 (a), también lo es A $\supset$ B, en correspondencia con las tres de la Columna 1 de la tabla de $\supset$. Si A es irrealizable, entonces, por el Lema 46 (b), A $\supset$ B es realizable, en correspondencia con las tres t de la Línea 2. Si A es realizable y B irrealizable, entonces, por el Lema 46 (a), A $\supset$ B es irrealizable, en correspondencia con la f de la Línea 1 Columna 2. La tabla de $\neg$ es simplemente la columna f de la de $\supset$; y & y $\vee$ son fácilmente tratados. (b) *Una fórmula sin variables es realizable si, y sólo si, es verdadera.* Su realizabilidad (y verdad) o irrealizabilidad (y falsedad) es, pues, efectivamente decidible mediante el método de evaluación proporcionado por la interpretación usual de 0, ′, +, ·, = y las tablas de verdad de dos valores clásicos de $\supset$, $\neg$, &, $\vee$ (cfr. § 79 antes del Teorema 51). DEMOSTRACION. Haciendo uso del Ejemplo a § 81, o del siguiente modo: Para fórmulas primas cerradas, verdad y realizabilidad coinciden, y pueden decidirse. Al construir a partir de ellas fórmulas compuestas mediante las operaciones del cálculo proposicional, nos mantenemos siempre dentro de las dos primeras líneas y columnas de las tablas de tres valores. (c) Denominamos a un número *e número de evaluación*-R de una fórmula cerrada E, si o es el caso que $e = 2^0 \cdot 3^{e_1}$ (por lo tanto $e_1 = (e)_1$) y $e_1$ realiza E, o es el caso que $e = 2^1 \cdot 3^0$ y E es irrealizable. Para fórmulas abiertas, *función de evaluación*-R se define análogamente a 'función de realización'. *Una fórmula* $C(z_1, ..., z_m)$ *que no contenga cuantificador alguno y sólo las distintas variables* $z_1, ..., z_m$ $(m > 0)$ *tiene una función de evaluación*-R *recursiva primitiva* $\gamma(z_1, ..., z_m)$. DEMOSTRACION. (Omitiendo "$z_1, ..., z_m$" con el fin de ahorrar espacio). CASO 1: C es una fórmula prima P. Por lo tanto P expresa un predicado *P* recursivo primitivo, cuya función representativa es $\varphi$. Sea $\gamma = 2^{\varphi} \cdot 3^0$. CASO 2: C es A $\supset$ B, y, por hipótesis de inducción, existen para A y B respectivamente funciones $\alpha$ y $\beta$ de evaluación-R recursivas primitivas. Sea

$$\gamma = \begin{cases} 2^0 \cdot [3 \exp \Lambda a\,(\beta)_1] \text{ si } (\beta)_0 = 0, \\ 2^0 \cdot 3^0 \text{ si } (\alpha)_0 = (\beta)_0 = 1, \\ 2^1 \cdot 3^0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

CASO 3: $\neg$ A. Hágase $\beta = 2^1 \cdot 3^0$ en el Caso 2. CASO 4: A & B. Sea

$$\gamma = \begin{cases} 2^0 \cdot [3 \exp 2^{(\alpha)_1} \cdot 3^{(\beta)_1}] \text{ si } (\alpha)_0 = (\beta)_0 = 0, \\ 2^1 \cdot 3^0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

CASO 5: A **V** B. De modo similar. (d) *Una fórmula prenexa es realizable si, y sólo si, es verdadera de modo recursivo general.* (Cfr. Consideración 2 § 79 y Ejemplo 5 § 81). DEMOSTRACION. Consideremos de nuevo la fórmula G de la que se ha hecho uso como ilustración en § 79. Sea $\alpha(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$ una función de evaluación-R recursiva primitiva de $A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$. Entonces, si G es recursivamente verdadera,

$$2^{y_1} \cdot [3 \exp \Lambda x_1\, 2^{y_2(x_1)} \cdot [3 \exp \Lambda x_2\, 2^{y_3(x_1,x_2)} \cdot 3 \exp (\alpha(y_1, x_1, y_2(x_1), x_2, y_3(x_1, x_2)))_1]]$$

la realiza. Recíprocamente, si $g$ realiza G, entonces G es recursivamente verdadera, siendo $y_1 = (g)_0$, $y_2(x_1) = (\{(g)_1\}(x_1))_0$ e $y_3(x_1, x_2) = (\{(\{(g)_1\}(x_1))_1\}(x_2))_0$ el número y las funciones requeridos.

EJEMPLO 4. Bajo la tesis de que $(x)(Ei)B(x, i)$ vale desde el punto de vista intuicionista sólo si existe una función recursiva general $\alpha$ tal que $(x)B(x, \alpha(x))$ (cfr. más arriba, o la Tesis III de Kleene 1943, pág. 69), mostramos que

(a) $$(y)(Ei)_{i<a} A(i, (y)_i) \rightarrow (Ei)_{i<a}(y) A(i, y)$$

no vale desde el punto de vista intuicionista para todo $A$ (cfr. (20) § 57). Haciendo uso de (51) § 61,

$$(x)(y)(Ei)_{i<2} \overline{W}(x, (y)_i).$$

Por esta razón, si tuviéramos (a) desde el punto de vista intuicionista, obtendríamos $(x)(Ei)_{i<2}(y)\overline{W}_i(x, y)$ desde el punto de vista intuicionista; por lo tanto, en en virtud de la tesis, para alguna $\alpha$ recursiva que toma valores $<2$, $(x)(y)\overline{W}_{\alpha(x)}(x, y)$; por lo tanto, para algún $x$,

(b) $$(Ey) W_0(x, y) \rightarrow \alpha(x) = 1, \qquad (Ey) W_1(x, y) \rightarrow \alpha(x) = 0.$$

Pero podemos tomar $\alpha(x) = 1$ como el $R_0(x, y)$ y $\alpha(x) = 0$ como el $R_1(x, y)$ de (57) y (58) § 61. Entonces o $\alpha(f) = 1$ ó $\alpha(f) = 0$. Si $\alpha(f) = 1$, entonces $(Ey) R_0(f, y)$, por lo que se sigue como en § 61 que $(Ey) W_1(f, y)$, en contradicción con (b). De modo similar en el caso de que $\alpha(f) = 0$.

# BIBLIOGRAFIA

Una fecha en elzevirianos medievales (p. ej. 1908, no 1908) que aparezca en unión de un nombre, constituye una referencia a esta bibliografía (p. ej., Brouwer 1908). La fecha es de ordinario la fecha de publicación del volumen completo de la revista en la que aparece el artículo. Hay excepciones; principalmente en el caso de comunicaciones a congresos internacionales, en donde la fecha es usualmente la del congreso (p. ej. Hilbert 1904). La fecha puede llevar como sufijos las letras a, b, etc. para distinguir títulos adicionales cuya fecha sea la misma; o un asterisco * para indicar la presencia de una nota que acompaña al título en la presente bibliografía.

Sólo se hace relación aquí de aquellas obras que han sido citadas en el texto de este libro (o en algunos casos, de las citadas en algún otro lugar en la bibliografía). En el presente libro han sido traducidas al castellano[1] cuantas citas se tomaron de obras escritas en otro idioma.

Las contribuciones de Alonzo Church: *A bibliography of symbolic logic*, que constituye el n.º 4 (págs. 121-218) del vol. 1 (1936) de **The journal of symbolic logic**, junto con las **Additions and corrections** (y un índice por materias) que aparecen en el n.º 4, págs. 178-212 del vol. 3 (1938), pretenden cubrir por completo el panorama de la literatura sobre lógica simbólica (incluyendo campos afines tales como funciones recursivas) hasta 1935. Ambas contribuciones existen asimismo encuadernadas en un solo volumen. (Los títulos adicionales aparecidos de entonces acá han sido registrados en subsiguientes volúmenes).

La literatura a partir de 1935 está cubierta por recensiones críticas en **The journal of symbolic logic**. De dichas recensiones se confecciona un índice por autores bianualmente (en años impares), y quinquenalmente por materias (en 1940, 1945, etc.).

La presente bibliografía contiene algunos títulos que no son muy asequibles. En lo que respecta a publicaciones aparecidas después de 1935, puede obtenerse casi invariablemente información acerca de su contenido consultando las secciones de recensión de **The journal of symbolic logic**, o también, para publicaciones posteriores a 1938, en **Mathematical reviews** bajo el epígrafe "Foundations"

El autor ha utilizado la *Bibliography* de Church y las secciones de recensión de **The journal of symbolic logic** al preparar la presente bibliografía, como también las bibliografías de Fraenkel 1928 y Heyting 1934 (especialmente para títulos que no entran dentro del campo de la *Bibliography* y del **Journal**).

Con 1951 comienza la aparición de una serie internacional de monografías bajo el título "Studies in logic and the foundations of mathematics" (North-Holland Pub. Co., Amsterdam), que incluye contribuciones de investigación y trabajos sobre múltiples tópicos.

---

[1] **Inglés, en el original** (*N. del T.*).

ACKERMANN, WILHELM

1924-5. *Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit.* **Mathematische Annalen**, vol. 93, págs. 1-36.

1928. *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.* Ibid., vol. 99, págs. 118-133.

1940. *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie.* Ibid., vol. 117, págs. 162-194.

Véase Hilbert y Ackermann.

BEHMANN, HEINRICH

1922. *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem.* Ibid., vol. 86, págs. 163-229.

BERECZKI, ILONA

1949 no publicado. Resultados comunicados al autor en una carta de Kalmár fechada en 17 de Noviembre, 1949. El autor obtuvo (A)–(C) del Ejemplo 1 § 57 después de recibir esta carta; (D) fue (en sustancia) mencionado (oralmente) al autor por Kalmár en 18 de agosto, 1948.

1951. *On recursive functions which are not elementary.* **Acta scientiarum mathematicarum**, (Szeged) vol. 13? (por aparecer). El resultado de Miss Bereczki concerniente a ${}^{b}a$ está también en Péter 1951, págs. 61 ss.

BERNAYS, PAUL

1935. *Sur le platonisme dans les mathématiques.* **L'Enseignement mathématique**, vol. 34, págs. 52-69.

1935a. *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik.* **David Hilbert Gesammelte Abhandlungen**, vol. 3, Berlin (Springer), págs. 196-216.

1936. **Logical calculus.** Notes on lectures at the Institute for Advanced Study 1935-6, prepared with the assistance of F. A. Ficken. Mimeografiado. Inst. for Adv. Study, Princenton, N.J., 1936, 125 págs.

1937-48. *A system of axiomatic set theory.* **The journal of symbolic logic**, vol. 2 (1937), págs. 65-77, vol. 6 (1941), págs. 1-17, vol. 7 (1942), págs. 65-89 y 133-145, vol. 8 (1943), págs. 89-106, vol. 13 (1948), págs. 65-79.

1938. *Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration.* **Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 Décembre 1938**, Exposés et discussions, publicados por F. Gonseth, Zurich (Leemann) 1941, págs. 144-152. Discusión en págs. 153-161.

Véase Hilbert y Bernays.

BERNSTEIN, FELIX

1898. Véase pág. 104 de Borel 1898.

BERRY, G. G.

1906. Véase pág. 646 de Russell 1906.

BLACK, MAX

1933. **The nature of mathematics. A critical survey.** Londres (Kegan Paul, Trench, Trubner) y Nueva York (Harcourt, Brace), xiv + 219 págs. Reimpreso en Londres (Routledge y Kegan Paul) y Nueva York (The Humanities Press) 1950.

BOOLE, GEORGE

1847. **The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning.** Cambridge (Macmillan, Barclay & Macmillan) y Londres (George Bell), 82 págs. Reimpreso en Oxford (Basil Blackwell) y Nueva York (Philosophical Library, Inc.) 1948.

1854. **An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.** Londres (Walton y Maberly), v + iv + 424 págs.

Reimpreso como vol. 2 de George Boole's collected works, compiladas por Ph. E. B. Jourdain, Chicago y Londres 1916. Reimpreso en Nueva York (Dover Publications) 1951.

BOONE, WILLIAM W.

1951. resumen. *An extension of a result of Post.* **The journal of symbolic logic**, vol. 16, págs. 237-238.

1952. Recensión de Turing 1950. Ibid., vol. 17, págs. 74-76.

BOREL, ÉMILE

1898. **Leçons sur la théorie des fonctions.** Paris (Gauthier-Villars).

BROUWER, L. E. J.

1908. *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (La no fiabilidad de los principios de la lógica). **Tijdschrift voor wijsbegeerte**, vol. 2, págs. 152-158. Reimpreso en **Wiskunde, waarheid, werkelijkheid**, por L. E. J. Brouwer, Groningen (P. Noordhoff) 1919, 12 págs.

1923. *Über die Bedeutungen des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie.* **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, vol. 154 (1925), págs. 1-7. Original en holandés 1923.

1928. *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus.* **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse**, 1928, págs. 48-52. También en **Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences**, vol. 31, págs. 374-379.

BURALI-FORTI, CESARE

1897. *Una questione sui numeri transfiniti.* **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo**, vol. 11, págs. 154-164. Véase también ibid., pág. 260. En lo concerniente a los descubrimientos, por parte de Cantor, de las paradojas de Burali-Forti y Cantor, véase Fraenkel 1932, pág. 470.

CANTOR, GEORG

1874. *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, vol. 77, págs. 258-262. Reimpreso en **Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen**, Berlín (Springer) 1932, págs. 115-118.

1895-7. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* **Mathematische Annalen**, vol. 46 (1895), págs. 481-512, y vol. 49 (1897) págs. 207-246. Reimpreso en **Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen**, págs. 282-351. Traducción al inglés por Ph. E. B. Jourdain con el título **Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers**, Chicago y Londres (Open Court) 1915, ix + 211 págs.

CARNAP, RUDOLF

1931-2. *Die logizistische Grundlegung der Mathematik.* **Erkenntnis**, vol. 2, págs. 91-105.

1934. **The logical syntax of language.** Nueva York (Harcourt, Brace) y Londres (Kegan Paul, Trench, Trubner) 1937, xvi + 352 págs. Tr. del original alemán por Amethe Smeaton 1934, con adiciones.

CHURCH, ALONZO

1932. *A set of postulates for the foundation of logic.* **Annals of mathematics**, segunda serie, vol. 33, págs. 346-366.

1933. *A set of postulates for the foundation of logic (second paper).* Ibid., vol. 34, págs. 839-864.

1935. *A proof of freedom from contradiction.* **Proceedings of the National Academy of Sciences**, vol. 21, págs. 275-281.

1936. *An unsolvable problem of elementary number theory.* **American journal of mathematics**, vol. 58, págs. 345-363.

1936a. *A note on the Entscheidungsproblem.* **The journal of symbolic logic**, vol. 1, págs. 40-41. *Correction*, ibid., págs. 101-102.

1938. *The constructive second number class.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 44, págs. 224-232.

1941. **The calculi of lambda-conversion.** Annals of Mathematics studies, no. 6. Litografiado. Princeton University Press, Princeton, N.J., ii + 77 págs. Segunda impresión 1951, ii + 82 págs.

1951. *Special cases of the decision problem.* Revue philosophique de Louvain, vol. 49, págs. 203-221. *A correction*, ibid., vol. 50 (1952), págs. 270-272.

1952-3. **Introduction to mathematical logic.** Princeton University Press, Princeton, N.J., vol. 1, 1952 ó 1953, el vol. 2 seguirá.

Véase Church y Kleene, Church y Quine.

CHURCH, ALONZO y KLEENE, S. C.

1936. *Formal definitions in the theory of ordinal numbers.* Fundamenta mathematicae, vol. 28, págs. 11-21.

CHURCH, ALONZO y QUINE, W. V.

1952. *Some theorems on definability and decidability.* The journal of symbolic logic, vol. 17 (de próxima aparición).

CURRY, HASKELL B

1929. *An analysis of logical substitution.* American journal of mathematics, vol. 51, págs. 363-384.

1930. *Grundlagen der kombinatorischen Logik.* Ibid., vol. 52, págs. 509-536, 789-834.

1932. *Some additions to the theory of combinators.* Ibid., vol. 54, págs. 551-558.

1939. *A note on the reduction of Gentzen's calculus LJ.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 45, págs. 288-293.

1948-9. *A simplification of the theory of combinators.* Synthese, vol. 7, págs. 391-399.

1950. A theory of formal deducibility. Notre Dame mathematical lectures, no. 6, University of Notre Dame, Notre Dame, Ind., ix + 126 págs.

1952. *The permutability of rules in the classical inferential calculus.* The journal of symbolic logic, vol. 17 (de próxima aparición).

DANTZIG, D. VAN

1947. *On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics.* Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences, vol. 50, págs. 918-929, 1092-1103; también en Indagationes mathematicae, vol. 9, págs. 429-440, 506-517.

1948. *Significs, and its relation to semiotics.* Library of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11-18, 1948), vol. 2 Philosophical essays, Amsterdam (Veen) 1948, págs. 176-189.

DAVIS, MARTIN

1950 resumen. *Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30-Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, pág. 723.

DEDEKIND, RICHARD

1872. **Stetigkeit und irrationale Zahlen.** Braunschweig (5.ª ed. 1927). También en Dedekind Gesammelte mathematische Werke, vol. III, Braunschweig (Vieweg & Sohn) 1932, págs. 315-334. Tr. ing. por Wooster Woodruff Beman con el título *Continuity and irrational numbers*, págs. 1-24 de Essays on the theory of numbers, Chicago (Open Court) 1901, 115 págs.

1888. **Was sind und was sollen die Zahlen?** Braunschweig (6.ª ed. 1930). También en Werke, vol. III, págs. 335-391. Tr. ingl. por Beman, *The nature and meaning of numbers*, loc. cit., págs. 31-105.

DE MORGAN, AUGUSTUS

1847. **Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable.** Londres, xvi + 336 págs. Reimpreso en Chicago y Londres 1926 (ed. por A. E. Taylor).

1864. *On the syllogism, no. IV, and on the logic of relations* (leído en 23 abril 1860). **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, vol. 10, págs. 331-358.

DIXON, A. C.

1906. *On "well-ordered" aggregates.* **Proceedings of the London Mathematical Society**, ser. 2, vol. 4, págs. 18-20. Cfr. ibid., págs. 317-319.

EINSTEIN, ALBERT

1944. *Remarks on Bertrand Russell's theory of knowledge.* **The philosophy of Bertrand Russell**, ed. por Paul Arthur Schilpp. Northwestern University, Evanston y Chicago, págs. 277-291. (En alemán con tr. ingl. por Schilpp).

FEYS, ROBERT

1937-8. *Les logiques nouvelles des modalités.* **Revue néoscolastique de philosophie**, vol. 40 (1937), págs. 517-553, vol. 41 (1938), págs. 217-252.

Véase Feys y McKinsey.

FEYS, R. y MCKINSEY, J. C. C.

1952. **Modal logics.** Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), de próxima aparición.

FINSLER, PAUL

1926. *Formale Beweise und die Entscheidbarkeit.* **Mathematische Zeitschrift**, vol. 25, págs. 676-682.

FRAENKEL, ADOLF

1922. *Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms.* **Sitzungsberichte der Preussische Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1922**, págs. 253-257.

1925. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* **Mathematische Zeitschrift**, vol. 22, págs. 250-273.

1928. **Einleitung in die Mengenlehre**, 3.ª ed., Berlín (Springer) 1928, xiii + 424 págs. Reimpreso en Nueva York (Dover Publications) 1946.

1932. *Das Leben Georg Cantors.* **Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts**, ed. por Ernst Zermelo, Berlín (Springer), págs. 452-483.

1952. **Abstract set theory.** Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), de próxima aparición.

FREGE, GOTTLOB

1879. **Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.** Halle (Nebert), viii + 88 págs.

1884. **Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.** Breslau, xix + 119 págs. Reimpreso en Breslau (M. & H. Marcus) 1934. Tr. ingl. por J. L. Austin (con el original alemán): **The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number.** Oxford (Basil Blackwell) y Nueva York (Philosophical Library) 1950, (xii + XI + 119) × 2 páginas.

1893. **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.** Jena (H. Pohle), vol. 1, xxxii + 254 págs.

1903. Ibid., vol. 2, xv + 265 págs. Tr. ingl. de las Secciones 86-137 por Max Black con el título *Frege against the formalists* en **The philosophical review**, vol. 59 (1950), págs. 77-93, 202-219, 332-345.

GENTZEN, GERHARD

1934-5. *Untersuchungen über das logische Schliessen.* **Mathematische Zeitschrifft**, vol. 39, págs. 176-210, 405-431. Aparte de diferencias menores en la noción de fórmula, y

para los sistemas tipo-Hilbert en la selección precisa de los postulados, nuestro "sistema formal $H$" clásico para cálculo de predicados es el "Kalkül $LHK$" de Gentzen, nuestro sistema intuicionista "$H$" es su "$LHJ$", nuestro sistema clásico "$G1$" es su "$LK$", y nuestro sistema intuicionista "$G1$", su "$LJ$".

1936. *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.* **Mathematische Annalen**, vol. 112, págs. 493-565. Gentzen usa 1, 2, 3, ... donde nosotros usamos 0, 1, 2, ...

1938. *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung.* **Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften**, nueva serie, no. 4, Leipzig (Hirzel), págs. 5-18.

1938a. *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.* Ibid., págs. 19-44.

1943. *Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie.* **Math. Ann.**, vol. 119 no. 1, págs. 140-161.

GLIVENKO, V.

1929. *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.* **Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences**, ser. 5, vol. 15, págs. 183-188.

GÖDEL, KURT

1930. *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* **Monatshefte für Mathematik und Physik**, vol. 37, págs. 349-360.

1931. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Ibid., vol. 38, págs. 173-198.

1931-2. *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit.* **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums**, Heft 3 (entregado 1930-1, pub. 1932), págs. 12-13. Este artículo da una lista de resultados sin pruebas.

1931-2a. Observaciones comunicadas en una *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik.* **Erkenntnis**, vol. 2, págs. 147-148.

1932. *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül.* **Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger**, vol. 69 (1932), págs. 65-66. Reimpreso en **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums**, Heft 4 (entregado 1931-2, pub. 1933), pág. 40.

1932-3. *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie.* **Ergebnisse eines math. Koll.**, Heft 4 (entregado 1931-2, pub. 1933), págs. 34-38.

1934. **On undecidable propositions of formal mathematical systems.** Notas tomadas por S. C. Kleene y Barkley Rosser de las conferencias en el Institute for Advanced Study, 1934. Mimeografiado, Princeton, N.J., 30 págs.

1936. *Über die Länge von Beweisen.* **Ergebnisse eines math. Koll.**, Heft 7 (entregado 1934-5, pub. 1936, con nota añadida en prensa), págs. 23-24.

1938. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis.* **Proceedings of the National Academy of Academy of Sciences**, vol. 24, págs. 556–557. Un tratamiento muy completo se da en 1940.

1939. *Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis.* Ibid., vol. 25, págs. 220-224.

1940. **The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.** Conferencias pronunciadas en el Institute for Advanced Study 1938-9; notas tomadas por George W. Brown. Annals of Mathematics studies, no. 3. Litoimpreso. Princeton University Press, Princeton 1940, 66 págs. (En el Axioma 4 insértese "(u)" después de "$(\exists z)$". Cfr. también Ejemplo 13 § 74 más arriba). Segunda impresión 1951, 74 págs.

1944. *Russell's mathematical logic.* **The philosophy of Bertrand Russell**, ed. por Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston y Chicago, págs. 123-153.

1947. *What is Cantor's continuum problem?* **American mathematical monthly**, vol. 54, págs. 515-525.

GONSETH, FERDINAND

1933. *La vérité mathématique et la réalité.* L'Enseignement mathématique, vol. 31 (entregado 1932, pub. 1933), págs. 96-114.

También: *À propos d'un catalogue paradoxical. Réponse de M. Gonseth à M. Winants.* Ibid., págs. 269-271.

HALL, MARSHALL, JR.

1949. *The word problem for semigroups with two generators.* The journal of symbolic logic, vol. 14, págs. 115-118.

HASENJAEGER, GISBERT

1950. *Über eine Art von Unvollständingkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe.* Ibid., vol. 15, págs. 273-276.

HAUSDORFF, FELIX

1914. **Grundzüge der Mengenlehre.** Leipzig (Viet), viii + 476 págs. Reimpreso en Nueva York (Chelsea) 1949.

1927. **Mengenlehre.** Göschens Lehrbucherei, 1 Gruppe Band 7, Berlín y Leipzig (Gruyter), una 2.ª ed. revisada de 1914 (pero menos completa en algunos respectos), 285 págs. 3.ª ed., 1935, 307 págs. Reimpreso en Nueva York (Dover Publications) 1944.

HENKIN, LEON

1949. *The completeness of the first-order functional calculus.* The journal of symbolic logic, vol. 14, págs. 159-166.

1950. *Completeness in the theory of types.* Ibid., vol. 15, págs. 81-91.

1950a. *An algebraic characterization of quantifiers.* Fundamenta mathematicae, vol. 37, págs. 63-74.

HERBRAND, JACQUES

1928. *Sur la théorie de la démonstration.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (París), vol. 186, págs. 1274-1276.

1930. Recherches sur la théorie de la démonstration. Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III sciences mathématiques et physiques, no. 33, 128 págs.

1931-2. *Sur la non-contradiction de l'arithmétique.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 166, págs. 1-8.

HERMES, HANS

1938. *Semiotik. Eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierten Sprachen.* Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, n. s., no. 5, Leipzig (Hirzel), 22 págs.

HEYTING, AREND

1930. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1930, págs. 42-56.

1930a. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.* Ibid., págs. 57-71, 158-169.

1931-2. *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.* Erkenntnis, vol. 2, págs. 106-115.

1934. **Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.** Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 3, no. 4, Berlín (Springer), págs. iv + 73. Errata: El teorema de Gödel 1932-3 no vale ni con mucho para el cálculo de predicados tal y como es establecido por Heyting en pág. 18. Cfr. Observación 1 § 81 más arriba.

1946. *On weakened quantification.* Jour. symbolic logic, vol. 11, págs. 119-121.

HILBERT, DAVID

1899. **Grundlagen der Geometrie.** 7.ª ed. (1930), Leipzig y Berlín (Teubner), vii + 326 págs. Tr. ing. por E. J. Townsend, **The foundations of geometry**, Chicago (Open Court) 1902, iv + 143 págs.

1900. *Über den Zahlbegriff.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vol. 8, págs. 180-184. Reimpreso con una omisión en **Grundlagen der Geometrie**, 7.ª ed., Leipzig y Berlín (Teubner) 1930, págs. 241-246.

1904. *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.* **Verhandlungen des Dritten Internazionalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904**, Leipzig 1905, págs. 174-185. Reimpreso, loc. cit. págs. 247-261.

1918. *Axiomatisches Denken.* **Mathematische Annalen**, vol. 78, págs. 405-415. Reimpreso en **David Hilbert Gesammelte Abhandlungen**, vol. 3, Berlín (Springer) 1935, págs. 146-156.

1926. *Über das Unendliche.* **Math. Ann.**, vol. 95, págs. 161-190. Reimpreso en forma abreviada en **Jahresb. Deutschen Math.-Verein.**, vol. 36 (1927), págs. 201-215. También con algunas revisiones en **Grundlagen der Geometrie**, 7.ª ed., 1930, págs. 262-288.

1928. *Die Grundlagen der Mathematik.* **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität**, vol. 6, págs. 65-85. Reimpreso con abreviaciones en **Grundlagen der Geometrie**, 7.ª ed., págs. 289-312.

Véase Hilbert y Ackermann, Hilbert y Bernays.

HILBERT, DAVID y ACKERMANN, WILHELM

1928. **Grundzüge der theoretischen Logik.** Berlín (Springer), viii + 120 págs. 2.ª ed. 1938, viii + 133 págs. Reimpreso Nueva York (Dover Publications) 1946. 3.ª ed. Berlín, Göttingen, Heildelberg (Springer) 1949, viii + 155 págs. Tr. ing. de la 2.ª ed. por L. M. Hammond, G. G. Leckie y F. Steinhardt, ed. con notas por R. E. Luce, **Principles of mathematical logic**, Nueva York (Chelsea Pub. Co.) 1950, xii + 172 págs.

HILBERT, DAVID y BERNAYS, PAUL

1934. **Grundlagen der Mathematik**, vol. 1, Berlín (Springer), xii + 471 págs. Reimpreso Ann Arbor, Mich. (J. W. Edwards) 1944.

1939. Ibid., vol. 2, Berlín (Springer), xii + 498 págs. Reimpreso en Ann Arbor, Mich. (Edwards) 1944.

IONGH, JOHAN J. DE

1948. *Restricted forms of intuitionistic mathematics.* **Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11-18, 1948)**, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, págs. 744-748 (fasc. 2).

JAŚKOWSKI, STANISŁAW

1934. **On the rules of suppositions in formal logic.** Studia logica, no. 1, Varsovia, 32 págs.

1936. *Recherches sur le système de la logique intuitioniste.* **Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VI Philosophie des mathématiques**, Actualités scientifiques et industrielles 393, París (Hermann & Cie.), págs. 58-61. Jaśkowski no da sus pruebas con detalle; una reconstrucción de las pruebas figura en Gene Rose 1952 Parte I.

KALMÁR, LÁSZLÓ

1934-5. *Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls.* **Acta scientiarum mathematicarum** (Szeged), vol. 7, págs. 222-243.

1943. *Egyszerü példa eldönthetetlen aritmetikai problémára* (Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem). **Matematikai és fizikai lapok**, vol. 50, págs. 1-23. En húngaro con resumen en alemán. Kalmár toma, como base para sus funciones elementales, las variables, $1, +, \cdot, |a-b|, [a/b], \sum_{y=w}^{z}, \prod_{y=w}^{z}$, pero observa que entonces $\cdot$ y $[a/b]$ son redundantes. (Cfr. Ejemplo 1 § 57 más arriba).

1948. *On unsolvable mathematical problems.* **Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11-18, 1948)**, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, págs. 756-758 (fasc. 2). Preimpresión 1948, págs. 534-536.

1950. *Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen.* **Methodos**, vol. 2, págs. 220-226; tr. ing. por Ernst v. Glasersfeld, págs. 227-231.

1950a. *Another proof of the Gödel-Rosser incompletability theorem.* Acta scientiarum mathematicarum (Szeged), vol. 12, págs. 38-43.

KEMENY, JOHN G.

1948. *Review of Mostowski* 1947a. Jour. symbolic logic, vol. 13, págs. 46-48.

KETONEN, OIVA

1944. *Untersuchungen zum Prädikatenkalkül.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae, ser. A. I., Mathematica-physica 23, Helsinki, 71 págs.

KLEENE, STEPHEN C.

1934. *Proof by cases in formal logic.* Ann. of math. 2 s., vol. 35, págs. 529-544. Con relación a § 20 más arriba, cfr. pág. 534. El uso de "$\vdash$" para expresar derivabilidad por las reglas de inferencia tiene su origen en Rosser; la modificación consistente en extender $\vdash$ también a los axiomas, en el autor.

1935. *A theory of positive integers in formal logic.* Amer. jour. math., vol. 57, págs. 153-173, 219-244.

1936. *General recursive functions of natural numbers.* Math. Ann., vol. 112, págs. 727-742. Sobre una errata y una simplificación, cfr. Jour. symbolic logic, vol. 3, pág. 152, vol. 2, pág. 38 y vol. 4, pág. IV al final.

1936a. *λ-definability and recursiveness.* Duke mathematical journal, vol. 2, págs. 340-353.

1936b. *A note on recursive functions.* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 42, págs. 544-546.

1938. *On notation for ordinal numbers.* Jour. symbolic logic, vol. 3, págs. 150-155.

1943. *Recursive predicates and quantifiers.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 53, págs. 41-73. Omítase § 15, porque la demostración del Teorema 1 de 1944 contiene un error.– La nota de pie de página (21) cita sólo una función que es parcial pero no potencialmente recursiva, aunque el texto menciona también predicados. (Esta perspectiva fue notificada al autor por J. C. E. Dekker, 18 de marzo de 1952.) Para un tal predicado, cfr. Ejemplo 6 § 63 más arriba.

1944. *On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals.* Amer. jour. math., vol. 66, págs. 41-58. Los asteriscos de (4) y (11) pág. 43 (cfr. *86 y *95 más arriba debieran ser omitidos).– El tratamiento del ejemplo $P(a)$ en 8 no es completo. Porque (18) no es simplemente otro modo de escribir la definición inductiva de '$a$ es demostrable', pero puede tener otras soluciones para $P(a)$ aparte de $P(a) \equiv \{a$ es demostrable$\}$ (p. ej. $P(a) \equiv \{a$ es una fórmula$\}$). Sin embargo, para cualquier solución de (18), $\{a$ es demostrable$\} \rightarrow P(a)$; y es fácil mostrar a partir de (22) que para la particular solución $P(a) \equiv (Ex)\, R(a, x) \rightarrow \{a$ es demostrable$\}$. – Similarmente, para toda aplicación de la técnica en que la solución particular contenga sólo un cuantificador existencial (cfr. final de § 53). Pero en la aplicación a $a\ 8\ Q$ en 14, donde hay también un cuantificador de generalidad, el tratamiento no puede ser completado de esta manera; y así el Teorema 1 y la primera parte del Teorema 2 quedan por establecer. El autor proyecta discutir la situación en un segundo artículo con el mismo título.

1945. *On the interpretation of intuitionistic number theory.* Jour. symbolic logic, vol. 10, págs. 109-124.

1948. *On the intuitionistic logic.* Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11-18, 1948), Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, págs. 741-743 (fasc. 2). Prepublicación 1948, págs. 185-187.

1950. *A symmetric form of Gödel's theorem.* Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings fo the section of sciences, vol. 53, págs. 800-802; también Indagationes mathematicae, vol. 12, págs. 244-246.

1950a. *Recursive functions and intuitionistic mathematics.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30-Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, págs. 679-685.

1952. *Permutability of inferences in Gentzen's calculi LK and LJ.* Memoirs of the American Mathematical Society, n.º 10, págs. 1-26.

Véase Church y Kleene.

KREISEL, G.

1950. *Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus.* **Fundamenta mathematicae,** vol. 37, págs. 265-285.

KUZNÉCOV, A. V.

1950. *O primitivno rekursivnyh funkciáh bol'šogo razmaha* (Sobre funciones recursivas de larga oscilación). **Doklady Akadémii Nauk SSSR,** n.s., vol. 71, págs. 233-236.

LANGFORD, COOPER HAROLD

1927. *On inductive relations.* **Bull. Amer. Math. Soc.,** vol. 33, págs. 599-607.

Véase Lewis y Langford.

LEWIS, CLARENCE IRVING

1912. *Implication and the algebra of logic.* **Mind,** n.s., vol. 21, págs. 522-531.

1917. *The issues concerning material implication.* **The journal of philosophy, psychology and scientific method,** vol. 14, págs. 350-356.

Véase Lewis y Langford.

LEWIS, CLARENCE IRVING y LANGFORD, COOPER HAROLD

1932. **Symbolic logic.** Nueva York y Londres (The Century Co.), xi + 506 págs. Reimpreso en Nueva York (Dover Publications) 1951.

LÖWENHEIM, LEOPOLD

1915. *Über Möglichkeiten im Relativkalkül.* **Math. Ann.,** vol. 76, págs. 447-470.

ŁUKASIEWICZ, JAN

1920. *O logice trójwartościowej* (Sobre lógica tri-valente). **Ruch filozoficzny** (Lwów), vol. 5, págs. 169-171.

1925. *Démonstration de la compatibilité des axioms de la théorie de la déduction.* **Annales de la Société Polonaise de Mathématique,** vol. 3 (para 1924, pub. 1925), pág. 149.

Véase Łukasiewicz y Tarski.

ŁUKASIEWICZ, JAN y TARSKI, ALFRED

1930. *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* **Comptes rendus des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie,** Classe III, vol. 23, págs. 30-50.

MACLANE, SAUNDERS

1934. **Abgekürzte Beweise im Logikkalkul.** Dissertation Göttingen. 61 págs.

MANNOURY, GERRIT

1909. **Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik.** Haarlem (P. Visser), viii + 276 págs.

1925. **Mathesis en mystiek.** Amsterdam. Traducción francesa: **Les deux pôles de l'esprit.** París, 1933.

1934. *Die signifischen Grundlagen der Mathematik.* **Erkenntnis,** vol. 4, págs. 288-309, 317-345.

MARKOV, A. A.

1947. *Névozmožnost' nékotoryh algorifmov v téorii associativnyh sistém.* **Doklady Akadémii Nauk SSSR,** n.s., vol. 55, págs. 587-590. Trad. ingl. *On the impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems.* **Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS,** n.s., vol. 55, págs. 583-586.

1947a. *O nékotoryh nérazrésimyh problémah kasaúščihsá matric* (Sobre algunos problemas insolubles concernientes a matrices). **Doklady Académii Nauk SSSR,** n.s., vol. 57, págs. 539-542.

1947b. *Névozmožnost' nékotoryh algorifmov v téorii associativnyh sistém II* (Imposibilidad de ciertos algoritmos en la teoría de sistemas asociativos II). Ibid., vol. 58, págs. 353-356.

1947c. *O prédstavlénii rékursivnyh funkcij* (Sobre la representación de funciones recursivas). Ibid., págs. 1891-1892.

1949. *O predstavlénii rékursivnyh funkcij* (Sobre la representación de funciones recursivas). **Izvéstiya Akadémii Nauk SSSR, ser. mat.**, vol. 13, págs. 417-424. Trad. ingl., **On the representation of recursive functions, Amer. Math. Soc.**, traducción n.º 54, litoimpreso, Nueva York 1951, 13 págs.

1951. *Névozmožnost' nékotoryh algoritmov v téorii associativnyh sistém* (Imposibilidad de ciertos algoritmos en la teoría de sistemas asociativos). **Doklady Akadémii Nauk SSSR**, n.s., vol. 77, págs. 19-20.

1951a. *Névozmožnost' algorifmov raspoznavaniá nékotoryh svojstv associativnyh sistém* (Imposibilidad de algoritmos para distinguir ciertas propiedades de sistemas asociativos). Ibid., págs. 953-956.

1951b. *Ob odnoj nĕrazrešimoj problémé, kasaušcéjsá matric* (Un problema insoluble concerniente a matrices). Ibid., vol. 78, págs. 1089-1092.

MCKINSEY, J. C. C.

1939. *Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions.* **Jour. symbolic logic**, vol. 4, págs. 155-158.

Véase Feys y McKinsey, McKinsey y Tarski.

MCKINSEY, J. C. C. y TARSKI, ALFRED

1948. *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting.* Ibid., vol. 13, págs. 1-15.

MOSTOWSKI, ANDRZEJ

1947. *On definable sets of positive integers.* **Fundamenta mathematicae**, vol. 34, págs. 81-112.

1947a. *On absolute properties of relations.* **Jour. symbolic logic**, vol. 12, págs. 33-42.

1948. *Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus.* Ibid., vol. 13, págs. 204-207.

1948a. *On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates.* **Annales de la Société Polonaise de Mathématique**, vol. 21, págs. 114-119.

1949. *An undecidable arithmetical statement.* **Fund. math.**, vol. 36, págs. 143-164.

1951. *A classification of logical systems.* **Studia philosophica**, vol. 4, págs. 237-274.

1952. Sentences undecidable in formalized arithmetic. **An exposition of the theory of Kurt Gödel.** Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co., viii + 117 págs.

1952a. *Models of axiomatic systems.* **Fund. Math.**, vol. 39 (en trance de aparición). Cfr. Ryll-Nardzewski 1952.

Véase Mostowski y Tarski.

MOSTOWSKI, ANDRZEJ y TARSKI, ALFRED

1949 resumen. *Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings.* **Jour. symbolic logic**, vol. 14, pág. 76.

NELSON, DAVID

1947. *Recursive functions and intuitionistic number theory.* **Trans. Amer. Math. Soc.**, vol. 61, págs. 307-368.

1949. *Constructible falsity.* **Jour. symbolic logic**, vol. 14, págs. 16-26.

NEUMANN, JOHN VON

1925. *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.* **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, vol. 154, págs. 219-240. *Berichtigung*, ibid., vol., 155 (1926), pág. 128.

1927. *Zur Hilbertschen Beweistheorie.* **Math. Zeit.**, vol. 26, págs. 1-46.

1928. *Die Axiomatisierung der Mengenlehre.* Ibid., vol. 27, págs. 669-752.

1931-2. *Die formalistische Grundlegung der Mathematik.* **Erkenntnis,** vol. 2, págs. 116-121.

1947. *The mathematician.* **The works of the mind,** ed. por Robert B. Heywood, Chicago (U. of Chicago Press), págs. 180-196.

PASCH, MORITZ

1882. **Vorlesungen über neuere Geometrie.** Leipzig (Teubner), iv + 210 págs. Reimpreso en **Vorlesungen über neuere Geometrie** por M. Pasch y Max Dehn, Berlín (Springer) 1926, viii + 275 págs.

PEANO, GIUSEPPE

1889. **Arithmetices principia, nova methodo exposita.** Turín (Bocca), xvi + 20 págs.

1891. *Sul concetto di numero.* **Rivista di matematica,** vol. 1, págs. 87-102, 256-267. Peano formula sus axiomas para los enteros positivos. (De hecho, algunos escritores llaman a éstos los "números naturales".)

1894-1908. **Formulaire de mathématiques.** Introducción y cinco volúmenes. Turín. Editado por Peano y escrito por él en colaboración con Rodolfo Bettazzi, Cesare Burali-Forti, F. Castellano, Gino Fano, Francesco Giudice, Giovanni Vailati, Giulio Vivanti.

PEIRCE, CHARLES SANDERS

1867. *On an improvement in Boole's calculus of logic* (presentado en 12 de Marzo de 1867). **Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences,** vol. 7 (1865-8), págs. 250-261. Reimpreso en **Collected papers of Charles Sanders Peire,** ed. por Charles Hartshorne & Paul Weiss, Cambridge, Mass. (Harvard University Press), vol. 3 (1933), págs. 3-15.

1880. *On the algebra of logic. Chapter I. – Syllogistic. Chapter II. – The logic of non-relative terms. Chapter III. – The logic of relatives.* **Amer. jour. math.,** vol. 3, págs. 15-57. Reimpreso con correcciones en **Collected papers,** vol. 3, págs. 104-157.

PÉTER, RÓZSA

1934. *Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion.* **Math. Ann.,** 110, págs. 612-632.

1935. *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen.* Ibid., vol. 111, págs. 42-60.

1935a. *A rekurzív függvények elméletéhez (Zur Theorie der rekursiven Funktionen).* Húngaro con resumen completo en alemán. **Matematikai és fizikai lapok,** vol. 42, págs. 25-49.

1936. *Über die mehrfache Rekursion.* **Math. Ann.,** vol. 13, págs. 489-527.

1940. Recensión de Skolem 1939. **Jour. symbolic Logic,** vol. 5, págs. 34-35.

1950. *Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen.* Ibid., vol. 15, págs. 248-272.

1951. **Rekursive Funktionen.** Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag) Budapest, 206 págs.

POINCARÉ, HENRI

1900. *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques.* **Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900,** París (Gauthier-Villars) 1902, págs. 115-130.

1902. **La science et l'hypothèse.** París, 284 págs. Traducido por G. Bruce Halstead en las págs. 27-197 de **The foundation of science** por H. Poincaré, Nueva York (The Science Press) 1913; reimpreso 1929.

1905-6. *Les mathématiques et la logique.* **Revue de métaphysique et de morale,** vol. 13 (1905), págs. 815-835, vol. 14 (1906), págs. 17-34, 294-317. Reimpreso en 1908 con sustanciales alteraciones y adiciones.

1908. **Science et méthode,** París, 311 págs. Traducido por Halstead en las págs. 359-546 de **The foundation of science,** Nueva York 1913, reimpreso 1929.

POST, EMIL L.

1921. *Introduction to a general theory of elementary propositions.* **Amer. jour. math.,** vol. 43, págs. 163-185.

1936. *Finite combinatory processes–formulation I.* **Jour. symbolic logic**, vol. 1, págs. 103-105.

1943. *Formal reductions of the general combinatorial decision problem.* **Amer. jour. math.**, vol. 65, págs. 197-215.

1944. *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems.* **Bull. Amer. Math. Soc.**, vol. 50, págs. 284-316.

1946. *A variant of a recursively unsolvable problem.* Ibid., vol. 52, págs. 264-268.

1946a. *Note on a conjecture of Skolem.* **Jour. symbolic logic**, vol. 11, págs. 73-74.

1947. *Recursive unsolvability of a problem of Thue.* Ibid., vol. 12, págs. 1-11.

1948 resumen. *Degrees of recursive unsolvability.* Preliminary report. **Bull. Amer. Math. Soc.** vol. 54, págs. 641-642.

PRANTL, CARL

1855. **Geschichte der Logik im Abendlande**, vol. 1, Leipzig (S. Hirzel), xii + 734 págs. (Otros volúmenes 1861, 1867, 1870.) Reimpreso 1927.

PRESBURGER, M.

1930. *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.* **Sprawozdanie z I Kongresu Matematików Krajów Słowianskich** (Comptes rendus du I Congrès des Mathematiciens des Pays Slaves), **Warszawa 1929**, Varsovia 1930, págs. 92-101, 395.

QUINE, WILLARD VAN ORMAN

1940. **Mathematical logic.** Nueva York (Norton), xiii + 348 págs. Ver Rosser 1942 y Quine 1941, en lo concerniente al hecho de que la paradoja de Burali-Forti aflora en el sistema de este libro (aunque la paradoja de Cantor es evitada aparentemente), lo que fue descubierto por Rosser y por Roger C. Lyndon. Ed. revis. Harvard University Press, 1951, xii + 346 págs.

1941. *Element and number.* **Jour. symbolic logic**, vol. 6, págs. 135-149.

Véase Church y Quine.

RAMSEY, F. P.

1926. *The foundations of mathematics.* **Proc. London Math. Soc.**, ser. 2, vol. 25, págs. 338-384. Reimpreso en las págs. 1-61 de **The foundations of mathematics and other logical essays** por F. P. Ramsey, ed. por R. B. Braithwaite, Londres (Kegan Paul, Trench, Trubner) y Nueva York (Harcourt, Brace) 1931. El último reimpreso en Londres (Routledge and Kegan Paul) y Nueva York (Humanities Press) 1950.

RASIOWA, H. y SIKORSKI, R.

1950. *A proof of the completeness theorem of Gödel.* **Fund. math.**, vol. 37, págs. 193-200. Para una simplificación por Tarski, cfr. **Jour. symbolic logic**, vol. 17, pág. 72.

RICHARD, JULES

1905. *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles.* **Révue générale des sciences pures et appliquées**, vol. 16, págs. 541-543. También en **Acta mathematica**, vol. 30 (1906), págs. 295-296.

ROBINSON, JULIA

1949 resumen. *Undecidability in the arithmetic of integers and rationals and in the theory of fields.* **Jour. symbolic logic**, vol. 14, pág. 77.

1949. *Definability and decision problems in arithmetic.* Ibid., págs. 98-114. Con relación a § 48 más arriba, el tratamiento de la autora respecto de los enteros positivos puede ser adaptado a los números naturales.

1950. *General recursive functions.* **Proceedings of the American Mathematical Society**, vol. 1, págs. 703-718.

ROBINSON, RAPHAEL M.

1947. *Primitive recursive functions.* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 53, págs. 925-942.

1948. *Recursion and double recursion.* Ibid., vol. 54, págs. 987-993.

1949 resumen. *Undecidable rings.* Ibid., vol. 55, pág. 1050.

1950 resumen. *An essentially undecidable axiom system.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30-Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, págs. 729-730. El sistema de Robinson es más simple que uno que estuvimos usando previamente (desde Mostowski y Tarski 1949 resumen) en §§ 41, 49 y 76 con el mismo propósito.

ROSE, GENE F.

1952. Jaśkowski's truth-tables and realizability. Tesis, Universidad de Wisconsin.

ROSSER, BARKLEY (Rosser, J. B.; Rosser, J. Barkley)

1935. *A mathematical logic without variables.* Ann. math., 2 s., vol. 36, págs. 127-150 y Duke math. jour., vol. 1, págs. 328-355. Con relación a § 20 más arriba, cfr. pág. 130, pág. 329, y la nota que acompaña a Kleene 1934.

1936. *Extensions of some theorems of Gödel and Church*, Jour. symbolic logic, vol. 1, págs. 87-91.

1936a. Recensión de Gödel 1936. Ibid., vol. 1, pág. 116.

1939. *On the consistency of Quine's "New foundations for mathematical logic".* Ibid., vol. 4, págs. 15-24.

1942. *The Burali-Forti paradox.* Ibid., vol. 7, págs. 1-17.

1942a. *New sets of postulates of combinatory logics.* Ibid., págs. 18-27. Para una corrección, cfr. Curry 1948-9.

Véase Rosser y Turquette, Rosser y Wang.

ROSSER, J. B. y TURQUETTE, A. R.

1945. *Axioms schemes for m-valued propositional calculi.* Jour. symbolic logic, vol. 10, vol. 10, págs. 61-82. Cfr. 1950.

1948-51. *Axiom schemes for m-valued functional calculi of first order. Part I. Definition of axiom schemes and proofs of plausibility.* Ibid., vol. 13 (1948), págs. 177-192. *Part II. Deductive completeness.* Ibid., vol. 16 (1951), págs. 22-34.

1949. *A note on the deductive completeness of m-valued propositional calculi.* Ibid., vol. 14, págs. 219-225.

1952. Many-valued logics. Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), en trance de aparición.

ROSSER, J. BARKLEY y WANG, HAO

1950. *Non-standard models for formal logics.* Jour. symbolic logic, vol. 15, págs. 113-129.

RUSSELL, BERTRAND (Russell, B. A. W.)

1902. *On finite and infinite cardinal numbers* (Sección III de *On cardinal numbers*, de A. N. Whitehead). Amer. jour. math., vol. 24, págs. 378-383.

1902-3. La paradoja de Russell aparece en Frege 1903, en un postscriptum (fechado por Frege en Octubre de 1902), págs. 253-265. Por lo que se refiere al descubrimiento independiente de esta paradoja por parte de Zermelo, véase Zermelo 1908a pág. 119 y Hilbert 1926 pág. 169.

1906. *Les paradoxes de la logique.* Revue de métaphysique et de morale, vol. 14, págs. 627-650.

1908. *Mathematical logic as based on the theory of types.* Amer. jour. math., vol. 30, págs. 222-262.

1910. *La théorie des types logiques.* Rev. métaph. mor., vol. 18, págs. 263-301.

1919. Introduction to mathematical philosophy. Londres (G. Allen and Unwin) y Nueva York (Macmillan), viii + 208 págs., 2.ª ed. 1920.

Véase Whitehead y Russell.

RÜSTOW, ALEXANDER

1910. **Der Lügner, Theorie, Geschichte und Auflösung.** Leipzig (Teubner), v + 147 págs.

RYLL-NARDZEWSKI, CZESŁAW

1952. *The role of the axiom of induction in the elementary arithmetic.* **Fund. Math.**, vol. 39 (de próxima aparición). Subsiguientemente Mostowski obtuvo ulteriores resultados, 1952a.

SCHMIDT, ARNOLD

1938. *Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen.* **Math. Ann.**, vol. 115, págs. 485-506.

SCHÖNFINKEL, MOSES

1924. *Über die Bausteine der mathematischen Logik.* **Math. Ann.**, vol. 92, págs. 305-316.

SCHRÖDER, ERNST

1877. **Der Operationskreis der Logikkalkuls.** Leipzig, v+37 págs.

1890-1905. **Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik).** Vol. 1, Leipzig (Teubner) 1890, xii+717 págs. Vol. 2 parte 1, Leipzig 1891, xiii + 400 págs. Vol. 3 **Algebra und Logik der Relative** parte 1, Leipzig 1895, viii + 649 págs. Vol. 2 parte 2 apareció póstumamente, ed. por Eugen Müller, Leipzig 1905, xxix + 205 págs. **Abriss der Algebra der Logik,** ed. por Müller, parte 1 **Elementarlehre** Leipzig y Berlín 1909, v + 50 págs., parte 2 **Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen,** Leipzig y Berlín 1910, vi + 51 + 159 págs.

SCHÜTTE, KURT

1951. *Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie.* **Math. Ann.**, vol. 122, págs. 369-389.

SHEFFER, H. M.

1913. *A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants.* **Trans. Amer. Math. Soc.**, vol. 14, págs. 481-488. De acuerdo con Quine 1940 pág. 49, la definabilidad de &, **V** y ¬ en términos de un operador era conocida por C. S. Peirce 1880. (Cfr. § 30 más arriba.)

SKOLEM, THORALF

1919. *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen.* **Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-natur-videnskabelig klasse 1919**, n.º 3, 37 págs.

1920. *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.* Ibid., 1920, n.º 4, 36 págs.

1922-3. *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.* **Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922**, Helsingfors 1923, págs. 217-232.

1923. *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich.* **Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisknaturvidenskabelig klasse 1923**, n.º 6, 38 págs.

1929. *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik.* **Skrifter utgitt av det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskapelig klasse 1929**, n.º 4, 49 págs.

1929-30. *Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik.* **Den Syvende Skandinaviske Matematikerkongress i Oslo 19-22 August 1929**, Oslo (Brøggers) 1930, págs. 3-21.

1930-1. *Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik.* **Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskapelig klasse 1930**, n.º 7, 28 págs. (1931).

1933. *Über die Unmoglichkeit einer vollstandingen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems.* **Norsk matematisk forenings skrifter**, ser. 2, n.º 10, págs. 73-82.

1934. *Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen.* **Fund. math.**, vol. 23, págs. 150-161.

1936-7. *Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierten Relationen auf "arithmetische".* **Acta litteratum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Iosephinae, Sectio scientiarum mathematicarum** (Szeged), vol. 8, págs. 73-88.

1938. *Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem.* **Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 Décembre 1938**, Exposés et discussions, publ. por F. Gonseth, Zurich (Leemann) 1941), págs. 25-47. Discusión en págs. 47-52.

1939. *Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie.* **Monatshefte Math. Phys.**, vol. 48, págs. 268-276.

1944. *Some remarks on recursive arithmetic.* **Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger**, vol. 17, págs. 103-106. Ésta es la segunda de una serie de cuatro notas; las restantes aparecen en el mismo volumen, págs. 89-92, págs. 107-109, págs. 126-129.

1951. Recensión de Rosser y Wang 1950. **Jour. Symbolic logic**, vol. 16, págs. 145-146.

TARSKI, ALFRED

1930. *Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik.* **Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie**, Clase III, vol. 23, págs. 22-29.

1932. *Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen.* **Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger**, vol. 69, págs. 23-25. Un anticipo de 1933.

1933. *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten. Sprachen.* **Studia philosophica**, vol. 1 (1936), págs. 261-405 (pruebas fechadas en 1935). Tr. del original polaco 1933 por L. Blaustein, con adición de un postscriptum.

1933a. *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit.* **Monatshefte Math. Phys.**, vol. 40, págs. 97-112.

1949 resumen. *On essential undecidability.* **Jour. symbolic logic**, vol. 14, págs. 75-76.

1949a resumen. *Undecidability of group theory.* Ibid., págs. 76-77.

1949b resumen. *Undecidability of the theories of lattices and projective geometries.* Ibid., págs. 77-78.

Véase Lukasiewicz y Tarski, McKinsey y Tarski, Mostowski y Tarski.

THUE, AXEL

1914. *Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln.* **Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1914**, n.º 10, 34 págs.

TRAHTÉNBROT, B. A.

1950. *Nevozmožnost' algorifma dlá problémy razrésimosti na konéčnyh klassah* (Imposibilidad de un algoritmo para el problema de la decisión en clases finitas). **Doklady Akadémii Nauk SSSR**, n.s., vol. 70, págs. 569-572.

TURING, ALAN MATHISON

1936-7. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.* **Proc. London Math. Soc.**, ser. 2, vol. 42 (1936-7), págs. 230-265. *A correction*, ibid., vol. 43 (1937), págs. 544-546.

1937. *Computability and λ-definability.* **Jour. symbolic logic**, vol. 2, págs. 153-163.

1939. *Systems of logic based on ordinals.* **Proc. London Math. Soc.**, ser. 2, vol. 45, págs. 161-228.

1950. *The word problem in semi-group with cancellation.* **Ann. of math.**, 2 s., vol. 52, págs. 491-505. Algunos puntos en la demostración requieren clarificación, que puede darse, como se advierte en Boone 1952.

VANDIVER, H. S.

1946. *Fermat's last theorem. Its history and the nature of the known results concerning it* Amer. math. monthly, vol. 53, págs. 555-578.

VEBLEN, OSWALD

1904. *A system of axioms for geometry.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 5, págs. 343-384.

Véase Veblen y Bussey.

VEBLEN, OSWALD y BUSSEY, W. H.

1906. *Finite projective geometries.* Ibid., vol. 7, págs. 241-259.

WAJSBERG, MORDECHAJ

1938. *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting.* Wiadomości matematyczne, vol. 46, págs. 45-101.

WANG, HAO

1952. *Logic of many-sorted theories.* Jour. symbolic logic, vol. 17 (de próxima aparición).

1953. *Certain predicates defined by induction schemata.* Ibid., vol. 18 (de próxima ción).

Véase Rosser y Wang.

WEYL, HERMANN

1918. **Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.** Leipzig (Gruyter), iv + 84 págs. Reimpreso 1932.

1919. *Der circulus vitiosus in der heutigen Bregündung der Analysis.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 28, págs. 85-92.

1926. **Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik.** Separata del Symposion, Erlangen (en Weldkreis-Verlag), Heft 3 (1926), 32 págs. También en Symposion (Berlín), vol. 1 (1925-7), págs. 1-32.

1928. *Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik.* Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, vol. 6, págs. 86-88.

1931. **Die Stufen des Unendlichen.** Jena (Fischer), 19 págs.

1944. *David Hilbert and his mathematical work.* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50, págs. 612-654.

1946. *Mathematics and logic. A brief survey serving as a preface to a review of "The Philosophy of Bertrand Russell".* Amer. math. monthly, vol. 53, págs. 2-13.

1949. **Philosophy of mathematics and natural science.** Princeton, N. J. (Princeton University Press), x + 311 págs. Ed. inglesa revisada y aumentada, basada en una tr. del original alemán de 1927 por Olaf Helmer.

WHITEHEAD, ALFRED NORTH y RUSSELL, BERTRAND

1910-13. **Principia mathematica.** Vol. 1 1910, xv + 666 págs. (2.ª ed. 1925), Vol. 2 1912, xxiv + 772 págs. (2.ª ed. 1927). Vol. 3 1913, x + 491 págs. (2.ª ed. 1927). Cambridge, Inglaterra (University Press).

YOUNG, JOHN WESLEY

1911. **Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry.** Nueva York (Macmillan), vii + 247 págs.

ZERMELO, ERNST

1904. *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.* Math. Ann., vol. 59, págs. 514-516. También cfr. 1908a.

1908a. *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.* Ibid., vol. 65, págs. 107-128.

1908. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.* Ibid., págs. 261-281.

# SIMBOLOS Y NOTACIONES

## TEORIA DE CONJUNTOS


| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | 15 | $=$ | 20, 23 | $-$ | 21 | $\varepsilon_0$ | 429 |
| $\sim$ | 20 | $<$ | 21, 23 | O | 20 | $\omega$ | 428 |
| $\subset$ | 20 | $>$ | 21 | 0 | 23 | $\aleph_0$ | 23 |
| $\varepsilon$ | 20 | $\leqq$ | 23 | $+1$ | 23 | $\mathfrak{D}$ | 26 |
| $\notin$ | 20 | $+$ | 21, 26 | $\{a, b, \ldots\}$ | 20 | $\mathfrak{S}$ | 26 |
| $=_{\mathrm{df}}$, $\equiv$ | 20 | $\cdot$ | 21, 26 | $2^{\overline{M}}$ | 25 | $\mathfrak{U}$ | 25 |


## LOGICA MATEMATICA Y TEORIA FORMAL DE NUMEROS


| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vdash$ | 87 | $=$ | 71, 359 | 0 | 71 | $C$ | 398 |
| $\vdash^{x_1 \ldots x_n}$ | 97, 101 | $\neq$ | 76 | $^\circ$ | 101, 135 | C | 166 |
| $\rightarrow$ | 395, 398 | $\succ$, $\not\succ$ | 227 | $ab$ | 172 | $E_f^\varphi$ | 244, 295 |
| $\sim$ | 110 | $<$ | 76, 146 | $\{x\}_i$ | 228 | Eq | 360, 363 |
| $\cup$ | 71 | $>, \leqq, \geqq$ | 176 | A (x), B (x), ... | 78 | $\mathfrak{f}$ | 122 |
| & | 71 | $\prec$ | 228 | $a, b, \ldots$ | 71 | $F_v^{t_1 \ldots t_n}$ | 370 |
| V | 71 | $\mid$ | 179 | $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ | 106, 136 | $I$ | 398 |
| $\neg$ | 71 | $+$ | 71 | $\mathfrak{A}, \mathfrak{Cn}$, | 232, 253 | N | 449 |
| A | 71, 143 | $\circ$ | 71 | $f, g, \ldots$ | 241 | Pr | 179 |
| E | 71 | $'$ | 71 | $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ | 182 | $A$ | 398 |
| E! | 186 | $\mid$ | 228, 252 | $A_p(\boldsymbol{p})$ | 193 | t | 122 |


## FUNCIONES RECURSIVAS Y TEORIA INFORMAL DE NUMEROS


| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | 208, 303 | 0 | 29, 201 | $\lambda x_1 \ldots x_n$ | 41 | $p_i$ | 213 |
| & | 208, 303 | $'$ | 29, 201 | $\Lambda x_1 \ldots x_n$ | 311 | pd | 206 |
| V | 208, 303 | $+$ | 206 | $\mu y$ | 209, 255, 298 | Pr | 213 |
| $-$ | 208, 303 | $\cdot$ | 206 | $\nu y$ | 314 | $\mathbf{R}_q^1$, $\mathbf{R}^n$ | 205 |
| $(y)$ | 208, 305 | ! | 206 | $\Pi$ | 207 | rs | 189, 206 |
| $(Ey)$ | 208, 305 | $\dot{-}$ | 206 | $\Sigma$ | 207 | $S$ | 204 |
| $(E!y)$ | 208 | $\lvert a-b \rvert$ | 206 | $\Phi_n, \Phi_n^\Psi$ | 308 | $S_n^m$ | 310 |
| $\equiv$ | 208, 303 | $\mid$ | 189, 213 | F, G, ... | 216 | $\mathbf{S}_m^n$ | 204 |
| $\cong$ | 297 | $\lfloor a/b \rfloor$ | 189, 206 | C | 259 | sg, $\overline{\mathrm{sg}}$ | 206 |
| $=$ | 30, 211, 296 | $a*b$ | 213 | $C_q^n$ | 204 | t | 209, 301, 303 |
| $\simeq$ | 297 | $a^b$ | 206 | exp | 206 | $T_n, T_n^\Psi$ | 257, 266 |
| $<$ | 30, 39, 212 | $(a)_i$ | 213 | $\mathfrak{f}$ | 209, 301, 303 | $U$ | 255, 263 |
| $\leqq, >$ | 23, 37 | $\{z\}(x_1, \ldots, x_n)$ | 308 | lg | 213 | u | 295, 301, 303 |
| $\tilde{\varphi}$ | 214, 266 | $\beta(c, d, i)$ | 222 | $M(a, k)$ | 262 | $U_i^n$ | 204 |
| $\hat{x}$ | 280 | $\varepsilon y$ | 288 | min, max | 206 | $W_0, W_1$ | 280 |



Notaciones relativas a máquinas de Turing 322, 323, 324, 327, 328, 331

# INDICE ANALITICO


**Abel, N. H.** 38
**abierta, fórmula** 143
**abreviaturas** 76, 146, 365
**abstracta, teoría – de conjuntos** 20, 26, 43, 46
**abstracto, sistema** 34
**Ackermann, W.** 57, 190, 248, 250, 395, 416, 424, 430; Hilbert-– 71, 130, 164, 166, 169, 351
**activo (a):** situación, estado, etc. 323
**acto** 322, 323, 327, 330, 340, 342
**actual, infinito** 53, 56, 58, 164, 288
**adición,** cfr. suma
**alfabeto** 71, 345
**alcance** 74, 88, 143
**algebraico (a):** ecuación, número 16, 17
**algoritmo** 132, 274, 288, 292, 293, 294, 300, 301, 304, 314, cfr. problema de decisión, tesis de Church
**alternativa, negación** 134
**altura** 105
**ambiguo, valor** 40, 210
**ambiguos, axiomas** 36, 37, 386
**análisis** 37, 40, 48, 50, 56, 58, 61, 430; – de una deducción, etc. 87, 216
**analítica, teoría – de números** 38, 61
**anejas, variables** 136, 137
**anónima:** variable etc. 146, 148, 152
**antecedente** 396; reglas del – 398
**aplicación** 37, 74, 82
**aplicado, cálculo de predicados** etc. cfr. puro
**árbol, forma de** 104
**argumento de una función** 40
**Aristóteles** 52, 59, 63
**aritmética** 37, 40, 122, 174, 221; generalizada 227, 238, 252; teorema fundamental de la – 212; cfr. teoría de números
**aritmético(a):** clase 387; predicado 221, 223, 260, 266, 373; cfr. no-–
**aritmetización:** del análisis 38, 56; de la metamatemática 227, 252, 262
**asignación satisfaciente** 351
**asimetría** 176
**asociativas, leyes** 115, 174
**atenuación** (Gentzen) 397, 398
**atómico, acto,** cfr. acto
**autónimo:** símbolo etc. 72, 231, 243
**auxiliar, letra de función** 243
**axioma** 35, cfr. axiomático; – de un sistema formal 81
**axiomático(a):** aritmética 384, cfr. Peano; esquema – 81, 134; método – 35, 36, 57, 63, 379; teoría – de conjuntos 47, 57, 382; teorías 379, 391, 416, cfr. sistema formal

**Bachet** 53
**barbero, paradoja del** 44
**base** (inducción) 31, (definición inductiva) 238, (funciones recursivas primitivas) 206, 220, (recursión) 215, (recursivamente enumerable, conjunto) 313
**Behmann, H.** 391
**Beltrami, E.** 58
**Bereczki, I.** 262
**Bernays, P.** 47, 57, 65, 71, 382, 392, 416, 427, 444; Hilbert -– 56, 58, 61, 65, 71, 96, 104, 165, 166, 167, 168, 190, 196, 197, 208, 226, 227, 249, 291, 351, 355, 358, 363, 367, 374, 382, 391, 416, 424, 427, 367, 430, 447, 450
**Bernstein, F.** 21
**Berry, paradoja de** 45
**bi-valente, lógica** 135, cfr. tablas de verdad
**Black, M.** 33
**blanco, cuadrado en** (máquina de Turing) 322
**Bolyai, J.** 36
**Boole, G.** 64
**Boone, W. W.** 348, 409
**borradura** (máquina de Turing) 323
**Brouwer, L. E. J.** 49, 52, 57, 60, 61, 289, 442, 447, 457
**buena-ordenación** 26, 178, 428
**Burali-Forti, paradoja de** 43, 46, 51, 477
**Bussey, W. H.** 58

**cadena:** de equivalencias etc. 114; inferencial 110, 111
**calculable:** cfr. efectivamente, precisable
**calculación:** problema de la 132, 286, 287, cfr. tesis de Church; procedimiento de, cfr. algoritmo
**cambio de variables** 103, 145, 153
**campos** 394
**canónico, sistema** (Post) 290
**Cantor, G.** 15, 17, 20, 25, 26, 36, 43, 47, 51, 53, 429; método de la diagonal de – 17, 25, 191, 193, 242, 258, 290, 309; paradoja de – 43, 44, 46, 47, 48, 51, 477; teorema de – 25, 382
**cardinal, número** 15, 20, 49

**Carnap, R.** 51, 66, 83, 230
**casos, definición por** 212; inducción 175; prueba por 97, 99, 171, 178
**categóricos, axiomas** 36, 386, 388
**Cauchy, A. L.** 38
**Cayley, A.** 58
**cero** 23, 29, 71, 201, 206s; generalizado 227, 252
**cerrada (clausurada), fórmula** 143
**Cervantes** 46
**cinta** (máquina de Turing) 322, 326, 340
**clase,** cfr. conjunto
**clásico frente a intuicionista** (lógica, matemática, método) 52, 53, 55, 56, 57, 60, 65, 288, (lógica formal, sistemas formales) 100, 135, 396, 431, 442, 450, cfr. intuicionista
**clausura** 143
**cociente** 176, 189, 206, 261, 373, 472
**cocodrilo, dilema del** 46
**cognados, secuentes** 431
**combinatoria, definibilidad** 291
**comillas** 230, 243
**comparabilidad, teorema de** 26
**compatibles, sistemas formales** 392
**complemento de un conjunto** 21
**completamente definida, función,** etc. 295
**completo(a):** igualdad, equivalencia 297, 299, 303, 308; conjunto – (Post) 310; infinito – , cfr. actual; sistema formal cfr. completud.
**completud** (conceptos) 126, 130, 166, 182, 197, 244, 275, 277, 281, 295, 380, (resultados) 127, 129, 130, 134, 190, 269, 277, 351, 355, 356, 358, 360, 380, 381, 426, cfr. incompletud
**computable, función** 290, 291, 326, 327; 1/1, *w/s* 326; cfr. Turing
**concatenación** 73
**conclusión** (deducción) 87, 105, (implicación) 111, 133, (inferencia) 82
**condición** (máquina de Turing) 323
**condicional:** ecuación 142; interpretación 142
**conexidad** 176
**configuración** (máquina de Turing) 323
**congruentes, fórmulas** 145
**conjunción** (interpretación) 55, 71, 133, 451, (lógica formal) 71, 110, 115, 119, 130, 157, 166, cfr. introducción, conectivas proposicionales, tablas de verdad
**conjuntiva, forma normal** 30
**conjunto** 15, 20, 46; teoría de – 15, 20, 26, 46, 428, axiomática 46, 51, 382, intuicionista 56, 441, 462, relativización de la 384; lógica de predicados de teoría de conjuntos 165, 351, 360, 379, 391
**conmutativas, leyes** 115, 174
**consecuencia** 82, cfr. deducibilidad
**consiguiente** 396; reglas del – 398
**consistencia** (concepto) 57, 120, 127, 193, 197, 244, 271, 275, 277, 278, 281, 285, 295, 352, 380, 395, 427, 430, 447, (resultados) 124, 125, 162, 164, 165, 190, 277, 380, 382, 418, 423, 424, 426, 446, 449, 456, 461, cfr. segundo teorema de Gödel; – en un sistema 352; teorema de – 416, 418, 421, 427
**consistente, interpretabilidad** 392
**constante** 143; función – 204, 207; lógica, no lógica 392; variable mantenida – 95, 101, 134, 141, 168
**constructivo:** continuo 49; demostraciones de existencia 54, 56, 450, 457; infinito cfr. potencial; método 35, 57; ordinales 295; cfr. intuicionista
**contable, conjunto** 15, cfr. enumerable
**continuas, funciones** 28, 155
**continuo** 27, 38; constructivo 49; problema del – 26, 47 (Gödel); cfr. análisis
**contracción** (cuantificadores) 260, (Gentzen) 398
**contradicción** 116, cfr. consistencia
**contraposición** 111
**contributoria, deducción** 244
**convergencia** 39, 155
**corrección,** cfr. consistencia
**correspondencia** 15, 20, 40, 234, 383
**corte** (Gentzen) 398, 407
**creativo, conjunto** (Post) 313
**cretense, el mentiroso** 46, cfr. Epiménides
**cuadrado** (máquina de Turing) 322, 342s
**cuantificadores** 74, 76s, 143, 153s, 156, 166; contracción de – 260s; F- 370; cfr. ligado, introducción, cálculo de predicados, predicados recursivos
**Curry, H. B.** 146, 291, 413, 414, 441
**curso-de-valores:** función 214, 266; inducción 31, 181; recursión 213, 219, 262

**Church, A.** 41, 96, 169, 223, 255, 274, 289, 290, 292, 295, 344, 388, 390, 391, 517; teorema de – 275, 287, 344; tesis de – 274, 285, 287, 288, 300, 318, 320, 340, 344, 457, conversa de la 274, 289

**dada, letra de función** 243
**Dantzig, D. van** 44, 447
**Davis, M.** 287
**débil:** igualdad, sentidos, tablas, etc. 296, 303; eliminación – de negación 99
**decidible:** fórmula cerrada 182, 188; cfr. efectivamente, numeralmente, resoluble, in-
**decimal, notación** 17, 29, 38, 343, 344
**decisión, problema de la** (conceptos) 132, 274, 285, 286, 287, 344, 388, 391, (resultados) 132, 190, 274, 285, 286, 344,

345, 348, 366, 381, 388, 393, 394, 426, 433; casos especiales de la 391; cfr. tesis de Church, grado, reducibilidad
**decisión, procedimiento de** cfr. algoritmo
**Dedekind, R.** 24, 38, 49, 51, 53, 224; cortaduras de – 38, 43, 49, 56
**deducción** (formal) 86, 93, 104, 229, 242, 254, 265; dada, resultante 93; esquema de – 87; teorema de – 89, 93, 96, 134, 168; cfr. variación
**deducibilidad** 87, 88, 242, cfr. deducción
**deductivo:** método 62, 63; reglas 80
**definido(as):** nociones 36; valor 295, 296
**Dekker, J. C. E.** 473
**De Morgan, A.** 64, 116
**demostrable, fórmula** 81, 83
**demostración** (formal) 66, 67, 83, 84, 132, 229, 234, 398, 399, (informal) 84; esquema de – 84; teoría de la – 59; cfr. metamatemática
**demostrativos, hilos** 104
**dependencia** (deducción) 94, 101, (función) 203, 207, 320
**derivadas, reglas** 86, 366, cfr. introducción
**descarga** 93, 170
**Descartes, R.** 27, 58
**descendente, inducción** 181, 429
**descripción** 186; eliminabilidad de la 366, 367; indefinida 313
**designación** 72, 230, 231
**desigualdades** 115, 176, 184, 185, 208, 209, 212
**diagonal, método de la** cfr. Cantor
**diccionario** (semi-grupo) 345
**diferencia** (números) 206, (conjuntos) 21
**Diofanto** 53
**directa:** cláusula 29, 238; regla 86, 94
**disjuntos, conjuntos** 21
**disyunción** (interpretación) 55, 71, 133, 208, 451, (lógica formal) 71, 111, 115, 119, 129, 130, 157, 166, 167, 178, cfr. introducción, conectivas proposicionales, tablas de verdad
**disyuntiva, forma normal** 130, 131
**distributivas, leyes** 115, 174
**divisibilidad** 179, 189, 213, 222
**Dixon, A. C.** 44
**doble:** base 181, 215; negación 97, 116, cfr. sistemas formales intuicionistas; recursión 250
**dominio** 20, 40; (sistema, evaluación) 33, 36, 37, 159, 162, 164, 351, 360, 361, 384, 417
**dominios diversos, cálculo de predicados de** 169, 378
**dual:** fracción, etc. 26, 27, 38, 326, 344; converso- 120, 158; cfr. dualidad
**dualidad** (lógica) 119, 120, 158, 261, 398, (geometría proyectiva) 59
**ecuación** 241, 253; sistema de –es 241, 253, 254
**efectiva, interpretación** 417
**efectivamente:** función – calculable, predicado – decidible 273, 274, cfr. tesis de Church, problema de la decisión; conjunto – enumerable de fórmulas 359; fórmula – verdadera 418
**Einstein, A.** 61
**elección, axioma de** (Zermelo) 56, 355
**elemental:** sistema axiomático 379, 381, 382; axiomas 379; conjunción, etc. 130; función (Kalmár) 261; teoría – de números 38, 56, 71; predicado 260, 266, (Kalmár) 261
**elemento de un conjunto** 20
**eliminabilidad** 364, 365, 377, 378, 458, 462
**eliminación:** leyes 115; de símbolos lógicos 97, cfr. introducción; relaciones de 365, cfr. eliminabilidad; teorema de 407, 413, cfr. Gentzen
**emparejamiento de paréntesis** 32, 33, 74, 75
**entero** 15, 16, 59, 394, 475, 477
**entidad** 227, 228, 231, 237, 238, 252, 253
**entrada** (máquina de Turing) 331
**enumerable, conjunto** 15, 383, 384, cfr. enumeración, recursivamente
**enumeración** 15, 16, 383, 384; efectiva 359; teorema de – 257, 308, 309
**Epiménides, paradoja de** 46, 48, 51, 191, 450
**equivalencia** (nociones) 20, 110, 208, 290, 297, 303, 345, 348, 361, 365, (lógica formal) 111, 113, 144, 152, 153, (recursividad) 211, 298, 305; clases de – 20, 361; relación de – 361, 382; teorema de – 21
**escudriñado:** cuadrado, símbolo 322, 325
**esquema** axiomático, etc. 81, 83s, 87, 134, 216; recursivo 203, 216s, 244s, 251s, 255, 296
**estado** (máquina de Turing) 323, 327, 340
**estricta, implicación** 135, cfr. 133
**estructural:** inferencia 413; reglas 397s, 431
**Eubúlides, paradoja de** 46, cfr. Epiménides
**Euclides** 36, 57, 63, 131, 179; teorema de – sobre primos 179, 213, 262; cfr. geometría
**evaluación** (efectiva) 122, 159, 360, 417, 426, 449, (no efectiva) 164, 351, 360s; R– 462
**exclusiva:** disyunción 133; predicados, relaciones 21, 212
**exhaustivos:** predicados, relaciones 21
**existencia** 54, 71, 208, 450, 457; única 186, 208, 367; cfr. introducción, cálculo de predicados, cuantificadores
**existencial:** cuantificador 74; cfr. actual, axiomática formal

**explícita:** definición 203, 365; ocurrencia, etc. 148, 151
**exponentes** 206, 213
**exportación** 110
**extensión** (función) 294, 307, (sistema) 88, 93, 94, 126, 282, 283, 364, 365, 384, 392, 461
**externa, inconsistencia** 197
**extrema, cláusula** 29, 238

**falsedad** 121, 124, 449, cfr. verdad
**F-cuantificador** 370, 371
**Fermat, "último teorema" de** 53, 55, 133, 391,
**f-exenta, transformación** 370, 375, 377
**Feys, R.** 135
**final, fórmula** etc. 87, 105, 242
**finitistas, métodos** 65, 430, 448
**finito(a):** axiomatizabilidad 392, cfr. 383, 384; cardinal 23, 49; dominio 159, 168, 360, 391, 417; extensión 392; secuencia 16, 72; conjunto 23, 24; cfr. finitista
**Finsler, P.** 197
**formación, reglas de** 73
**formal, axiomática** 36, 47, 48, 57, 63, 379
**formal, calculación** 182, 222, 223, 240, 269, 292
**formal, deducción** 86
**formal, demostración** 66, 67, 82, 83, 84, 229, 233, 234, 273
**formal, expresión** 72
**formal, implicación** 133
**formal, inducción** 170, cfr. inducción
**formal, inferencia** 81
**formal, matemática** 57, 64
**formal, sistema** (concepto) 64, 71, 227, 243, 272, 278, 279, 293, 379, 390, 392, (ejemplos) cfr. cálculo de predicados, cálculo proposicional, eliminabilidad, Gentzen, teoría de números; – para un predicado de teoría de números (Tesis II y conversa) 274, 275, 277, 293, 364; cfr. formalismo, formalización
**formal, teorema** 83, 84
**formal, teoría** 64, 67
**formales, objetos** 64, 65, 66, 72, 84, 229, 230, 231, 243
**formales, símbolos** 71, 230, 243
**formalismo** 49, 51, 62, 190, 191, 439; un – cfr. sistema formal; de teoría de números, cfr. teoría de números; – de funciones recursivas 241, 252
**formalización** 57, 62, 71, 195, 196, 226, 272, 357, 379, 380; cfr. formalismo, sistema formal
**fórmula** 64, 73, 74, 132, 228, 229, 232, 233, 395, 396
**fracción** 16, 59, cfr. decimal, dual
**Fraenkel, A.** 26, 47, 51, 383, 465
**Frege, G.** 20, 49, 64, 87, 230
**fuerte:** introducción, etc. 103; sentidos, tablas etc. 303, 304
**función** 40, (notación) 40, 41; como una – 320; letra de – 241, 243, 244, 252, 253, 254; símbolo de – 71, 241, 363, 366, 367, 375, 417
**funcional** 216, 217, 251, 296, 327
**fundamental:** definición inductiva 237, 238; teorema – de la aritmética 212
**fusión** 404, 407; fórmula de – 404

**Galileo, "paradoja" de** 15, 24, 52
**Gauss, C. F.** 34, 38, 53, 56, 60, 212
**generalidad** 54, 71, 208, 450; interpretación de – 142; cuantificador de – 74; cfr. cálculo de predicados, cuantificadores, introducción
**generalizada, aritmética** 227, 238, 252, 265
**genético, método** 35, 51
**Gentzen, G.** 43, 71, 89, 99, 135, 208, 395, 399, 407, 413, 416, 428, 429, 430, 431, 444; demostración de consistencia de – para la teoría de números 428, 447, 448; Hauptsatz (teorema de forma normal o de eliminación) de – 395, 403, 407, 414, 427, 428, 430, 441, 460; extendido 414, 416, 427; sistemas de tipo – 395, 414, 429, *G*1 396, *G*2 404, *G*3 431, *G*3*a* 432
**geometría** (analítica, cartesiana) 27, 58 (euclidiana, no euclidiana) 27, 36, 47, 58, 59, 386, 461, (fundamentación) 36, 63, 427, (proyectiva) 59, 394
**Glivenko, V.** 442
**Gödel, K.** 26, 47, 51, 135, 190, 196, 197, 198, 205, 208, 210, 221, 222, 223, 227, 251, 288, 290, 291, 295, 351, 355, 358, 359, 360, 382, 392, 436, 443, 444, 446, 461; función $\beta$ de – 222, 224; numeración de – 192, 227, 234, 252, 253, 257, 264, 265, 271, 274, 285, 292, 344, 347, 355, 359, 387, 390, 449, 451, 458, cfr. fundaciones recursivas, Turing, reducción de – sistemas clásicos a intuicionistas 196, 443, 444, 446, 461; teorema de completud de – 351, 355, 358, 360, 380, 384, 386, 391; teorema (de incompletud, de indecidibilidad) de – 191, 193, 196, 237, 251, 262, 277, 280, 383, 386, 388, 461, forma generalizada del 275, 280, 386, 387, forma de Rosser del 194, 280, forma simétrica del ($W_1$, $W_2$) 280, 282, 287, 301, 422, 463; teorema segundo de – (sobre demostraciones de consistencia) 196, 278, 428, 429, 430, 448, 450
**Gonseth, paradoja de** 44

**grado de insolubilidad** 286, 287, 310, 348, 390
**grupo** 37, 394; semi– 344, 347, 348

**Hall, M.** 348
**Hasenjaeger, G.** 359
**Hausdorff, F.** 26
**Henkin, L.** 351, 388, 442
**Herbrand, J.** 96, 146, 169, 250, 251, 295, 395, 414, 416
**Hermes, H.** 227
**Heyting, A.** 55, 57, 60, 135, 157, 437, 441, 447, 457, 464
**Hilbert, D.** 35, 36, 49, 57, 59, 60, 61, 64, 65, 132, 248, 289, 374, 382, 430; – Ackermann cfr. Ackermann; – Bernays cfr. Bernays; sistema de tipo – 395
**hipótesis de la inducción** 31

**ideales:** elementos 59; enunciados (Hilbert) 59, 198, 427, 460, 461
**idempotencia, leyes de** 115
**idéntico:** acto, esquema, etc. 245, 327, 342, 415; ecuación, verdad etc. 124, 125, 142, 162
**identidad,** cfr. igualdad, función de – 204; principio de – 110
**igualdad** (nociones) 20, 23, 30, 124, 162, 227, 297, (lógica formal) 172, 184, 359, 368, 381, (recursividad) 210, 298; axiomas de 359, 360, 363, 381, 382; – y fórmula de letras predicativas 359, 360
**imaginarios** (complejos), **números** 59, 60, 427
**implicación** (interpretación) 55, 71, 133, 135, 208, 447, 450, 451, (lógica formal) 71, 110, 111, 115, 120, 146, 147, 158, cfr. conectivas proposicionales, introducción, tablas de verdad
**importación** 110
**impredicable** (paradoja) 44
**impredicativa, definición** 48, 50
**impresión** (máquina de Turing) 323
**impropio, subconjunto** 20
**inclusiva, disyunción** 133
**incompletamente definida, función** 295
**incompletud** (resultados) 193, 194, 197, 198, 251, 275, 281, 282, 374, 375, 384, 386, 458, cfr. teorema de Gödel
**inconsistencia,** cfr. consistencia
**indecidibilidad esencial** 392
**indecidible:** fórmula 182, cfr. teorema de Gödel; sistema 392, cfr. problema de decisión
**indefinida, descripción** 313, 314
**independiente, variable** 40
**índice en una enumeración** 15
**indirectas, demostraciones** 54, 56, 447
**individuo** 37, 50, 138, 169; símbolos de – 71, 153, 363, 366, 377, 378, 417; variables de – 138
**inducción** 31, 49, 51, 92, 170, 181, 228, 238, 251, 384, 386, 388, 428, 447; axioma de – 31, 386, 388; casos de – 175; definición por – 201, 262, cfr. recursión; número de – 31, 429; paso de – 31; postulado (o esquema) de – 170, restringida 190, 191, 424, generalizada 428; predicado (o proposición) de – 31, 386, 430; regla de – 170; variable de – 31
**inductiva, definición** 29, 237, 279
**inferencia** 82; reglas de – 63, 82
**infinito,** axioma de 51, 382; puntos en el – 59; problema del – 51, 52; cfr. actual, potencial
**infinito(a):** cardinal 23, 24; descenso 181, 429; secuencia 18, 19, 27; conjunto 23, 24
**informal:** 47, 65, 66, 71, 85, 170; axiomática 36, 47, 57; inducción 170; matemática 64, 71; presentación 170; simbolismo 208; teoría 67
**inmediata:** consecuencia 83, 233, 254; dependiente 203
**inicial:** estado, etc. 323; 331; función 203
**insolubilidad** cfr. grado
**insoluble, problema** 274, 285, 286, 344, 388, 392, cfr. problema de decisión, no recursivo
**intercambio** 118, (Gentzen) 398; – de premisas 110
**interdeducibles, fórmulas** 143, 146, 359, 391
**interpretación** 60, 66, 71, 122, 126, 133, 137, 165, 182, 197, 276, 277, 379, 386, 429, 430, 448, 450; – de variables 139, 141, 142, 210
**intersección de conjuntos** 21, 26
**introducción y eliminación de símbolos lógicos** 97, 100, 104, 140, 141, (Gentzen) 397, 405, 431; eliminación débil de la negación 99; fuerte 103; cfr. variación
**intuicionismo** 49, 51, 57, 60, 62, 65, 288, 289, 446, 460, 461, cfr. intuicionista
**intuicionista:** lógica informal, matemática, significados 52, 257, 266, 288, 289, 301, 305, 446, 447, 450, 463; lógica formal, sistemas formales 55, 56, 100, 111, 112, 116, 117, 135, 154, 156, 157, 178, 180, 181, 373, 396, 397, 399, 431, 436, 437, 438, 442, 452; teoría de conjuntos – 57, 441, 462
**intuitivo,** cfr. informal, intuicionismo
**inversas, leyes** 174, 175
**Iongh, J. J. de** 441, 447
**irracionales, números** 27, 39, 59

**irreflexividad** 176
**irrefutable, fórmula** 351, 380, 381
**isomorfos, sistemas** 34

**Jaśkowski, S.** 96, 135

**Kalmár, L.** 130, 261, 262, 466
**Kemeny, J. G.** 388
***k*-identidad** 162, 167, 360
***k*-igualdad** 162, 360
**Kleene, S. C.** 87, 130, 239, 251, 255, 256, 257, 258, 259, 262, 264, 268, 275, 277, 279, 280, 284, 290, 292, 294, 295, 303, 305, 317, 319, 321, 344, 414, 437, 441, 452, 456, 459, 461, 462, 463
**Klein, F.** 58
***k*-ple recursión** 250
***k*-predicativo, cálculo** 166, 167
***k*-proposicionales, fórmula de letras** 166, 167
***k*-recursiva, función** 250
**Kreisel, G.** 387
**Kronecker, L.** 29, 51, 291 ($\delta^x_y$), 447
***k*-transformación** 167, 168
**Kuznékov, A. V.** 264

**lambda-definibilidad** 290, 344
**Langford, C. H.** 51, 135, 303
**lateral, fórmula** 398
**Leibnitz, G. W. v.** 49, 64
**lenguaje** 64, 71, 229, 230, 243
**Lewis, C. I.** 133, 135, 303
**libre** 76, 232, 233; con respecto a 79, 232, 233; sustitución 80, 148; en las posiciones de sustitución 79; término 79, 233, 369; variable 76, 141, 153
**ligado(a):** cuantificadores –s 184, 188s, 208, 211, 260s, 298, 305, 423, 463; término – 369; variable – 76, 145; cfr. libre
**límite** 40, 315
**lineal, orden** 37
**Liouville, J.** 18
**literal:** fórmula en =, $P_1, ..., P_s$ 359; *m*-tuplo 127, 128; en un semigrupo 344
**Lobatchevsky, N. I.** 36, 58
**lógica** 51, 52, 55, 56, 63, 71, 80, cfr. cálculo de predicados, formalización, sistema formal, de teoría de conjuntos
**logicismo** 49, 62, 169
**lógico(a):** constante 392; función 159, 160, 351; noción 36, 37, 63; operador 74, 75; reglas 396, 397; símbolo 71
**logístico, método** 64, cfr. logicismo
**Löwenheim, L.** 132, 355, 384, 391; teorema de – (o de –-Skolem) 355, 358, 360, 361, 383, 384, 385, 391
**Lukasiewicz, J.** 135, 303
**Lyndon, R.** 477

**MacLane, S.** 146
**Mannoury, G.** 44, 447
**máquina,** cfr. Turing
**marca** (máquina de Turing) 324, 343
**Markov, A. A.** 264, 344, 345, 348
**matemática:** inducción cfr. inducción; lógica cfr. sistema formal
**material:** axiomática 36, 47, 57; implicación 133
**mayor, premisa** 242
**McKinsey, J. C. C.** 135
**medio, secuente** 414
**memoria** (máquina de Turing) 322, 330, 331, 341, 342
**menor, premisa** 242
**mentiroso, paradoja del** 45, 46, cfr. Epiménides
**Méray, C.** 38
**meta-** 65
**metamatemática** 59, 62, 64, 65, 66, 71, 80, 81, 84, 85, 165, 166, 381; aritmetización de la – 227, 253, 265, 357; cfr. formalismo, sistema formal
**metamatemático(a):** letras, símbolos, variables 64, 72, 134, 230, 243; definiciones, funciones, predicados, recursión 73, 80, 231, 237, 252, 253, 265; demostraciones, inducción, teoremas 84, 170
**metateoría** 64, 67
**miembro de un conjunto** 20
**mínima cota superior** 39, 49
**mínimo número:** operador ($\varepsilon$) 288, 294, 373, ($\mu$) 208, 209, 211, 255, 264, 270, 293, 294, 296, 298, 299, 313, 314, 317, 373; principio de – 178, 186, 459
**modal, lógica** 135
**modelo** 34, 57, 379, 380, 416, 417, 427
**modus ponens** 98
**Mostowski, A.** 259, 262, 268, 271, 277, 291, 387, 388, 392, 394, 442, 479
**movimiento** (Turing) 323, 324, 342, 343
**multiplicación** cfr. producto
**mutuamente exclusivas, relaciones** 21

***n*-aria, relación** 138
**natural, número** 15, 23, 29, 49, 50, 53, 54, 55, 201, 384, 388, 476, cfr. teoría de números
**negación** (interpretación) 55, 71, 133, 208, 447, 451, (lógica formal) 71, 99, 100, 111, 118, 157, 366, cfr. conectivas proposicionales, introducción, intuicionista, tablas de verdad
**Nelson, D.** 196, 207, 368, 437, 441, 452, 459, 461, 462

**Neumann, J. von** 20, 47, 57, 60, 61, 134, 190, 382, 392, 395, 416, 424
**nido, recursión en** 248
**no-aritméticos, predicados** 262, 267, 287, 430, 450
**no-constructivas:** demostraciones 54, 56; lógica 291, 387
**no definidas, nociones** 36, 62
**no-enumerables, conjuntos** 16, 17, 26, 165, 381, 382
**no-euclidiana, geometría** cfr. geometría
**no-intuicionistas, métodos** 53
**no-recursivos(as):** funciones 294; predicados 259, 283, 287, 301, 344
**no-redundante, demostración** 432
**nociones** 36, 37
**nombre** 72, 230, 243
**nominal, forma:** 136, 139; interpretación 139, 210; ocurrencia 149; – prima 152; reemplazo de – 153; variables de – 136, 137, 139
**normal, forma:** conjuntiva etc. 129, 130, 131; – para demostraciones (Gentzen) 395, 407, 413; – para funciones recursivas 263, 267, 299; Skolem 391; cfr. prenexa
**normales, sistemas** (Post) 290
***n*-tuplo** 16, 27, 40
**numerable, conjunto** 15, cfr. enumerable
**numeral** 166, 182, 232, 233, 235, 241, 254, 255; generalizado 418
**numeralmente:** fórmula – decidible 183, 271, 272; predicado expresable – 183, 187, 192, 225, 271, 272; función – representable 187, 224, 270, 271, 272
**número** 15, 17, 20, 23, 24, 26, 29, 37, 59, 428
**número, variable de** 71, 241
***n*-valente, lógica** 135, 168, (para $n = 3$) 301, 303, 462

**objeto** 33, 138; función como un – 320; lenguaje – 65, 66; sistema de –s 33; teoría – 64, 67; variable – 138; cfr. objetos formales
**observación** (Turing) 322, 341, 343
**ocurrencia** 72, 147, 148, 396
**omega-completud** 197
**omega-consistencia** 193, 197, 277
**operación** 40, 323
**operador, formal** 74; lógico 74
**orden** 37, (cardinales) 20, 21, (números naturales) 23, 24, 30, 176, (reales) 38, 39; primero, segundo, superior 169, 379; dentro de un tipo 50
**ordinales** 26, 428; – constructivos 294, 295
**ordinarias, nociones** 36, 37, 62, 63
**oscilación, función de amplia** – 264

**Pablo** (el apóstol) 45
**palabras,** Post 346; problema de las – 345, 348
**paradojas** 43, 47, 48, 51, cfr. Epiménides, Galileo, Richard, Skolem, Zenón
**parámetros** 41, 143; – en la recursión 202, 218, 309, 312
**parcial, función** 295, 300, 301, 308, 309, 317
**parcial, orden** 37, 104
**parcial, predicado** 296
**parcial, recursivo(a):** función 296, cfr. función recursiva; funcional 296; predicado 297; esquema 296
**paréntesis** 32, 71, 74, 230
**Pasch, M.** 63
**pasivo:** estado etc. 323, 331
**Peano, G.** 30, 49, 64; axiomas de – 30, 35, 174, 386, 388, (generalizados) 228, cfr. inducción
**Peirce, C. S.** 64, 479
**Péter, R.** 207, 214, 248, 249, 250, 356, 428
**Pitágoras** 39, 53, 63
**Poincaré, H.** 38, 48, 51
**Poncelet, J. V.** 59
**positivo, entero** 15, 477
**Post, E.** 130, 135, 260, 264, 268, 274, 279, 280, 286, 290, 292, 310, 313, 322, 326, 342, 344; teorema de – 268, 356, 362; palabra de – 346
**postulacional, método** 35, cfr. axiomático
**postulados** 35; – de un sistema formal 80, 81; listas de – 82, 396, 431, 432; respectivos 97, 413
**potencial:** infinito 53, 65, 72, 322, 327; recursividad 294, 300, 301
**Prantl, C.** 46
**precisable, función** 269, 272, 290, 291, 292, 293
**predecesor** 206; generalizado 228
**predicado** 136, 137, 138, 209
**predicado, símbolo de** 71, 363, 379, 417
**predicados, cálculo de** 82, 95, 96, 97, 136, 351, 388, 389, 390, 391, 395, 431, 432, 437, 442, 444, 445, 460, 461; – con igualdad 359, 367, 368, 375, 381, 388; superior, etc. 169, 198, 291, 386, 387, 388; – interpretado en un dominio finito 159, 167, 168, 360, 361, 390, 417; – uni-posicional 359, 391; – con sustitución postulada 168, 359, 390; subsistemas de – 104, 146, 313; cfr. cuantificadores, de teoría de conjuntos
**predicados, inferencia de** 414
**predicados, lógica de** cfr. de teoría de conjuntos
**predicativa, interpretación** 139, 210
**predicativa(s), letra(s)** 136, 168; fórmula de – 136, igualdad y – 359, 360, en 148, *k*-166, – con numerales 352; cálculo

proposicional 107; interpretación de –s 139, 159, 164, 379
**predicativa, variable** 168, 169, 359, 391
**premisa** 82, 83, 242
**prenexa:** forma, fórmula 158, 260, 261, 351, 391, 418, 419, 449, 463
**preponderancia** (operadores lógicos) 75
**primitiva, recursión** 203, 205
**primitivo(a), recursivo(a):** derivación 207; descripción 203; función 203, 206, 207, 211, 215, 216; predicado – 210, 218; esquema – 216, 217, 220; verdad 426
**primitivas, nociones** 36, 62
**primo(a):** fórmula etc. 109, 110, 152, 188, 369, 443; número etc. 179, 212, 213, 221, 261
**primos entre sí, números** 221
**principal:** rama 244; forma normal disyuntiva etc. 129, 130; ecuación – 244; f-exenta, transformación 370, 375, 377; fórmula – 398; letra de función – 243
**procedimiento** cfr. decisión, evaluación
**producto** (números naturales) 174, 187, 188, 190, 206, 221, 261, 366, 394, 472, (conjuntos) 21, 26; – finito 207, 208, 260; – lógico 168
**profundidad** 113, 144, 173
**propiedad** 50, 137
**propiedades generales de** $\vdash$ 88, 102, 398
**propio:** emparejamiento 32; subconjunto 20
**proposicional, cálculo** 82, 89, 97, 106, 178, 366, 397, 431, 436, 442, 453, 460; – con sustitución postulada 134; subsistemas de 104, 146, 413
**proposicional, función** 137, 209
**proposicional, inferencia** 413s
**proposicional(es), letra(s)** 106, 134, 167; fórmula de – 106, en 107, *k*- 167, con numerales 352
**proposicional, variable** 134
**proposicionales, conectivas** 74, 209, 302 (recursividad) 209, 210s, 219, 298, 305; cfr. cálculo proposicional, tablas de verdad
**proyectiva, geometría** 59, 394
**puntos, conjunto de** 20, 28
**puro(a):** teoría de números 38; cálculo de predicados 137, con igualdad 359; cálculo proposicional 107; demostración de variable – etc. 405

**Quine, W. V.** 51, 223, 230, 243

**racionales, números** 16, 37, 39, 394
**rama** 105; principal 244
**Ramsey, F. P.** 51
**rango** 40; – de definición 295, 300
**Rasiowa, H.** 351
**reales:** funciones 28; números 17, 27, 38, 49, 57, 326; enunciados (Hilbert) 59, 197s, 427, 460
**realizabilidad** 451s; P- 462
**realización:** función de 452; número de 451
**recursión** 201, 205, 213s, 215, 216, 219, 231, 237, 239, 247, 252, 317s, (equivalentes aritméticos) 223, (equivalentes elementales) 261; teorema de – 319, primer teorema de – 315, 320, 338; cfr. función recursiva
**recursiva, clase** 279
**recursiva, realizabilidad** cfr. realizabilidad
**recursivamente enumerable, conjunto** 279, 283, 290, 310s, 313, 359
**recursivas, funciones** 203, 216, 250, 251, 290, 293s, 295; aplicaciones de 201, 237, 272, 280, 285, 286, 295, 344, 356, 384, 388, 392, 451; – definidas recursivamente por un sistema de ecuaciones 244, 251s, 295s, por un número (números de Gödel de) 264, 267, 289, 299, 305, 308, 319, 320, 374, 458; formalismo de las 241, 252; forma normal de las 263, 267, 299; – en el formalismo de la teoría de números (incluyendo la teoría de la eliminabilidad) 224, 269, 366, 373, 423, 461s; – de cero variables 207, 220, 251; cfr. tesis de Church
**recursivo, conjunto** 279
**recursivo, esquema** 217, 252, 296
**recursivo, funcional** 217, 251, 296
**recursivo(a), general:** clase 279, 280; función 250, 251, cfr. función recursiva; funcional 251, 252, interpretación 417, predicado 252, cfr. predicado recursivo; esquema 251, 252; conjunto 279, 280; verdad 418, 449, 463
**recursivos, predicados** 210, 217, 252, 297; aplicaciones de cfr. funciones recursivas; – bajo cuantificación 257, 267, 305
**reducibilidad, axioma de** 50; – del problema de decisión 286, 391; 1–1 311; cfr. grado
**reductio ad absurdum** 25, 86, 97
**redundantes:** axiomas, postulados 366
**reemplazabilidad de símbolos de función por símbolos predicativos** 375, 377, 381
**reemplazo** 112, 144, 153, 172; – en todas las ocurrencias 107, 112, 114; – en el formalismo de funciones recursivas 242, 251, 254; lemas para el – 113, 144, 173; propiedad de igualdad del – 173, 360, 364, propiedad de la equivalencia de – 114, 145, 153, cfr. 146; propiedades especiales del – 172; teorema de – 113, 144, 173
**reflexivas, leyes** 20, 111, 172, 360, 364
**refutable, fórmula** 182
**regular, tabla** 302

**relación** 137s
**relativa, recursividad** 207, 210, 216, 217, 251s, 264, 272, 295s, cfr. función recursiva, uniformidad
**representación:** de un sistema 34; en una cinta de una máquina de Turing 325, 329, 340, 343
**representante:** función 19, 210; predicado 185, 268, 289
**residuos** 34, 35, cfr. resto
**resoluble, predicado** 269, 271, 272, 278, 291
**resto** 176, 190, 206, 221, 373
**restricción sobre variables** 396s
**restringido:** esquema de inducción 190, 424, 427; cálculo de predicados 169
**resultante, deducción** 93
**retículos** 394, 442
**Richard, paradoja de** 44, 48, 50, 309
**Robinson, J.** 223, 291, 394
**Robinson, R. M.** 184, 207, 249, 271, 392, 394; sistema de – 184, 190, 225, 270, 278, 282, 283, 287, 291, 377, 388, 392, 394, 422, 424
**Rose, G. F.** 462, 472
**Ross, J. D.** 190
**Rosser, J. B.** 87, 135, 168, 194, 258, 280, 284, 290, 291, 367, 388, 392, 473
**Russell, B.** 20, 44, 48, 49, 50, 51, 64, 367; paradoja de – 44, 46, 48, 51
**Rüstow, A.** 46
**Ryll-Nardzewski, C.** 384

**salida** (máquina de Turing) 323, 331
**satisfacibilidad** 162, 164, 351, 360s, 380, 391; junta 352
**satisfaciente, asignación** 351
**Schmidt, A.** 169
**Schönfinkel, M.** 41, 291
**Schröder, E.** 64, 120, 132
**Schütte, K.** 430
**secuencia** 16, 18s, 26, 29, 39, 72
**secuencial, forma** 104
**secuente** 396
**Sheffer, barra de** 134
**semejantes, conjuntos** 428
**significado** (matemática clásica) 60, 430, (notación funcional) 40, 41, 209, 210 (simbolismo lógico) 208, cfr. interpretación
**signifies** 447
**Sikorski, R.** 351
**simbólico, lenguaje** 63; espacio – 340, 342
**simbolismo lógico** 71, 208
**simbolización** 63
**símbolo,** uso frente a mención 66, 72s, 230s, 242s; – escudriñado 322; de máquina de Turing 322, 324, 326, 327
**simétricas, leyes** 20, 111, 172, 360, 364
**simple:** completud 182, 277, 281; consistencia 121, 271, 277, 281, 285s; cfr. 352
**simple, f-término** 369
**simultánea:** inducción 181; recursión 216, 232, 249; satisfacibilidad 352
**sintáctico, lenguaje** 66
**sistemas:** de ecuaciones 241, 253; de objetos 33, 57, 379, 392, 416; cfr. sistema formal
**situación** (máquina de Turing) 323
**Skolem, T.** 47, 250, 262, 355, 358, 383, 384, 387, 388, 391, 428; forma normal de – 391; paradoja de – 383
**standard, posición** 325
**subconjunto** 20, 383; conjunto de –s 19, 25, 382, 383
**subfórmula** 403; propiedad de la 404
**subsidiaria, deducción** 93, 101; regla de – 86, 93, 120, cfr. dependencia, variación
**subsistema** 89, 392, cfr. extensión; –s del cálculo de predicados 104, 112s
**sucesor** 23, 29, 49, 71, 201, 204, 206; generalizado 227, 252
**suma** (números naturales) 174, 187, 206, 221, 260s, 395, (conjuntos) 21, 26; finita 207, 260s; lógica 168
**superior, cota** 39
**supuestas, fórmulas** 86, 170; funciones 207, cfr. funcional
**sustitución** 78, 112; definición por – 204, 210s; – en el formalismo de funciones recursivas 242, 251, 254; libre 80, 148; – de variables individuales 100, 140, 152, 232s, 237; notación de – 78; – de letras predicativas 147, 148, 151, 168s, conversa 152; – de letras proposicionales 107, 134, conversa 109

**tabla,** función 42; función lógica 160s; fórmula de letras predicativas 160s; máquina de Turing 324; cfr. verdad
**Tarski, A.** 96, 135, 391, 392, 393, 394, 450, 477
**técnicas, nociones** 36, 62
**teorema,** formal 81, 83, 84, 379s, 381s, cfr. fórmula demostrable; informal, metamatemático 84; esquema de – 84
**teoría** 60, 61, 62, 67, 198, 391; formal 64, 67; informal 66, 67; meta- 64, 67; – objeto 64, 67; – de la demostración 59, cfr. metamatemática; cfr. axiomática, teoría de números
**teoría de números** 37, 56; formal 71, 82, 95, 96, 170, 223, 232, 237, 269, 278, 282, 285, 286, 356, 365, 366, 372, 373, 377, 384, 442, 444, 445, 449, 450; – con esquema de inducción restringida 190, 424, 428; sin • 190, 366, 426; cfr. analítico, sistema de Robinson; fórmula

de – 106, función de – 18, 27, 28, 41, 45, 185, 201, 373, 457; predicados de – 209, 351
**tercero excluido (tercio excluso)**, ley de – (informal) 52, 56, 60, 164, 183, 258, 270, 271, 289, 301, 355, (formal) 116, 117, 129, 130, 178, 179, 180, 434, 437, 438, 459, 460, 461
**terminal**: estado etc. 323, 331
**término** 73, 136s, 166, 185, 228s, 241, 352, 359, 363, 378, 396, 417; libre 79, 232s, 369
**Thue, A.** 345; sistema de – etc. 345, 346, 347

**Trahténbrot, B. A.** 391
**tipos** 50, 51; sistemas que usan – superiores 169, 198, 291, 386s, 388
**traducción** 236, 243, 306, 443
**transfinito**: cardinal 23, 25, 26, 37; inducción 428, 429; ordinal 428; recursión 250
**transformación** 375; principal f-exenta 371, 375
**transformación, reglas de** 80
**transitivas, leyes** 20, 111, 172, 176, 360, 364
**trascendental, número** 18, 27
**trivalente, lógica** 301, 303, 462
**Turing, A. M.** 274, 286, 290, 291, 292, 322, 326, 340, 341, 342, 348, 388; máquinas de – 291, 322, 327, 340, 343, 344, 345, números de Gödel 338, 344, con dos terminales 331; tesis de – 274, 291, 340, 343, 344, 359, 389, cfr. tesis de Church
**Turquette, A. R.** 135, 168

**única, existencia** 186, 367
**unidad, conjunto** 20
**uniforme**: en funciones supuestas 216, 251, 266, 272, 287, 296, 312, 327; convergencia, etc. 155; método 131, 286, 287, 289
**unión de conjuntos** 21
**uni-posicionales, cálculo de predicados** 359, 391
**universal, función** 264
**uno-a-uno, correspondencia** 15, 20, 383

**vacío (máquina de Turing)** 329
**vacío(a)**: conjunción etc. 396; conjunto 20; expresión 72, 78, 345; rango 209
**vacuo(s)**: axiomas 36; inferencia etc. 33, 133, conjunto 20
**validez** 162, 164, 351, 358, 360s, 381; en dominios finitos 162, 168, 360s, 390, 417; cfr. consistencia
**valor** 40; ambiguo 40, 210; columna de –es 123; cfr. verdad, evaluación
**Vandiver, H. S.** 53
**variable** 40, 65, 71, 134, 142, 168s, 228, 232, 241; –s mantenidas constantes 95, 101, 142; interpretación de –s 139, 142, 143, 210; demostración de – pura etc. 405; restricción sobre –s 396; – variada 94, cfr. variación
**variación en una deducción** 94, 101, 134, 141, 168s, 378
**Veblen, O.** 36, 58
**verdad** 47, 60s, 64, 122, 183, 209, 426, 448; efectiva 418, recursiva general 418, 449, 463; idéntica 124; intuicionista 450; recursiva primitiva 426; tablas de – 122, 135, 2-valentes 122, 133, 134, 188, 209, 449, 3-valentes 302s, 462, regular, fuerte, débil 303; valores de – 122, 140, 135, 209, 301, 303s; función de valor de – 122, 209; cfr. validez, evaluación
**verificable, fórmula** 418
**verificación** 60, 61
**Vieta, F.** 64

**Wajsberg, M.** 135
**Wang, H.** 169, 262, 388
**Weierstrass, K. W. T.** 38, 51, 53
**Wessel, C.** 60
**Weyl, H.** 45, 49, 51, 52, 53, 57, 61
**Whitehead, A. N.** 49, 50, 51, 64, 367

**Young, J. W.** 58
**yuxtaposición** 73

**Zenón, primera paradoja de** 58
**Zermelo, E.** 26, 44, 47, 51, 56, 355

LA "Introducción a la metamatemática", de S. C. Kleene, es una obra cumbre de la lógica matemática en los últimos decenios, y constituye fuente de consulta indispensable en lógica, filosofía, matemática e informática.

La obra se divide en cuatro partes. La primera está dedicada a "problemas de fundamentación". Contiene una teoría intuitiva de conjuntos y un análisis del método metamatemático en el que se discuten filosóficamente las paradojas lógicas y las tres escuelas de pensamiento (logicismo, intuicionismo, formalismo) por ellas suscitadas.

La segunda parte se ocupa de "la lógica elemental y la axiomatización de la aritmética", con un magistral tratamiento, tan bien documentado como breve y claro, del teorema de Gödel sobre la incompletud de la aritmética.

La tercera parte se consagra a "la teoría lógica de la computabilidad", en especial a la teoría de funciones recursivas, en cuya sistematización y desarrollo S. C. Kleene es, indiscutiblemente, la primera autoridad mundial. Esta parte es material de estudio imprescindible para todo aquel que se interese por los fundamentos teóricos de la informática y las ciencias de la computación.

La cuarta parte discute tópicos de "lógica clásica y lógica constructiva" (entre los que destacan el cálculo secuencial y el teorema fundamental de Gentzen), injustificadamente ignorados en la mayoría de los manuales y tratados de lógica matemática.